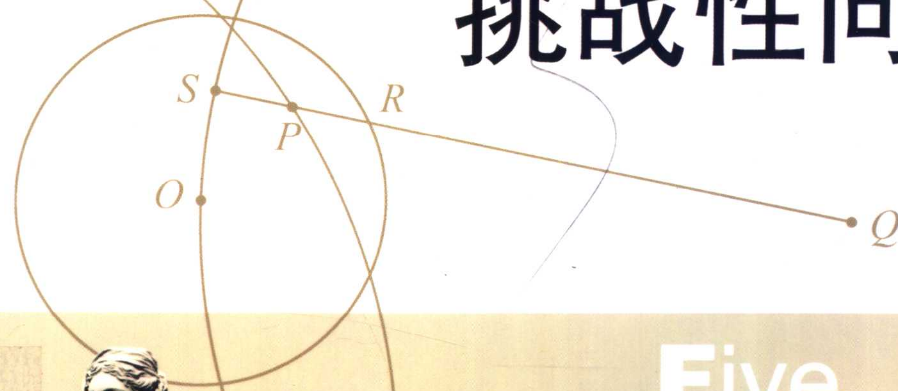
爱德华·J.巴尔博　默里·S.克拉姆金　威廉·O.J.莫泽 著
王继延　林磊　韩士安 译

给数学迷的500个挑战性问题



Five Hundred Mathematical Challenges

上海科技教育出版社

爱德华·J. …… 金 威廉·O.J.莫泽 著
…… 继延 林磊 韩士安 译

给数学迷的500个挑战性问题

Five Hundred Mathematical Challenges

上海科技教育出版社

Five Hundred Mathematical Challenges
by
Edward J. Barbeau, Murray S. Klamkin, William O. J. Moser

责任编辑　卢　源　装帧设计　童郁喜

给数学迷的500个挑战性问题
爱德华·J. 巴尔博
默里·S. 克拉姆金　著
威廉·O. J. 莫泽
王继延　林　磊　韩士安　译

上海世纪出版股份有限公司
上 海 科 技 教 育 出 版 社　出版发行
(上海市冠生园路393号　邮政编码200235)
www.ewen.cc　www.sste.com
各地新华书店经销　常熟高专印刷有限公司印刷
ISBN 978-7-5428-4386-9/O·505
图字 09-2006-171号
开本 787×1092　1/16　印张 14.75　字数 355 000
2007年7月第1版　2007年7月第1次印刷
印数 1-5 000　定价 28.00元

内容简介

这本书包含500个数学问题，它们涉及高中数学的广泛领域以及各种难度层次。其中有一些是简单的数学问题，还有一些是数学奥赛水平的难题。不管你对数学的爱好是深是浅，也不管你的数学能力是高是低，你都能从这本书中获得乐趣与帮助。书中对许多问题提供了不止一种解法，这能让你了解如何以不同的思路处理同一个问题，并比较所运用的不同工具的优美性和有效性。

大专院校和高中的教师会发现这本书非常有用，你可以用它来激励学生，也可以用来自我消遣。书中有些问题，展示了一些基本技巧的威力，可以用来在平时的上课中增添趣味。

这些问题大约在30年前就以一套小册子的形式首次发表，当时这类问题的来源很少。它们经历了时间的考验，对它们的需求也一直很稳定。把这些问题合并成一本书出版，可说是众望所归。

这本问题集还为希望参加数学奥赛的学生提供了一个坚实的基础。你们可以从容易的问题做起，逐步过渡到要求更高的问题。书中特别提供的数学工具箱汇总了奥赛水平的学生需要用到的结论与方法。

序 言

这本问题集面向高中以及大专院校的学生。某些问题是容易的，只需要一些常识和明晰的推理即可解决。另一些可能需要用到我们在工具箱中列出的结论与方法。没有一个问题需要用到微积分知识，因此这本问题集可以描述为“前微积分数学中的问题”。然而，它们明显不同于教科书中的普通习题，或所谓的操练题，它们是具有挑战性的，饶有趣味的，可以激发思维的，也是迷人的。许多问题具有真正数学的“素材”，事实上有少数是研究性问题的最为简单的情形，因此它们可以让读者体会一下数学研究是怎么回事。

这本问题集奉献给这样的学生：他们愿意与一个个初看似无从着手的问题“搏斗”，并最终征服它们，从而觉得其乐无穷。这本问题集也献给这样的教师：他们愿意把自己学生的水平提高到由那些事先人工编制的习题所保证的基本水平以上，从而让他们体验到数学的创造性方面。教师可以从本书中找到让有数学才能的学生受到挑战的问题，而这些问题往往会在数学兴趣小组或数学竞赛培训班中出现。寻求问题的解答可能需要一种集体的经验，因为往往是个人努力无法奏效，而合作研究却会带来成功。

在你对一个问题取得辉煌胜利或完全败下阵来之前，不要去翻看本书的解答。我们所提供的解答并不是标准答案，然而它们提供了探索类似问题的可能方法。一个特定的问题可能会以几种不同的方式解决，这体现了不同的思路，展示了不同的方面。有些解答可能是简单而直接的，而另一些则可能是复杂而巧妙的。正因为这样，我们经常提供不止一种解答。也许你还会发现其他的解答。

