奥博丛书

高中数学奥林匹克系列

浙江奥数网 www.zjaoshu.com

西泠印社出版社

排列组合与概率统计

【许康华 编著】

奥博丛书

高中数学奥林匹克系列

一试系列

1.解析几何	虞金龙 编著
2.数列与数学归纳法	蔡小雄 编著
3.集合与函数	李惟峰 编著
4.三角函数	张金良 编著
5.立体几何	吴国建 编著
6.复数与向量	吕峰波 编著
7.不等式	郑日锋 编著
8.排列组合与概率统计	许康华 编著

二试系列

1.平面几何	过伯祥 编著
2.不等式与最值	石世昌 编著
3.组合数学	徐士英 编著
4.初等数论	冯祖铭 编著
5.解题研究	单 墫 编著
6.我怎样解题	单 墫 编著
7.中学数学竞赛导引	常庚哲 严镇军 编著
8.数学奥林匹克大集	黄宣国 编著
9.奥林匹克数学方法选讲	黄国勋 编著
10.解数学竞赛题的常用策略	王连笑 编著
11.奥林匹克数学教育的理论和实践	冯跃峰 编著
12.数学奥林匹克试题背景研究	刘培杰 编著
13.数学奥林匹克概论	朱华伟 编著
14.国际数学奥林匹克研究	熊 斌 田廷彦 编著

奥 博
教 育

奥博丛书
高中数学奥林匹克系列
浙江奥数网 www.zjaoshu.com
西泠印社出版社

排列组合与概率统计

【许康华 编著】

12345678901234567
012478+78665
234556-4534574.4567878678
4534234/434545
2137467854678945678
123786453453.14486786
4536789645234 5(12564564)
21231564861156
654651564864847

许康华：浙江省富阳二中数学教师，浙江省数学竞赛夏令营教练。主要研究兴趣为组合、图论、初等数论、数学教育与奥林匹克数学，在国内外数学杂志上发表论文40余篇，其中有3篇被《美国数学评论》摘评，3篇获浙江省自然科学优秀论文三等奖。主编与参编数学竞赛书，教学辅导书10余部。并曾为IMO中国国家集训队提供测验题多个。

奥博丛书之高中数学奥林匹克一试系列

本册主编　许康华
丛书总策划　徐　莹
丛书审稿　王祖樾　李名德　徐士英　王航平
业务联系　地址：浙江省杭州市学院路 83 号 221 室
电话：0571－85028528　85021510
传真：0571－85028578

丛书序言

一本武功秘籍!

找到它,勤加练习,就能成为武林高手。

这是金庸等人常写的故事。

这套奥博丛书,其中就有若干本或许可以称为解题秘籍。当然,得到它之后,要成为解题高手,还得注意:

一、勤加练习。因为解题是实践性的技能,只能通过模仿和实践来学到它。

二、循序渐进。孔子说:“欲速则不达。”不能操之过急。一个问题或一种方法,彻底弄清楚了,再往下看。切忌囫囵吞枣,食而不化。

三、不要迷信书本。“尽信书,则不如无书。”作者也有可能出错。“乾坤大挪移”第七层心法的一十九句就是“单凭空想而想错了的。”其实要成为真正的高手,不能依赖秘籍,而要自创新招。

这套奥博丛书,不只是解题的秘籍。它的作者阵营庞大,视角不尽相同,写法各有特点。或综述,或专题;或讲思想,或谈策略;或提供翔实材料,或介绍背景知识;……。

据我了解,奥博丛书原本并不是一套丛书。它既没有预先设定的宏伟的出书规划,也不能保证其中的每一本都同样精彩。时间,才是考验它们的唯一准则。它不像其他丛书那样,追求在同一时间出齐;而是细水长流,渐渐汇聚成河。除已出的、即出的十余种外,想必还会继续推出新的品种。

