俄罗斯数学
教材选译

奇异摄动方程解的渐近展开

□ А.Б. 瓦西里耶娃　В.Ф. 布图索夫　著

□ 倪明康　林武忠　译

高等教育出版社
Higher Education Press

俄罗斯数学
教材选译

● 数学天元基金资助项目

奇异摄动方程解的渐近展开

□ А.Б.瓦西里耶娃　В.Ф.布图索夫　著
□ 倪明康　林武忠　译

高等教育出版社
Higher Education Press

图字：01-2007-0373 号

Васильева А. Б., Бутузов В. Ф.

Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений, 1990

Originally published in Russian in the title

Asymptotic Methods in Singular-Perturbation Theory

by A. B. Vasil'eva and V. F. Butuzov

图书在版编目(CIP)数据

奇异摄动方程解的渐近展开/(俄罗斯)瓦西里耶娃，(俄罗斯)布图索夫著；倪明康，林武忠译．—北京：高等教育出版社，2008.1

ISBN 978-7-04-023063-5

Ⅰ.奇…　Ⅱ.①瓦…②布…③倪…④林…　Ⅲ.奇异积分方程-高等学校-教材　Ⅳ.O175.5

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 191595 号

策划编辑　赵天夫　责任编辑　赵天夫　封面设计　王凌波　责任印制　陈伟光

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	北京印刷一厂	畅想教育	http://www.widedu.com
开　　本	787×1092　1/16	版　　次	2008 年 1 月第 1 版
印　　张	13.25	印　　次	2008 年 1 月第 1 次印刷
字　　数	280 000	定　　价	34.00 元

物料号　23063-00

《俄罗斯数学教材选译》序

从上世纪 50 年代初起, 在当时全面学习苏联的大背景下, 国内的高等学校大量采用了翻译过来的苏联数学教材. 这些教材体系严密, 论证严谨, 有效地帮助了青年学子打好扎实的数学基础, 培养了一大批优秀的数学人才. 到了 60 年代, 国内开始编纂出版的大学数学教材逐步代替了原先采用的苏联教材, 但还在很大程度上保留着苏联教材的影响, 同时, 一些苏联教材仍被广大教师和学生作为主要参考书或课外读物继续发挥着作用. 客观地说, 从解放初一直到文化大革命前夕, 苏联数学教材在培养我国高级专门人才中发挥了重要的作用, 起了不可忽略的影响, 是功不可没的.

改革开放以来, 通过接触并引进在体系及风格上各有特色的欧美数学教材, 大家眼界为之一新, 并得到了很大的启发和教益. 但在很长一段时间中, 尽管苏联的数学教学也在进行积极的探索与改革, 引进却基本中断, 更没有及时地进行跟踪, 能看懂俄文数学教材原著的人也越来越少, 事实上已造成了很大的隔膜, 不能不说是一个很大的缺憾.

事情终于出现了一个转折的契机. 今年初, 在由中国数学会、中国工业与应用数学学会及国家自然科学基金委员会数学天元基金联合组织的迎春茶话会上, 有数学家提出, 莫斯科大学为庆祝成立 250 周年计划推出一批优秀教材, 建议将其中的一些数学教材组织翻译出版. 这一建议在会上得到广泛支持, 并得到高等教育出版社的高度重视. 会后高等教育出版社和数学天元基金一起邀请熟悉俄罗斯数学教材情况的专家座谈讨论, 大家一致认为: 在当前着力引进俄罗斯的数学教材, 有助于扩大视野, 开拓思路, 对提高数学教学质量、促进数学教材改革均十分必要. 《俄罗斯数学教材选译》系列正是在这样的情况下, 经数学天元基金资助, 由高等教育出版社组织出版的.

经过认真选题并精心翻译校订，本系列中所列入的教材，以莫斯科大学的教材为主，也包括俄罗斯其他一些著名大学的教材. 有大学基础课程的教材，也有适合大学高年级学生及研究生使用的教学用书. 有些教材虽曾翻译出版，但经多次修订重版，面目已有较大变化，至今仍广泛采用、深受欢迎，反射出俄罗斯在出版经典教材方面所作的不懈努力，对我们也是一个有益的借鉴. 这一教材系列的出版，将中俄数学教学之间中断多年的链条重新连接起来，对推动我国数学课程设置和教学内容的改革，对提高数学素养、培养更多优秀的数学人才，可望发挥积极的作用，并起着深远的影响，无疑值得庆贺，特为之序.