这些问题中有许多对你而言很可能是全新的，但我们对大多数问题没有发明权。我们对那些默默无闻的问题原创者表示感谢，因为我们知道：创作一个有趣的、挑战性的、启发性的和可解的，而不是不可解的或解答起来很繁琐的问题是多么的艰苦。除了少数例外，这些问题出自由加拿大数学学会提供的一套5本小册子。事实上，其中第一本小册子出版于1973年。从那时起，它们的销售一直很稳定。现在我们感到需要编辑一本将这5本小册子合在一起的修订本。这本书中的问题没有特意按难易程度或科目内容编排。我们欢迎读者来函，提出批评、纠正，以及提供另外的解答方法，并推荐问题。

收集、创作问题并对它们进行编辑，对我们来说是一种有益的学习经历。如果教师和学生发现这本书是有用的、有趣的，我们将十分欣慰。

E. 巴尔博，M. 克拉姆金，W. 莫泽

目录

问题

问题 1 假设一个直角三角形的三边的长度恰为某个等差数列的三个连续项，证明：这三边的长度之比为 3∶4∶5.

问题 2 对于任意的一个端点位于直线 $y=x$ 上，另一个端点位于直线 $y=2x$ 上，且长度为 4 的线段，试求出其中点的轨迹方程.

问题 3 如图 1 所示，一个矩形被一些线段分割成若干块，其中有些线段的长度已知. 如果这些小块可以拼成一个正方形，那么这个正方形的周长为多少？

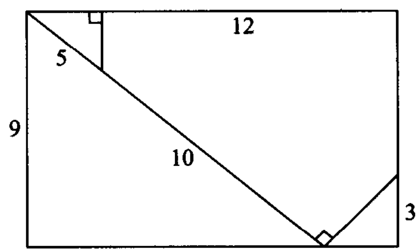


图 1

问题 4 观察以下各式：

$$3^2+4^2=5^2,$$
$$5^2+12^2=13^2,$$
$$7^2+24^2=25^2,$$
$$9^2+40^2=41^2.$$

试根据上述各式，写出一个一般的形式，并加以证明.

问题 5 计算下列式子的和：

$$6+66+666+\cdots+\underbrace{666\cdots6}_{n\text{个}6}\quad(n\geqslant1).$$

问题 6 艾丽斯、贝蒂和卡罗尔参加了同样的一系列测试. 在每一项测试中，三人的成绩均为两两相异的正整数 x,y,z. 每人所得的成绩总和如下：艾丽斯，20；贝蒂，10；卡罗尔，9. 若贝蒂在代数测试中名列第一，那么几何测试中谁列第二位？

问题 7 记 $f_0(x)=\dfrac{1}{1-x}$，$f_n(x)=f_0(f_{n-1}(x))\quad(n=1,2,3,4,\cdots)$，试计算 $f_{1976}(1976)$.

问题 8 证明：在任意五个整数（不一定相异）中，一定可以选出三个，其和能被 3 整除.

问题 9 史密斯先生每天一成不变地搭乘同一班火车下班，到达目的车站的时间总是下午 5 点. 那时他的私人司机会准时到达，并立刻带他回家. 一个晴朗的下午，史密斯先生搭乘了较早的火车，到达目的车站的时间是下午 4 点. 他没有给司机去电话，也没有在车站等到 5 点，而是选择步行回家. 在路上，他遇见了司机，并上车回到家里，发现较平时提早了 20 分钟. 几个星期后，又是一个好天，史密斯先生又搭乘了较早的火车，这次到达目的车站的时间是下午 4 点半. 他再次选择步行，在路上遇见了司机，并上车回家. 试问：这次会比平时提早多少分钟到家？

问题 10 假设一个空水罐的重心位于罐的内底面上方. 现将水灌入，直到盛有水的水罐的重心取得最低的位置. 请解释为什么这个极端位置恰好位于水的表面.

问题 11 父母和儿子三人决定举行一次特别的家庭棋类比赛，两两对下，每盘必须有一方胜出(就是说，没有“和棋”的可能). 每盘比赛后，胜者继续和另一位刚才没参加上盘比赛的人比赛. 第一个胜得两盘(不一定连续)的为最后的胜利者. 出自对长者的尊重，父亲有权在比赛开始时，选择第一盘就进行比赛或者坐等第一盘结束再进行比赛. 你认为父亲应该采取哪一种方案为好？(USAMO 1974)

问题 12 如图 2 所示，$EFGH$ 是四边形 $ABCD$ 的内接正方形，若 $\overline{EB}=\overline{FC}=\overline{GD}=\overline{HA}$，证明：四边形 $ABCD$ 也是一个正方形.

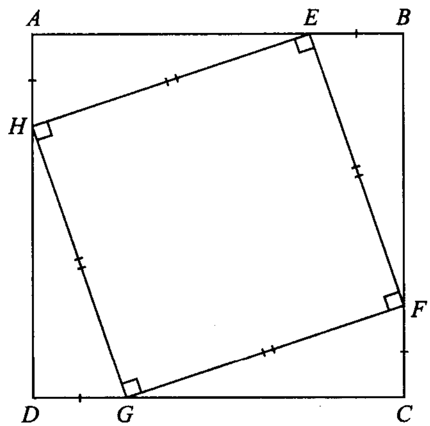


图 2

问题 13 证明：在任意 7 个两两不等的不大于 126 的正整数中，总可以找出两个数 x 和 y，满足不等式 $1<\frac{y}{x}\leqslant 2$.

问题 14 证明：在边长为 1 的正方形内部或边上的任意 5 个点中，总存在两点，它们的距离不大于$\frac{\sqrt{2}}{2}$.