开卷有益。相信这套丛书能很好地普及数学知识,增加读者对数学的理解,提高数学的品味(taste),也就是鉴赏能力。祝愿这套丛书能够伴随读者度过一段愉快的时光。

单 墫

2006 年 3 月 16 日

目 录

第1章 排列与组合

第2章 二项式定理

第3章 计数方法

第4章 概 率

参考答案

第1章 排列与组合

1.1 分类计数原理与分步计数原理

知识要点

1. 分类计数原理(又称加法原理)

完成一件事,有 n 类办法,在第 1 类办法中有 m_1 种不同的方法,在第 2 类办法中有 m_2 种不同的方法,…,在第 n 类办法中有 m_n 种不同的方法. 那么完成这件事共有 $N=m_1+m_2+\cdots+m_n$ 种不同的方法.

2. 分步计数原理(又称乘法原理)

完成一件事,需要分成 n 个步骤,做第 1 步有 m_1 种不同的方法,做第 2 步有 m_2 种不同的方法,…,做第 n 步有 m_n 种不同的方法. 那么完成这件事共有 $N=m_1\times m_2\times\cdots\times m_n$ 种不同的方法.

3. 分类计数原理与分步计数原理的区别

分类计数原理与分步计数原理,回答的都是有关做一件事的不同方法的种数的计算问题. 它们的区别在于: 分类计数原理针对的是“分类”问题,其中各种方法相互独立,无论采用哪一类办法中的哪一种方法都能单独完成这件事;分步计数原理针对的是“分步”问题,各个步骤相互依存,缺一不可,只有依次完成所有的步骤,才能完成这件事.

4. 关于“分类”与“分步”必须注意的问题

(1) 分类: 首先要根据问题的特点确定一个适当的分类标准,然后在这个标准下进行分类;其次,分类时要遵循两条基本原则: ① 完成这件事的任何一种方法必须属于某一类; ② 分别属于不同两类的方法是不同的方法. 前者保证完成这件事的方法不遗漏,后者保证不重复,即分类时要做到:“不漏不重”.

(2) 分步: 首先要根据问题的特点确定一个分步标准;其次,分步时还要

注意满足完成一件事必须且只需连续完成这 n 个步骤后这件事才算完成.

例题进解

例 1 三边长均为整数且最大边长为 11 的三角形有多少个?

分析 设另两边长为 x,y,且不妨设 $1\leqslant x\leqslant y\leqslant 11$,则要构成三角形,必须 $x+y\geqslant 12$. 我们就 y 的可能取值进行分类计数.

解 当 $y=11$ 时,x 可取 $1,2,\cdots,11$,有 11 个三角形;

当 $y=10$ 时,x 可取 $2,3,\cdots,10$,有 9 个三角形;

…

当 $y=6$ 时,x 可取 6,有 1 个三角形;

因此,满足条件的三角形的个数为:$11+9+7+5+3+1=36$.

注 可以将这里的 11 推广到一般的正整数 n,见本节练习题第 13 题.

例 2 3600 的正约数有多少个?

解 为找 3600 的正约数,必须先对其进行质因数分解. 因 $3600=2^4\times 3^2\times 5^2$,故 3600 的正约数必可以表示为 $2^\alpha\cdot 3^\beta\cdot 5^\gamma$ 的形式(其中 $0\leqslant\alpha\leqslant 4$,$0\leqslant\beta\leqslant 2$,$0\leqslant\gamma\leqslant 2$,$\alpha,\beta,\gamma\in\mathbf{Z}$,因此,$\alpha$ 有 5 种可能值,β,γ 各有 3 种可能值. 故 3600 的正约数共有 $N=5\times 3\times 3=45$ 个.

注 类似地,我们可得更为一般的结论:

定理(约数个数定理) 设正整数 n 可分解式为 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$,其中 p_1,$p_2,\cdots,p_k$ 为互不相同的质数,$\alpha_i\geqslant 0$,$\alpha_i\in\mathbf{Z}$. 则 n 的正约数个数为:

$$d(n)=(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_k+1).$$

例 3 已知 $A=\{a,b,c,d\}$,$B=\{1,2,3,4,5\}$,则从集合 A 到集合 B 的映射有多少个?