李大潜

2005 年 10 月

作者的中译本序

本书俄文版出版于三十年前, 此后奇异摄动理论中出现的新结果由作者介绍在后来的其他书中. 但是该书的重要特点是证明的推导十分详细. 对于希望进入奇异摄动领域和已经在该领域工作的人们来说, 这是一本不可多得的好教材. 在后面我们再出版的几本著作中, 由于新内容的出现而涉及面较广, 只能做综述性的介绍.

该书翻译工作的组织者是倪明康教授, 他在年青时代就对奇异摄动理论产生了浓厚的兴趣, 并在很大程度上掌握了俄语, 以后又在俄罗斯工作了近十年, 完成了博士论文的答辩, 并在多所大学任教, 因此他无论是在数学的研究方面还是在用俄语在数学的教学上都达到了很高的水平. 本书的译者林武忠教授具有相当好的俄语翻译能力和较高的奇异摄动理论知识造诣.

所以我们深信本书的翻译是准确和规范的. 勿庸置疑, 该中译本的出版对从事渐近方法, 特别是奇异摄动理论的中国年青学者会有很大的帮助, 因为目前该领域无论是在理论层面还是在各种实际问题的应用层面都在迅猛发展.

作者衷心地感谢倪明康教授和林武忠教授翻译本书.

A Б 瓦西里耶娃, B. Ф. 布图索夫

前 言

在近二十五年来, 许多从事微分方程渐近方法的同行越来越关注于最高阶导数前含有小参数的微分方程, 这种兴趣来自于自动控制理论、非线性振动理论、量子力学、气体动力学和一般动力学等学科迅猛发展的实际需要, 在这些领域中遇到了类型相似的微分方程.

构造这类方程解的渐近展开式是很困难的, 而运用通常 "经典" 方式对与其有关的小参数进行幂级数展开也是不可能的; 这是因为如果这时令小参数为零的话, 方程的阶数就会降低, 因此所得退化问题的解一般不满足所有的定解条件. 正因如此, 这类摄动就称为奇异摄动问题.

近年来有关奇异摄动问题的研究十分广泛, 也提出了解决这些问题各种各样的方法, 但是直到最近都没有一本完全致力于阐述这类问题的专著. 有关奇异摄动理论的材料基本上都包含在论文中. 这时必然缺少统一的方式和过于简单的陈述, 这就给无论是希望了解这方面问题的数学工作者, 还是从事于实际问题的人们都造成很大的困难. 即使阅读一系列综合评述报告, 例如 [16, 10], 甚至如瓦佐夫 (B. Вазов) 的译著 [12] 中的第十章也无法弥补这个空白点.

正像说过那样, 关于奇异摄动理论的材料, 按其问题的特点和方法, 是各种各样的; 要把这些都写入一本篇幅不是很大的书中是不可能的. 所以, 我们在这本专著中给自己提出的目标是在一定程度上只详细介绍奇异摄动理论中的一种对非线性方程组已仔细研究过的方法, 即所谓的边界层函数法, 以及关于用这个方法最适合解决的那些问题, 其中除了微分方程问题之外, 还有关于积分–微分方程和含小滞量的微分–差分方程问题.

本书的内容是以作者及其学生们和同事们的研究工作为基础写成的. 首先是从

全面提出奇异摄动问题和从介绍奇异摄动理论最基本的定理之一, 即吉洪诺夫 (A. H. Тихнов) 极限定理, 进行讲述. 其后顺序研究了常微分方程初值问题的渐近解、边值问题、积分-微分方程、以及最后微分-差分方程解的存在性和渐近解的问题.

我们注意到, 所有这些问题不仅都用统一的算法构造渐近解, 而且用统一方法证明基本定理. 为了避免重复, 在许多情况下省略了证明的细节, 并建议读者作为练习, 进行仔细证明. 为了更好的掌握本书内容, 在练习中对若干具体例子进行了详细的分析.

我们还要指出的是, 书中 §14 关于条件稳定情况的基本定理是最新结果, 至今尚未发表.

书中材料的叙述通俗易懂, 本书也完全适合于工程师和其他从事实际问题的人们.