问题 15 在一次竞选活动中，参与竞选的各个政治团体一共作出了 n 种不同承诺($n>0$). 没有两个政治团体的承诺是完全一样的，但几个政治团体会有一些共同的承诺，且每两个政治团体之间至少有一个承诺是相同的. 试证明：有且只有 2^{n-1} 个政治团体参与了这次竞选.

问题 16 现有一个四角为黑色方格的$(2m+1)\times(2n+1)$的棋盘(红黑相间)，证明：若删去任意一个红色的方格和任意两个黑色的方格，留下的棋盘一定可以被多米诺骨牌(即 1×2 的矩形)所覆盖.

问题 17 正整数 n 的数字和 $D(n)$ 有以下递归定义，即

$$D(n)=\begin{cases} n & (1\leqslant n\leqslant 9),\\ D(a_0+a_1+a_2+\cdots+a_m) & (n>9),\end{cases}$$

其中 $a_0,a_1,\cdots,a_m$ 为以十进制表示的正整数 n 的各位数字，即

$$n=a_m10^m+a_{m-1}10^{m-1}+\cdots+a_1 10+a_0.$$

例如 $D(989)=D(26)=D(8)=8$.

证明：$D((1234)n)=D(n)$ $(n=1,2,3,\cdots)$.

问题 18 给定三点 A、B、C，试构造一个以 A 为中心的正方形，使其相邻的两边(或它们的延长线)分别过点 B 和点 C.

问题 19 用初等方法给出如下不等式的证明：

$$\sqrt{n}^{\sqrt{n+1}}>\sqrt{n+1}^{\sqrt{n}}\quad(n=7,8,9,\cdots).$$

问题 20 如图 3，在圆 O 内，OXY 垂直于弦 AB. 试证明：在图 4 中$\overline{DX}\leqslant\overline{CY}$. (埃尔德什与克拉姆金)

问题 21 证明：对于 n 个正整数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$，必存在某些 i,k($1\leqslant i\leqslant i+k\leqslant n$)，使得 $a_i+\cdots+a_{i+k}$能被 n 整除.

问题 22 给定平面上两两距离相异的有限

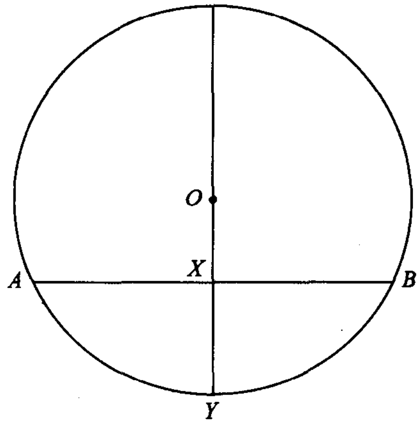


图 3

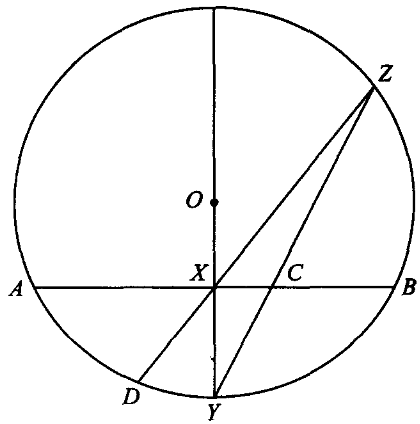


图 4

多个点，用直线段联结每一点和离它距离最短的点．证明：最终所得到的图形中不存在三角形．

问题 23 证明：若 m 是正有理数，那么 $m+\frac{1}{m}$为整数的充分必要条件是 $m=1$．

问题 24 如图 5，以直角$\triangle ABC$ 的斜边 AC 为一边，向外作正方形，记 P 为该正方形的中心．证明：BP 为$\angle ABC$ 的角平分线．

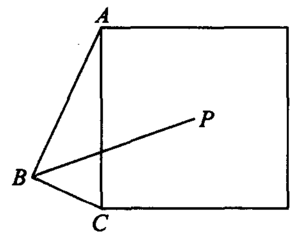


图 5

问题 25 已知 l_1、l_2、l_3、l_4 为同一平面上互不重合的四条直线，且 l_1、l_2 分别平行于 l_3、l_4．试找出到这四条直线的垂直距离的和为常数的动点的轨迹．

问题 26 假定同一平面上有不共线的五个点，且任意四点都不共圆．证明：存在过其中三点的一个圆，使得另外两点中，一点在圆内，一点在圆外．

问题 27 已知点 P 为任意$\triangle ABC$ 内的一点，分别记 d_1、d_2、d_3 为点 P 到边 BC、CA、AB 的距离，又分别记 h_1、h_2、h_3 为三角形过顶点 A、B、C 的高线长．证明：

$$\frac{d_1}{h_1}+\frac{d_2}{h_2}+\frac{d_3}{h_3}=1.$$

问题 28 在一条笔直的公路边上有 n 个房间，每个房间里都住着一个男孩．试问：在公路上的哪一点会面，每个男孩由各自居住的房间到会面地点的距离之和为最小？

问题 29 记点 P 为已知相交两圆的一个交点，试过点 P 作一条不包含公共弦的直线 l，使其被两圆截出长度相等的两条线段．

问题 30 如图 6，由已知$\triangle ABC$ 的各边分别向外作正三角形．证明：$\overline{AP}=\overline{BQ}=\overline{CR}$．