解 根据映射的定义,A 中元素 a 的象有 5 种可选,b 的象有 5 种可选,c 的象有 5 种可选,d 的象有 5 种可选,由分步计数原理,从 A 到 B 的映射个数为 $N=5\times 5\times 5\times 5=5^4=625$.

注 一般地,已知集合 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$,$B=\{b_1,b_2,\cdots,b_m\}$,则从集合 A 到集合 B 的映射有 m^n 个.

例 4 (2003 年江苏高考题)某城市在中心广场建造一个花圃,花圃分为 6 个部分(如图 1-1). 现要栽种 4 种不同颜色的花,每部分栽种一种且相邻部分不能栽种同样颜色的花,不同的栽种方法有多少种?(用数字作答)

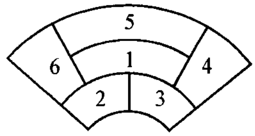

图 1-1

分析 根据6个不同部分的对称性，以先选定1号位的颜色为好. 考虑到4，6是否同色直接影响其他位置的颜色选取，故需分类讨论.

解 按同色、不同色进行分类：

(1) 4，6同色，1有4种颜色可选，5有3种颜色可选，4有2种颜色可选，2有2种颜色可选，3只有1种颜色可选，共有 $4\times3\times2\times2\times1=48$ 种.

(2) 4，6不同色，1有4种颜色可选，5有3种颜色可选，4有2种颜色可选，6有1种颜色可选，若2与4同色，则3有2种，若2与4不同色，则3有1种，共有 $4\times3\times2\times(2+1)=72$ 种.

故共有120种不同的栽种方法.

例5 （2006年全国高中数学联赛浙江省预赛题）在正2006边形中，与所有边均不平行的对角线的条数为 （　　）

A. 2006　　B. 1003^2　　C. 1003^2-1003　　D. 1003^2-1002

解 选C. 在正 $2n$ 边形 $A_1A_2\cdots A_{2n}$ 中，对角线共有 $\frac{1}{2}\times 2n\times(2n-3)=n(2n-3)$.

计算与一边 A_1A_2 平行的对角线条数，因 $A_1A_2 /\!/ A_{n+1}A_{n+2}$，与 A_1A_2 平行的对角线的端点只能取自 $2n-4$ 个点，平行线共 $n-2$ 条. 故与某一边平行的对角线共 $n(n-2)$ 条. 由此可得与任何边都不平行的对角线共有 $n(2n-3)-n(n-2)=n(n-1)$ 条.

例6 （第17届"希望杯"全国数学邀请赛题）球面上有10个圆，这10个圆可将球面至少分成________个区域，至多可分成________个区域.

解 当这10个圆两两不相交时，将球面分成的区域个数最少，为11个. 当这10个圆两两都相交且任三圆不共点时，将球面分成的区域个数最多. 每个圆被分成18段圆弧，将球面展开，看成平面图，其中顶点（交点）数为 $\frac{18\times10}{2}$，边（圆弧）数为 18×10. 由欧拉（Euler）公式，面数为 $18\times10+2-\frac{18\times10}{2}=92$ 个.

例7 （1993年全国高中数学联赛题）三位数（100，101，…，999）共900个，在卡片上打印这些三位数，每张卡片打印一个三位数. 有的卡片所印的，倒

过来看仍为三位数，如 198 倒过来看是 861（1 倒过来看仍视为 1）；有的卡片则不然，如 531 倒过来看则不是通常的数字，因此，有些卡片可以一卡二用. 于是至多可少打印________张卡片.

解 可一卡二用的卡片只能由数字 0，1，6，8，9 组成，且百位数字与个位数字不能取 0，这样的三位数有 $5\times4^2=80$ 个. 但其中包含了倒视后与原数相同的三位数，这种三位数的十位数字是 0，1 或 8；而百位和个位则可为（1，1），（8，8），（6，9）或（9，6），共有 $3\times4=12$ 个. 所以可少打印的卡片张数至多为 $\frac{1}{2}(80-12)=34$ 张.