作者

目　录

第一章　基本概念

§1. 解对参数的渐近近似概念

在微分方程研究的历史初始阶段, 其基本目的就是求得方程的精确解; 但是后来才知道, 只有对极特殊的一些微分方程类型, 才有可能利用初等函数来有效表示它的精确解. 所以人们更急于找出构造微分方程近似解方法的问题. 这个问题已经从两个方面深入地进行了研究: 发展解的数值方法和发展解的渐近方法.

本专著中所研究的是关于含有小参数 μ 的微分方程的某些渐近方法; 这样的方程可以写成

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t, \mu). \tag{1.1}$$

假设方程 (1.1) 的解 $x(t,\mu)$ 是由某些定解条件所确定的. *所谓解 $x(t,\mu)$ 对参数 μ 的渐近近似 (或者渐近表示, 或者渐近公式) 我们认为是这样的函数 $X(t,\mu)$, 使得只要参数 μ 充分小, 而自变量 t 在给定区间中变化时, 这个渐近近似的余项, 即差 $x(t,\mu)-X(t,\mu)$, (在某种范数之下) 也很小. 我们还称 $x(t,\mu)-X(t,\mu)$ 当 μ 很小时的量阶阶数为渐近近似的精确度.*

所谓**渐近方法**, 我们通常是理解为**构造 $X(t,\mu)$ 的这样或那样的方法** (例如取关于 μ 的幂级数部分和的形式); 根据这些方法, 采用比 (1.1) 更为简单的方程来求得 $X(t,\mu)$; 而渐近方法的实际价值也正是与从这些更简单方程是否可能有效地确定 $X(t,\mu)$ 密切相关的.

不应当认为由于计算机的发展, 渐近方法的作用就变得不重要了; 实际上, 数值计算与渐近方法不是相互排斥, 而是相互补充的. 例如在许多情况下, 渐近近似的表达式就可以很方便地用来作为数值计算的零次近似. 然而从我们的观点来看, 数值

计算与渐近方法最密切的联系还表现在: 适合于该种渐近方法的那些方程渐近性质的研究正是任何一种数值方法理论中的主要方面之一. 例如, 微分方程数值解的差分格式 (见 [4]) 就含有某个小参数 h (步长), 而当采用这样的格式时, 就必须肯定用这种格式所得到的差分方程组的解, 当 h 充分小时确实接近于原来微分方程的解. 完全一样地, 当对不适定问题进行正则化时 (见 [55]), 也得到含有一个正则化小参数 α 的辅助方程, 而且问题也在于建立这个辅助方程的解与原来问题的解之间 (在某种确定意义下) 的近似性.

§2. 奇异摄动概念

我们考虑常微分方程组 (1.1). 假设 $f(x,t,\mu)$ 对其全体变量连续, 且当 x,t,μ 在某个区域中变化时对 x 满足李普希茨条件. 我们用某些定解条件, 例如初始条件

$$x(t_0,\mu)=x^0 \tag{1.2}$$

来确定方程组 (1.1) 的解 $x(t,\mu)$.

我们可以用下面的办法来求出 $x(t,\mu)$ 最简单的渐近表达式: 首先在前面的 (1.1) 式中令 $\mu=0$; 一般说来, 这时可以得到更简单的方程组

$$\frac{d\overline{x}}{dt}=f(\overline{x},t,0). \tag{1.3}$$

其次用与 (1.2) 相同的初始条件, 即 $\overline{x}(t_0)=x^0$, 来确定这个方程的解 $\overline{x}(t)$. 我们自然希望, 如果 μ 充分小, 则 $\overline{x}(t)$ 会是 $x(t,\mu)$ 在上节中所指出的那种意义下的渐近近似. 深入地研究说明确实如此, 即当 $\mu\to 0$ 时, 差 $x(t,\mu)-\overline{x}(t)$ 是无穷小量, 而且这个差对 t 在区间 $[t_0,T]$ 上一致地趋于零. 这个结果在今天认为是古典的, 已包含在微分方程的教科书中. 我们将在第二章仔细地叙述这个结果.

现在考虑方程组

$$\mu\frac{dz}{dt}=F(z,y,t),\quad \frac{dy}{dt}=f(z,y,t). \tag{1.4}$$

如果将这个方程组重新写成 (1.1) 的形式, 那么显然加在 (1.1) 右端的连续性条件已经不再满足了, 因为这时 μ 是在分母, 从而当 $\mu\to 0$ 时产生了奇异性.