问题 31 若 n 为大于 1 的正整数，证明：

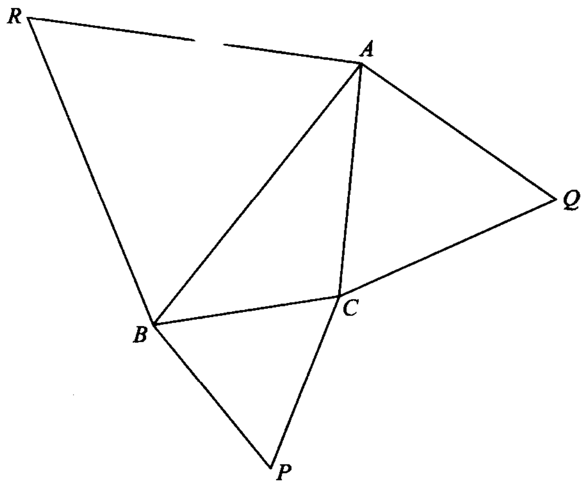


图 6

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$$

一定不是整数.

问题 32 已知半径为 1 的球面上的两点被一条位于球内的长度小于 2 的圆弧所联结,证明:该圆弧一定位于所给球面的某个半球面上.(USAMO 1974)

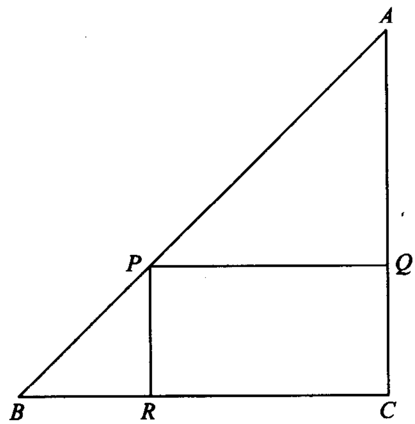
问题 33 证明:对于任意正整数 n,有

$$\left[\frac{n}{3}\right]+\left[\frac{n+2}{6}\right]+\left[\frac{n+4}{6}\right]=\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n+3}{6}\right].$$

问题 34 证明:所有 n 位($n>2$)正整数的和为

$$494\underbrace{99\cdots9}_{n-3个9}55\underbrace{00\cdots0}_{n-2个0}.$$

问题 35 如图 7,已知腰长为 1 的等腰直角 $\triangle ABC$,点 P 位于斜边上,点 Q、R 分别为点 P 到两直角边的垂线的垂足. 试证明:无论点 P 的位置如何,$\triangle APQ$、$\triangle PBR$ 和矩形 $QCRP$ 三者面积的最大值至少为$\frac{2}{9}$.



$\overline{BC}=\overline{CA}=1$

图 7

问题 36 证明:三边长分别为 5、5、6 的三角形的面积恰好和三边长分别为 5、5、8 的三角形的面积相等. 试再写出一对三边长为整数,且面积相等的相异的等腰三角形.

问题 37 一个四边形的各个顶点分别位于边长为 1 的正方形四边,证明:该四边形的各边长度 a、b、c、d 满足不等式

$$2\leqslant a^2+b^2+c^2+d^2\leqslant 4.$$

问题 38 如图 8,半径分别为 r、$R(R>r)$的两圆相交,试求出图中两圆不重叠部分的面积之差的表达式.

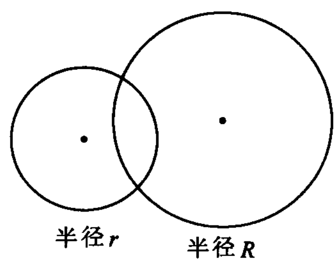


图 8

问题 39 将数字 3 表达成一个或几个正整数的有序和的形式,一共有 4 种,分别为:

3，　1+2，　2+1，　1+1+1.
证明：将正整数 n 以如此形式表达，一共可以有 2^{n-1} 种形式.

问题 40　某次竞赛有 $T_1,T_2,\cdots,T_n$ 等 n 个队参加，每个队仅和其他各队比赛一次. 每次比赛一定分出输赢，无平局，赢一次得 1 分. 分别记 $S_1,S_2,\cdots,S_n$ 为 $T_1,T_2,\cdots,T_n$ 队的总分. 证明：对于 $1<k<n$，

$$S_1+S_2+\cdots+S_k\leqslant nk-\frac{1}{2}k(k+1).$$

问题 41　观察以下各式：

$$1^2=\frac{1\times2\times3}{6},$$

$$1^2+3^2=\frac{3\times4\times5}{6},$$

$$1^2+3^2+5^2=\frac{5\times6\times7}{6}.$$

由此猜想一般规律，并加以证明.

问题 42　以下问题不得借助数学用表、计算器等工具来完成.

(1) 证明：满足 $x=\frac{x^2+1}{198}$ 的 x 的值介于 $\frac{1}{198}$ 和 197.99494949…之间；

(2) 利用(1)的结果，证明：$\sqrt{2}<$ 1.41421356421356421356…；

(3) $\sqrt{2}$ 小于 1.41421356 吗？

问题 43　证明：若 5 根针投掷到边长为 2 的等边三角形卡纸上，那么一定存在两根针，它们投得的针点的距离不大于 1.