例 8 （1997 年全国高中数学联赛题）如图 1－2，设 $ABCDEF$ 为六边形，一只青蛙开始在顶点 A 处，它每次可随意跳到相邻两顶点之一. 若在 5 次内跳到 D 点，则停止跳动；若 5 次内不能跳到 D 点，跳完 5 次也停止跳动. 问：这只青蛙从开始到停止，可能出现的不同跳法共有多少种？

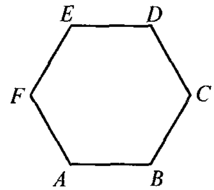

图 1－2

解 满足条件的青蛙的跳法只可能出现两种情况：

（1）跳 3 次到达 D 点，有 2 种跳法.

（2）跳 5 次停止（前 3 次不到 D 点）. 注意到前 3 次的 2^3 种跳法中，有 2 种到达 D 点，故前 3 次有 $2^3-2=6$ 种跳法，而后 2 次有 2^2 种跳法，因此有 $6\times2^2=24$ 种跳法.

由（1），（2）知，共有 $2+24=26$ 种跳法.

例 9 （1993 年全国高中数学联赛题）集合 A，B 的并集 $A\cup B=\{a_1,a_2,a_3\}$，当 $A\neq B$ 时，(A,B) 与 (B,A) 视为不同的对，则这样的对的个数有多少？

解 由于 $I=A\cup B=\{a_1,a_2,a_3\}$，于是元素 a_1，a_2，a_3 都将放入如图 1－3 所示的三个集合 $A\cap\overline{B}$，$A\cap B$，$\overline{A}\cap B$（本书中用 $\overline{A}$ 表示集合 A 的补集）内，而不同的 (A,B) 对就由不同的放入方法所确定. 因每个元素的放入方法都有 3 种可能，故由分步计数原理，总的放入方法有 $3^3=27$ 种.

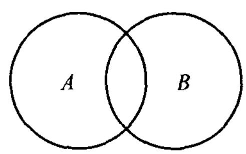

图 1－3

评注 这里巧妙地设计了三个集合，从而将问题化归为不同球（元素）放入不同盒（集合）这一熟悉的模型.

例 10 （第 11 届美国数学邀请赛题）若 $0<a<b<c<d<500$，问有多少

个有序的四元数组(a,b,c,d)满足$a+d=b+c$及$bc-ad=93$?

解 因为$a+d=b+c$,所以可设$(a,b,c,d)=(a,a+x,a+y,a+x+y)$,其中$x,y$为整数,且$0<x<y$.

因$93=bc-ad=(a+x)(a+y)-a(a+x+y)=xy$.

所以$(x,y)=(1,93)$或$(x,y)=(3,31)$.

第一种情况

$(a,b,c,d)=(a,a+1,a+93,a+94)$,其中$a=1,2,\cdots,405$.

第二种情况

$(a,b,c,d)=(a,a+3,a+31,a+34)$,其中$a=1,2,\cdots,465$.

显然这两组数组中无重复,所以,满足条件的四元整数组共有$405+465=870$个.

分类计数原理与分步计数原理练习

1 已知集合$A=\{-1,0,1\}$,$B=\{2,3,4,5\}$,映射$f:A\to B$,当$x\in A$时,$x+f(x)+xf(x)$为奇数,则这样的映射f的个数是 ( )

A. 20 B. 18 C. 32 D. 24

2 同室4人各写一张贺年卡,先集中起来,然后每人从中拿一张别人写的贺年卡,则四张贺年卡不同的分配方式有 ( )

A. 6种 B. 9种 C. 11种 D. 64种

3 (1998年全国高中数学联赛题)在正方体的8个顶点,12条棱的中点,6个面的中心及正方体的中心共27个点中,共线的三点组的个数是 ( )