然而我们还是想尝试一下在研究 (1.1) 时那样的方法来研究 (1.4), 即令 $\mu=0$ 来构造方程组 (1.4) 在满足某些定解条件之下的解的渐近近似. 这时不同于方程组 (1.3), 我们得到了方程组

$$0=F(\overline{z},\overline{y},t),\quad \frac{d\overline{y}}{dt}=f(\overline{z},\overline{y},t). \tag{1.5}$$

由于 (1.3) 的阶数与 (1.1) 是一样的, 因此 (1.3) 的解 $\overline{x}(t)$ 可以满足对 (1.1) 提出的定解条件 (1.2). 但是方程组 (1.5) 的解一般说来已经不可能再满足为了决定方程组

(1.4) 的解而提出的所有那些定解条件了, 因为方程组 (1.5) 的阶数低于 (1.4) 的阶数. 因此, 在给出 (1.4) 定解条件的点处, (1.5) 的解与 (1.4) 的解可能很不相同.

类似的现象我们不仅在研究微分方程组 (1.4) 的时候遇到, 而且在研究所谓的*具有小滞量的微分–差分方程*时也遇到. 这种方程的最简单例子是差分方程

$$z(t) = F(z(t-\mu), t); \tag{1.6}$$

这里的自变量 t 可以是连续变化, 也可以是离散的. 为了确定起见, 我们假设 t 取一系列的*离散值*: $0, \mu, 2\mu, \cdots$. 于是在 $t = 0$ 处给定初始条件

$$z(0) = z^0 \tag{1.7}$$

之后, 我们从 (1.6) 可以顺序地求出 $z(k\mu)$ 的值, $k = 1, 2, \cdots$, 亦即

$$z(\mu) = F(z^0, \mu), \quad z(2\mu) = F(z(\mu), 2\mu), \quad \cdots. \tag{1.8}$$

如果在 (1.6) 中令 $\mu = 0$, 则可得函数方程

$$\overline{z}(t) = F(\overline{z}(t), t); \tag{1.9}$$

由此 (在满足一定条件之下) 可以求出 t 的隐函数 $\overline{z}(t)$. 一般来说这个函数已不再满足条件 (1.7) 了. 因此, 如果提出 (1.9) 的解可以作为问题 (1.6), (1.7) 的近似解、并得出某种结论的话, 那么也可以对 (1.4) 和 (1.5) 提出同样的问题和得出类似的结论.

值得注意的是这两种情况不同于 (1.1) 与 (1.3) 之间关系的原因都是一样的, 即当 $\mu = 0$ 时改变了方程的类型, 或者说方程在如下的意义下是*退化*了, 即为了决定当 $\mu = 0$ 时方程的解所用的定解条件数目, 比为了决定原来方程的解所用的定解条件数目少 (特别对 (1.9) 来说, 根本不需要任何定解条件, 因为它是一个有限方程) . 由于这个原因, 许多作者都把方程组 (1.5) 和 (1.9) 称为*退化方程组*, 我们也将采用这种叫法.

人们通常把系统 (1.1) 称为系统 (1.3) 的*摄动系统*, 而且将一个不为零的小参数 μ 引入到系统中来的过程也叫做*摄动*. 这个术语也可以用于系统 (1.4), (1.5) 和系统 (1.6), (1.9), 不过在系统 (1.1), (1.3) 的情形下我们称它为*正则摄动*, 而对于系统 (1.4), (1.5) 和系统 (1.6), (1.9) 的情况将称为*奇异摄动*①. 换句话说, *将非摄动系统与含有不为零小参数的摄动系统进行比较, 如果发现为了决定摄动系统的解所需要的定解条件数目, 比为了决定非摄动系统的解所需要的定解条件数目来得多, 那么我们就称这样的摄动为奇异摄动.*

①或简称为**奇摄动** —— 译者注.

§3. 奇异摄动方程组解的渐近表示特点和边界层

为了确定起见, 在这一节我们就奇摄动系统 (1.4) 进行讨论.

尽管有上面指出的困难, 我们还是想利用 (1.5) 的解来求出 (1.4) 满足某些定解条件 (其究竟如何暂不具体化) 的解的渐近近似. 这时遇到如下两个需要立即解决的问题:

1. 当构造 (1.5) 的解时, 首先必须从 (1.5) 的第一个方程求出 z; 可是这个方程一般来说是非线性的, 因此它可能有几个形如 $z=\varphi(y,t)$ 的解, 我们应当从中选取哪一个解呢?