问题 44　给定同一平面上的偶数个点，是否存在一条直线，使得这偶数个点在直线的两侧恰好各半？

问题 45　如图 9，两圆相交于 A、B 两点，线段 PQ 过点 A，且与两圆分别另交于点 P 和点 Q. 证明：对于线段 PQ 的一切可能出现的情况，$\frac{\overline{BP}}{\overline{BQ}}$ 为常数.

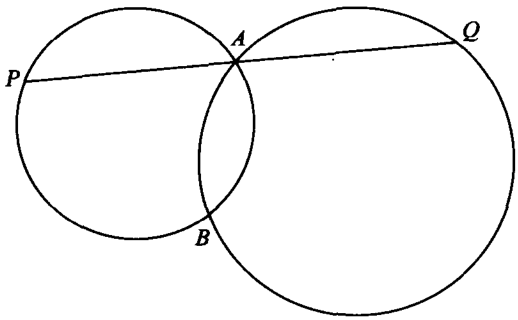


图 9

问题 46　记 $f(n)$ 为如下数列的前 n 项的和：
$0,1,1,2,2,3,3,4,4,\cdots,r,r,r+1,r+1,\cdots$.

(1) 导出 $f(n)$ 的表达式；

(2) 证明：当 s 和 t 为正整数，且 $s>t$ 时，$f(s+t)-f(s-t)=st$.

问题 47　已知不在同一直线上的 P、Q、R 三点，试作一三角形，使 P、Q、R 恰为此三角形三边的中点.

问题 48　证明：$1^{99}+2^{99}+3^{99}+4^{99}+5^{99}$ 能被 5 整除.

问题 49　证明：不存在整数 a、b、c，使得 $a^2+b^2-8c=6$.

问题 50　若 a、b、c、d 为两两相异的 4 个数，那么每次取两个数相加，能形成 6 种和式：

$$a+b,a+c,a+d,b+c,b+d,c+d.$$

将整数 1,2,3,4,5,6,7,8 平分成两个集合，使得一个集合中的 4 个数以上述方法所得的 6 个和，恰好与另一个集合所得的各个和一样(顺序不必相同). 试列出所有可能的分拆法.

问题 51 如果 $2\ln(x-2y)=\ln x+\ln y$，求 $\frac{x}{y}$.

问题 52 设函数 f 满足如下性质：

(a) 对每个正整数 n，$f(n)$均有定义；

(b) $f(n)$是整数；

(c) $f(2)=2$；

(d) 对任意 m 和 n，有

$$f(mn)=f(m)f(n);$$

(e) 如果 $m>n$，则 $f(m)>f(n)$.

证明：$f(n)=n$，$n=1,2,3,\cdots$.

问题 53 如果空间中一直线 l 与平面 π 中三条给定的直线构成相同的夹角，证明：l 与平面 π 垂直.

问题 54 设整数 a 具有如下形式

$$a=\underbrace{11\cdots1}_{m个1},$$

又设

$$b=1\underbrace{00\cdots0}_{m-1个0}5,$$

证明：$ab+1$ 是一个完全平方数，并用题中所给的 a 和 b 那样的形式来表示 $ab+1$ 的平方根.

问题 55 在水平面上相距 $2a$ 单位有两杆高分别为 h 和 k 的旗. 求该平面上关于这两个旗杆顶的仰角相等的所有点的集合.

问题 56 证明：对于 $n=1,2,3,\cdots$，有

$$1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}<3.$$

问题 57 设 X 是凸四边形 $ABCD$ 的边 BC 上（在 B 与 C 之间）的任意点（见图 10）. 设过 B 且平行于 AX 的直线与过 C 且平行于 DX 的直线交于点 P. 证明：$\triangle APD$ 的面积等于四边形 $ABCD$ 的面积.

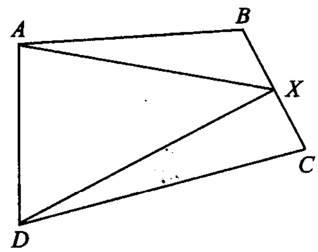


图 10

问题 58 设

$$s_n=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

证明：$2\sqrt{n+1}-2<s_n<2\sqrt{n}-1$.

问题 59 证明：对于任何内接于单位圆内的四边形，其最短边的长度不大于$\sqrt{2}$.

问题 60 证明：如果一个凸多边形有四个内角等于 90°，那么它一定是一个矩形.

问题 61 有 6 个大小相同的小球，其中两个红色、两个白色、两个蓝色. 已知每种颜色的球中有一个重 15 克，另一个重 16 克. 用天平秤称两次，确定哪三个球是 16 克的.

问题 62 一架飞机以常速从 A 点飞到 B 点再返回，不考虑拐弯所花的时间. 如果这期间有一股常速的风从 A 吹向 B，飞机的飞行时间会比在静止气流中花得更多吗？（这与你的直觉一致吗？）

问题 63 如果四面体 $OABC$ 的三条棱 OA、OB、OC 两两垂直，证明：$\triangle ABC$ 不是直角三角形.

问题 64 求所有三元数组(x,y,z)，使得这三个数中的任意一个数加上另两个数的积，所得结果都是 2.

问题 65 设单位正方形内有 9 个点. 证明:存在一个面积至多是 $\frac{1}{8}$ 的三角形,其顶点是这 9 个点中的 3 个点.(参见问题 14 或 43.)

问题 66 设 a、b、c 是某三角形的三边长. 证明:如果 $a^2+b^2+c^2=bc+ca+ab$,那么该三角形是等边三角形.