A. 57 B. 49 C. 43 D. 37

4 含有数字6又能被3整除的不大于70000的五位数的个数是 ( )

A. 9065 B. 9066 C. 3248 D. 11600

5 (2005年全国高中数学联赛江苏省初赛题)一条走廊宽2m,长8m.用6种颜色的1m×1m的整块地砖铺设(每块地砖都是单色的,每种颜色的地砖都足够多),要求相邻的两块地砖颜色不同.那么,所有的不同拼色方案种数为 ( )

A. 30^8 B. 30×25^7 C. 30×20^7 D. 30×21^7

6 如果三位数 abc 满足 $b>a,b>c$，这个三位数就称为“凸数”，如 193，580 都是凸数，则所有三位数中有________个凸数.

7 圆周上有 $2n$ 个等分点（$n>1$），以其中三个点为顶点的直角三角形的个数为________.

8 有壹角硬币 3 枚，贰元币 6 张，佰元币 4 张，共可组成________种不同的币值.

9 已知 $A=\{a,b,c\}$，$B=\{-1,0,1\}$，映射 $f: A\to B$ 满足 $f(a)-f(b)=f(c)$，则映射 $f: A\to B$ 的个数为________.

10 12600 的正约数有________个，其中正奇约数有________个.

11 （1999 年全国高中数学联赛题）已知直线 $ax+by+c=0$ 中的 a,b,c 是取自集合 $\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$ 中的 3 个不同的元素，并且该直线的倾斜角为锐角. 那么，这样的直线条数是________.

12 （2005 年江西省高中数学联合竞赛题）用标有 1g，2g，3g，15g，40g 的砝码各一个，在某架无刻度的天平上称量重物. 如果天平两端均可放置砝码，那么，该天平所能称出的不同克数（正整数的重物）至多有________种.

13 三边长均为整数且最大边长为 n 的三角形有多少个？

14 求由抛物线 $x^2=2y$，x 轴及直线 $x=21$ 所围成的平面区域（边界除外）中的格点（纵横坐标都是整数的点）的个数.

15 （1995 年全国高中数学联赛题）将一个四棱锥的每个顶点染上一种颜色，并使同一条棱的两端点异色. 如果只有 5 种颜色可供使用，那么不同的染色方法的总数是多少？

16 (2001 年上海市高中数学竞赛题)满足 $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ 的 k 个集合有序组 $(A_1, A_2, \cdots, A_k)$ 有多少组？

注：本题是例 6 的推广.

1.2 排 列

知识要点

1. 排列

从 n 个不同元素中不重复地取出 $m(m \leqslant n)$ 个元素，按照一定的顺序排成一列，叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个排列，简称 m 排列. 所有这样的排列的个数叫做排列数，记为 A_n^m 或 P_n^m. 特别地，当 $m=n$ 时，叫做 n 个不同元素的全排列.

2. 排列数公式

排列数公式 $A_n^m = n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1) = \dfrac{n!}{(n-m)!}$.

这里 $m \leqslant n, m, n \in \mathbf{N}^*$ 并约定 $0! = 1$.

全排列数公式 $A_n^n = n \cdot (n-1) \cdot \cdots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$

3. 解决排列问题的一些基本思想方法

(1) 如直接法较繁或很难处理时，可考虑用间接法.

(2) 对有条件限制的排列问题，往往先考虑特殊元素和特殊位置(指受条件限制的元素和位置)，再考虑一般元素和一般位置.

(3) 同一个问题，有时从元素出发比较方便，有时从位置出发比较方便，需根据问题的特点进行分析.

(4) 对不相邻问题应采用插空法，对相邻问题则采用捆绑法.

(5) 对复杂问题常可通过减少元素个数、等价转化等手段将问题直观化、简单化，或借助于熟悉的模型解决.

例题讲解

例1 8个人坐成一排,满足下列条件的不同排法各有多少种?