问题 67 设三角形的三边长为 a、b、c,其对应的三条高的长分别为 h_a、h_b、h_c. 如果 $a\geqslant b\geqslant c$,证明:$a+h_a\geqslant b+h_b\geqslant c+h_c$.

问题 68 设 n 是个五位数(它的第一位非零),而 m 是通过将 n 的中间位删去而形成的四位数. 求出使 $\frac{n}{m}$ 为整数的所有 n.

问题 69 证明:对于非零数 x、y、z,如果 $n=-1$ 时,表达式

$$x^n+y^n+z^n \text{ 和 } (x+y+z)^n$$

相等,那么对任何奇整数 n,它们也相等.

问题 70 某军队指挥官希望安排一个哨兵,使得他到两个指定点及到一条笔直公路的距离相等. 这件事肯定办得到吗? 试确定所有可能的位置. 换言之,在欧几里得平面中,到两个给定点及一给定直线的距离相等的点有多少个? 可能的话,用圆规直尺求之.

问题 71 证明:对于 $n=1,2,3,\cdots$,

$$\left[\frac{n+1}{2}\right]+\left[\frac{n+2}{4}\right]+\left[\frac{n+4}{8}\right]+\left[\frac{n+8}{16}\right]+\cdots=n.$$

问题 72 设 A、B、C 是不共线的任意三点. 构造一个中心为 C 的圆,使得点 A 到该圆的某一条切线与点 B 到该圆的某一条切线平行.

问题 73 设

$$f(x)=x^4+x^3+x^2+x+1.$$

求用 $f(x)$ 除 $f(x^5)$ 所得的余式.

问题 74 设多项式

$$f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$$

的系数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 都是整数. 如果存在四个不同的整数 a、b、c、d,使得 $f(a)=f(b)=f(c)=f(d)=5$,证明:不存在整数 k,使得 $f(k)=8$.

问题 75 给定一个 $n\times n$ 的正整数数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}, \end{matrix}$$

设 m_j 是第 j 列中的最小数,m 是这些 m_j 中的最大数. 又设 M_i 是第 i 行中的最大数,M 是这些 M_i 中的最小数. 证明:$m\leqslant M$.

问题 76 设有一个公比大于 1 的等比数列,且其每项均为 100 至 1000 之间(包括两头)的整数. 求这种数列的最大项数.

问题 77 证明:对每个正整数 n,$1^n+8^n-3^n-6^n$ 能被 10 整除.

问题 78 在一个圆的圆周上取定 n 个点,并画出由这些点所确定的弦. 假如任何三弦都不共点(顶点除外),问:顶点落在该圆内的三角形共有多少?(图 11 显示了 6 个顶点时的情况,以及这样的一个三角形.)

问题 79 整数数列 $a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$ 可用如下递推公式定义:$a_{n+1}=a_n^2-a_n+1$,且 $a_1=2$. 该数列的前几项为:$a_1=2,a_2=3,a_3=7,a_4=43,a_5=1807$. 证明:整数 $a_1,a_2,a_3,\cdots$ 是两两互素的.

问题 80 证明:可以取足够大的整数 N,使

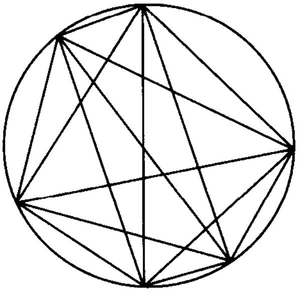


图 11

得 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{N}$大于 100.

问题 81 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n,b_1,b_2,\cdots,b_n$ 是 $2n$ 个正实数. 证明:

$$\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}+\cdots+\frac{a_n}{b_n}\geqslant n$$

及

$$\frac{b_1}{a_1}+\frac{b_2}{a_2}+\cdots+\frac{b_n}{a_n}\geqslant n$$

中必有一个成立.

问题 82 设 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 是一个 $n\geqslant 1$ 次的整系数多项式. 证明:存在无限多个正整数 m,使得

$$f(m)=a_nm^n+a_{n-1}m^{n-1}+\cdots+a_1m+a_0$$

不是素数.

问题 83 图 12 显示了 3 条直线可将平面分割成 7 个区域. 求用 n 条直线将平面分割成不同区域的最大个数.

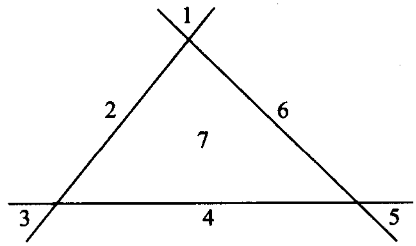


图 12

问题 84 在某个小镇上,每个街区都呈矩形,所有街道(忽略宽度)不是东西走向的,就是南北走向的. 某人想从一个路口向东过 m 个街区,向北过 n 个街区,到达另一个路口,最短的路线有多少条?

问题 85 给定六个数,它们满足以下关系式:

(a) $y^2+yz+z^2=a^2$;

(b) $z^2+zx+x^2=b^2$;

(c) $x^2+xy+y^2=c^2$.

用 a、b、c 来表示和式 $x+y+z$. 如果这些数都是正数,试给出一个几何解释.

问题 86 假设空间中有 6 个点,且任意三点不共线. 每两点间连一线段,共有 15 条这样的线段. 然后将它们着色,有些着红色,另一些着蓝色. 证明:存在用这些线段构成的三角形,且三角形的所有边着相同的颜色.

某学生在一本代数教科书的扉页上写了下面这个救世妙方:

如果又有一场洪水滔天,

这儿就是理想的避难客店。

即使全世界都被水淹,

这本书上仍然是干巴巴一片。

问题 87 将数字 1 表示为有限多个不同的大于等于 2 的整数的倒数之和. 问:这样的表示法唯一吗? 如果不唯一,共有多少种?

问题 88 如何用圆规直尺将一个圆划分成 9 个面积相同的区域?

问题 89 在平面上任意给定 n 个点. 对于这些点的任何一个排列 $P_1, P_2, \cdots, P_n$,都确定了一条路线:沿直线段从 P_1 到 P_2,然后从 P_2 到 P_3,……,最后终止于 P_{n-1} 到 P_n 的直线段. 证明:这样的折线段路线中的最短者一定不会自相交.

问题 90 设 $P(x,y)$是关于 x 和 y 的多项式,使得

(a) $P(x,y)$是对称的,即

$$P(x,y)\equiv P(y,x);$$

(b) $x-y$ 是 $P(x,y)$的因式,即

$$P(x,y)\equiv(x-y)Q(x,y).$$

证明:$(x-y)^2$ 一定是 $P(x,y)$的因式.

问题 91 图 13 所示是一个 9 个顶点的(凸)多边形. 图中所画的 6 条对角线将该多边形分成了 7 个三角形:$\triangle P_0P_1P_3$、$\triangle P_0P_3P_6$、$\triangle P_0P_6P_7$、$\triangle P_0P_7P_8$、$\triangle P_1P_2P_3$、$\triangle P_3P_4P_6$、$\triangle P_4P_5P_6$. 对这些三角形用$\triangle_1$、$\triangle_2$、$\triangle_3$、$\triangle_4$、$\triangle_5$、$\triangle_6$、$\triangle_7$ 来标号,共有多少种方法可使 P_i 必定是$\triangle_i$ 的顶点($i=1,2,3,4,5,6,7$)? 验证你的结论.

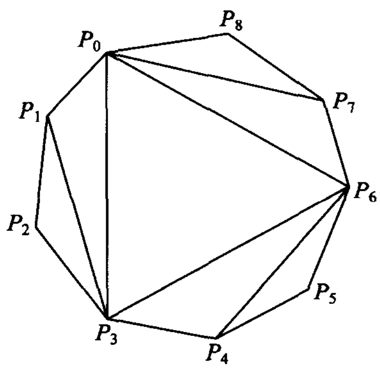


图 13

问题 92 在图 14 中,点 O 是圆的中心,PQ 是直径,点 R 是由点 P 向点 T 处圆的切线所作垂线的垂足,点 S 是由点 Q 向同一切线所作垂线的垂足. 证明:$\overline{OR}=\overline{OS}$.

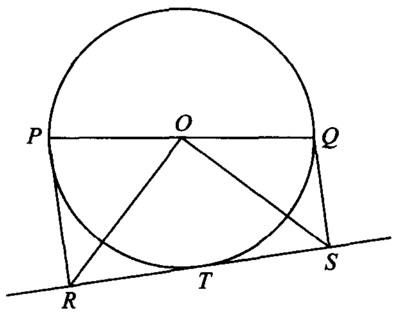


图 14

问题 93 设 n 是正整数,$a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是任意$\geqslant 1$ 的实数. 证明:

$$(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n) \geqslant \frac{2^n}{n+1}(1+a_1+a_2+\cdots+a_n).$$

问题 94 如图 15,A 和 B 是给定圆上的固定点,且 A、B 不与该圆的中心 O 共线. 而 XY 是一可变的直径,求过 A 和 X 的直线与过 B 和 Y 的直线的交点 P 的轨迹.

问题 95 观察:

$$\frac{1}{1}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2};\quad \frac{1}{2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6};$$

$$\frac{1}{3}=\frac{1}{4}+\frac{1}{12};\quad \frac{1}{4}=\frac{1}{5}+\frac{1}{20}.$$

由这些例子总结出一个一般的规律,并予以证明. 证明对于任何大于 1 的整数 n,存在正整数 i 和 j,使得

$$\frac{1}{n}=\frac{1}{i(i+1)}+\frac{1}{(i+1)(i+2)}+$$

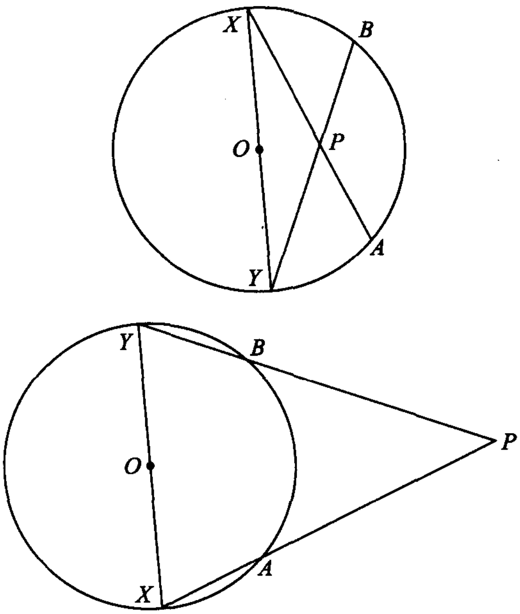


图 15

$$\frac{1}{(i+2)(i+3)}+\cdots+\frac{1}{j(j+1)}.$$

(*American Mathematical Monthly* 55 (1948): 427，问题 E827.)