(1) 甲、乙、丙3人必须坐在一起;

(2) 甲、乙、丙3人都两两不相邻;

(3) 甲、乙、丙3人自左向右顺序不变.

解 (1) 用"捆绑法",将甲、乙、丙3人视为一整体,作为一元素与其余5人进行全排列,但在甲、乙、丙之间也需进行全排列. 故共有排法种数为: $A_3^3A_6^6=4320$种.

(2) 用"插空法",先排其余5人,在这5人之间有4个空,再加上两端,共有6个空,将甲、乙、丙3人插入其中的3个空,所以排法数为: $A_5^5A_6^3=14400$种.

(3) 考虑分两步完成这8个人的排列. 第一步,让甲、乙、丙3人自左向右顺序不变进行排列,设其排列数为x;第二步,再对甲、乙、丙进行排列,有A_3^3种排法. 因此,有$A_8^8=x\cdot A_3^3$,故$x=\dfrac{A_8^8}{A_3^3}=6720$种.

另解 只要在8个位置中选5个排好其余5人,则甲、乙、丙按顺序排在另3个位置,只有1种排法. 故排法数为: $A_8^5=6720$.

例2 用0,1,2,3,4,5,6七个数字组成无重复数字的四位数.

(1) 有多少个四位偶数?

(2) 若将这些偶数从小到大排列,3410是第几个数?

分析 个位只能是0,2,4,6之一,但因0不能排在千位,故可按个位是否为0进行分类讨论. 确定3410是第几个四位偶数,可先排千位再排个位和其余位置.

解 (1) 按个位数情况分类: ① 个位为0时,有A_6^3个; ② 个位为2,4,6时,先排个位,接着排千位,再排百位与十位,有$A_3^1A_5^1A_5^2$个. 故共有$A_6^3+A_3^1A_5^1A_5^2=420$个.

(2) 按千位进行分类: ① 千位为1时,先排个位,再排中间两位,有$A_4^1A_5^2$个; ② 千位为2时,有$A_3^1A_5^2$个; ③ 千位为3时,百位为0或2的有$A_2^1A_3^1A_4^1$个,百位为1的有$A_4^1A_4^1$个,百位为4的有3个. 总共有$A_4^1A_5^2+A_3^1A_5^2+A_2^1A_3^1A_4^1+A_4^1A_4^1+3=183$个. 即若将这些偶数从小到大排列,则3410是第

183 个数.

例3 有标号为 1,2,3,4,5 的五个红球和标号为 1,2 的两个白球,将这七个球排成一排,使两端都是红球.

(1) 如果白球的两旁都是红球,那么共有多少种排法?

(2) 在满足(1)的排列中,如果 1 号白球与 1 号红球相邻而排,那么共有多少种排法?

解 (1) 插空法. 先排五个红球,排法种数有 A_5^5 个,五个红球之间有四个"空档",选出两个"空档"插入两个白球,有 A_4^2 种方法,所以排法数有 $A_5^5A_4^2=1440$ 种.

(2) 位置分析法. 五个红球位置中有四个"空档",选一个空档先排 1 号白球,这时 1 号红球有两种排法,其余红球排在余下四个红球位置,另一个白球在三个空档中选一个排入,故排法数有 $A_4^1A_2^1A_4^4A_3^1=576$ 种.

评注 位置分析法就是从位置出发考虑问题. 一般是着眼于位置还是着眼于元素,或者两者兼顾,需视问题具体情况而定.

例4 (2001 年全国高中数学联赛题)在一个正六边形的六个区域栽种观赏植物,如图 1-4,要求同一块中种同一种植物,相邻的两块种不同的植物. 现有 4 种不同的植物可供选择,则有多少种栽种方案?

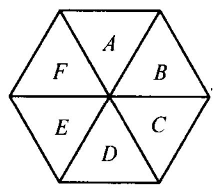

图 1-4

解 (1) 考虑 A,C,E 种同一种植物,此时共有 $4\times3\times3\times3=108$ 种方法.