问题 96 约翰抛了 6 枚均匀的硬币，玛丽抛了 5 枚均匀的硬币. 问：约翰抛出的硬币中，得到正面的次数比玛丽的多的概率是多少？

问题 97 设 n 是给定的正整数，对任意 n 个满足 $0\leqslant x_i\leqslant 1$，$i=1,2,\cdots,n$ 的实数 x_i 可对应于如下的和：

$$\begin{aligned}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}|x_i-x_j|=|x_1-x_2|+|x_1-x_3|+|x_1-x_4|+\cdots+|x_1-x_{n-1}|+|x_1-x_n|\\+|x_2-x_3|+|x_2-x_4|+\cdots+|x_2-x_{n-1}|+|x_2-x_n|\\+|x_3-x_4|+\cdots+|x_3-x_{n-1}|+|x_3-x_n|\\+\cdots\\+|x_{n-2}-x_{n-1}|+|x_{n-2}-x_n|\\+|x_{n-1}-x_n|.\end{aligned}$$

记 $S(n)$ 为这一和的可能的最大值，求 $S(n)$.

问题 98 观察

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{3}=\frac{4}{3},\qquad 4^2+3^2=5^2,$$

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{5}=\frac{8}{15},\qquad 8^2+15^2=17^2,$$

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{7}=\frac{12}{35},\qquad 12^2+35^2=37^2.$$

根据上述例子，试确定其一般规律，并证明.

问题 99 如图 16，$ABCD$ 是一矩形，且 $\overline{BC}=3\,\overline{AB}$. 证明：如果 P、Q 是 BC 边上的点，且

$$\overline{BP}=\overline{PQ}=\overline{QC},$$

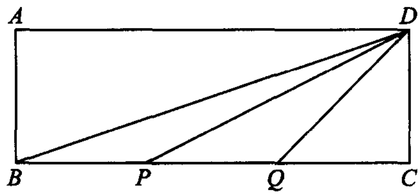


图 16

那么

$$\angle DBC+\angle DPC=\angle DQC.$$

问题 100 一个六边形内接于圆. 它的三条连续边的边长为 a，另三条连续边的边长为 b. 试确定该圆的半径.

问题 101 (1) 证明：数 10201 在任何进制下都是合数；

(2) 证明:数 10101 在任何进制下都是合数;

(3) 证明:数 100011 在任何进制下都是合数.

问题 102 假设有 n 个人,他们中每人都恰好掌握一件信息,且这所有的 n 件信息都不相同. 每次某个人 A 打电话给 B,A 告诉 B 所有他知道的,但是 B 则什么也不告诉 A. 问:让这些人都知道所有信息最少需要打多少个电话?

问题 103 证明:对每个整数 $n(n\geqslant 6)$,一个大正方形都可分割成 n 个不重叠的正方形.

问题 104 设 $ABCD$ 是非退化四边形,但不必是平面上的(顶点以循环次序命名),且有

$$\overline{AC}^2+\overline{BD}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CD}^2+\overline{DA}^2.$$

证明:$ABCD$ 是一个平行四边形.

问题 105 证明:每个简单多面体至少有两个面具有相同的边数.

问题 106 $ABCDEF$ 是以 P 为中心的正六边形,PQR 是正三角形(见图 17). 如果 $\overline{AB}=3$,$\overline{SB}=1$,$\overline{PQ}=6$,求这两个图形公共部分的面积.

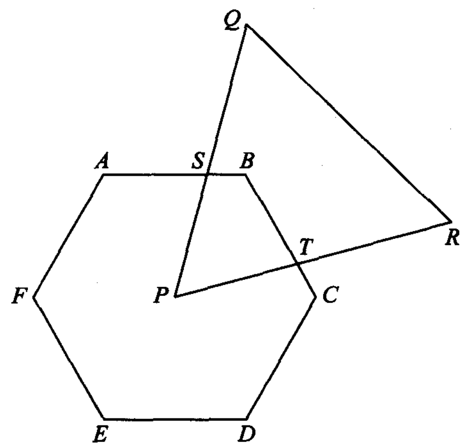


图 17

问题 107 证明:对每个正整数 n,

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots+\frac{1}{2n-1}=\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n-1}.$$

问题 108 对每个正整数 n,设

$$h(n)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}.$$

例如,

$$h(1)=1,\ h(2)=1+\frac{1}{2},\ h(3)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}.$$

证明:

当 $n=2,3,4,\cdots$ 时,$n+h(1)+h(2)+h(3)+\cdots+h(n-1)=nh(n)$.

问题 109 对哪些非负整数 n 和 k,

$$(k+1)^n+(k+2)^n+(k+3)^n+(k+4)^n+(k+5)^n$$

能被 5 整除?

问题 110 试给出用圆规直尺构造一个具有给定夹角 α、β 及周长 p 的三角形的方法.

问题 111 确定常数 k,使得多项式

$$P(x,y,z)=x^5+y^5+z^5+k(x^3+y^3+z^3)(x^2+y^2+z^2)$$

有因式 $x+y+z$. 证明:对于这一 k 值,$P(x,y,z)$ 有因式 $(x+y+z)^2$.

问题 112 证明:对所有正实数 p、q、r、s,

$$(p^2+p+1)(q^2+q+1)(r^2+r+1)\cdot(s^2+s+1)\geqslant 81pqrs.$$

问题 113 证明:对任意正整数 n 及任意实数 x,