(2) 考虑 A,C,E 种两种植物,此时共有 $3\times4\times3\times3\times2\times2=432$ 种方法.

(3) 考虑 A,C,E 种三种植物,此时共有 $A_4^3\times2\times2\times2=192$ 种方法.

故总共有 $108+432+192=732$ 种方法.

例5 从 0,1,2,3,4 五个数字中,取出 3 个组成三位数,求所有这些三位数之和及所有这些三位数的各位数字的总和.

解 如果把 0 看成和其他数字一样,则应有 A_5^3 个三位数. 这些三位数中 0,1,2,3,4 出现的次数一样多,均为 $3A_4^2$ 次. 并且每个数字在不同数位上出现的次数也一样多,均为 A_4^2. 所以,它们的数字和为 $(0+1+2+3+4)\times3A_4^2=360$,而这些三位数之和则为 $(0+1+2+3+4)\times A_4^2\times(1+10+100)=13320$.

但是，0 毕竟不能作首位. 因此，要扣除那些 0 作首位的三位数相应的和. 这相当于从 1，2，3，4 中任选两个数字组成的所有两位数的数字之和与这些两位数之和. 它们分别为 $(1+2+3+4)\times 2A_3^1=60$，$(1+2+3+4)\times A_3^1\times(1+10)=330$.

因此，所求的三位数之和为 $13320-330=12990$. 数字之和为 $360-60=300$.

评注 选定一个元素，考虑其他元素或集合与此元素的配对种数，是组合数学中常用的一种方法.

例 6 （1994 年日本数学奥林匹克预赛题）集合 $A=\{0,1,2,3,4,5,6,7\}$，满足下列条件(1)，(2)的 A 到 A 上的映射 f 有多少个？

(1) $i,j\in A, i\neq j$，则 $f(i)\neq f(j)$；

(2) $i,j\in A, i+j=7$，则 $f(i)+f(j)=7$.

解 记 $A_0=\{0,7\}$，$A_1=\{1,6\}$，$A_2=\{2,5\}$，$A_3=\{3,4\}$. 由条件(2)可知 A_i 中两个元素的象必在同一个 A_j 中. 由(1)，不同的 A_i，相应的 A_j 不同. 于是 i 与 $j\,(1\leqslant i,j\leqslant 4)$ 的有序对有 4! 种配法，而各个 A_j 中的元素作为象可以互换，因而有 2^4 种. 故要求的映射共有 $4!\cdot 2^4=384$ 种.

例 7 （2000 年上海市高中数学竞赛题）1，2，3，4，5 的排列 a_1,a_2,a_3,a_4,a_5 具有性质：对于 $1\leqslant i\leqslant 4$，$a_1,a_2,\cdots,a_i$ 不构成 $1,2,\cdots,i$ 的某个排列. 求这种排列的个数.

分析 考虑到 $a_1\neq 1$，故可按 a_1 的取值进行分类讨论.

解 (1) 当 $a_1=5$ 时，所有的 4!个排列 $5a_2a_3a_4a_5$ 都符合要求.

(2) 当 $a_1=4$ 时，共有 4!个排列，其中形如 $4\times\times\times 5$ 的 3!个排列不符合要求，故符合要求的排列有 $4!-3!$个.

(3) 当 $a_1=3$ 时，共有 4!个排列，其中形如 $3\times\times\times 5$ 与 $3\times\times 54$ 的排列均不符合要求，故符合要求的排列有 $4!-3!-2!$个.

(4) 当 $a_1=2$ 时，共有 4!个排列，其中形如 $2\times\times\times 5$，$2\times\times 54$，2×534，2×453，2×543 的排列均不符合要求，故符合要求的排列有 $4!-3!-2!-3$ 个.

综上所述，所求的排列个数为 $4!+(4!-3!)+(4!-3!-2!)+(4!-3!-2!-3)=71$.

例 8 （2004 年上海市高中数学竞赛题）在各位数码各不相同的 10 位数中，是 11111 的倍数的有多少个？证明你的结论.