2. 如果采取某种方法对上述的解作出了选择 (例如在线性系统情况下, 一般只有一种可能性), 那么就可以将选到的 $z=\varphi(y,t)$ 代入 (1.5) 的第二个方程. 这时为了唯一确定所得到方程的解, 就必须对 y 给出定解条件. 但在上面说过, 加在 (1.4) 上的所有定解条件在此已经不能全部满足, 因此这就要问: 为了确定 (1.5) 的解, 应该保留加在 (1.4) 上的哪些定解条件和如何选取呢?

我们注意到无论上述哪一个问题, 对正则摄动系统 (1.1) 来说都不会发生.

我们现在转到奇摄动问题的其他特点. 为了能够更清楚地进行说明, 我们考虑一个不需要解决上面提出的那两个问题的例子, 即考虑一个最简单的线性方程式的初值问题

$$\mu\frac{dz}{dt}=az+b,\quad z(t_0,\mu)=z^0, \tag{1.10}$$

其中 a 和 b 是常数. 由于 (1.10) 式中的方程是线性方程, 因此第一个问题在此不存在. 而且这时 (1.5) 式只有第一个 (函数) 方程, 所以第二个问题也不存在. 现在的退化方程为

$$0=a\overline{z}+b; \tag{1.11}$$

由此即得

$$\overline{z}=-\frac{b}{a}. \tag{1.12}$$

直接积分 (1.10) 可得

$$z(t,\mu)=\left(z^0+\frac{b}{a}\right)\exp\left[\frac{a(t-t_0)}{\mu}\right]-\frac{b}{a}. \tag{1.13}$$

由此可见, 只有在满足某些特殊要求之下, $\overline{z}=-b/a$ 才会是 $z(t,\mu)$ 的渐近近似. 亦即为了使得 $\overline{z}$ 是 $z(t,\mu)$ 在 t_0 右边的渐近近似, 必须有 $a<0$ 且 $\mu\to0^+$ (见图 1), 或者 $a>0$ 且 $\mu\to0^-$. 对于这两种情形之一, 当 $t>t_0$, 且 $\mu\to0$ 时都有 $z(t,\mu)-\overline{z}\to0$. 而在点 t_0 处, 像在 §2 指出那样, 这是不成立的. 如果 $a>0$ 且 $\mu\to0^+$ 或者 $a<0$ 且 $\mu\to0^-$, 则 $\overline{z}$ 便是 $z(t,\mu)$ 在 t_0 左端的渐近近似, 但这时与在 t_0 右端的 $z(t,\mu)$ 没有任何关系, 因为这时对 $t>t_0$ 且当 $\mu\to0$ 时有 $z(t,\mu)\to\infty$. 如果 μ 按任何方式趋于 0, 则 $z(t,\mu)$ 既不趋于 $\overline{z}$ 也不趋于任何其他极限.

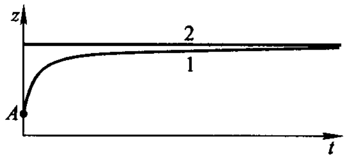

图 1　A 是坐标为 $(t = t_0, z = z^0)$ 的初始点. 1 是对于 $a < 0, \mu > 0$ 情况时, 方程 (1.10) 解 $z = z(t, \mu)$ 的图形. 2 是退化方程解的图形 —— 直线 $z = \overline{z} = -b/a$.

上述这些情况对于正则摄动系统 (1.1) 来说并不会出现, 因为当 μ 随意趋于 0 时, 问题 (1.3), (1.2) 的解就是问题 (1.1), (1.2) 解的渐近近似, 并不要求对函数 $f(x, t, \mu)$ 加上任何 (类似于在 (1.10) 中对 a 的符号) 的特殊要求, 而只需要求 $f(x, t, \mu)$ 满足某些像在 §2 开头时指出的光滑性条件就够了.

总之, 例 (1.10) 说明: 非摄动系统 (1.5) 的解只有在满足某些特定要求之下才可能是 (1.4) 的渐近近似, 对于特殊的系统 (1.10) 来说, 这些要求就是 a 的定号性和 μ 趋于 0 的单边性.

今后我们总认为在系统 (1.4) 中的 $\mu \to 0^+$, 而且只有这样的极限过程才成立, 因此将略去 0^+ 右上角的 "+" 号而简单写成 $\mu \to 0$.

正如上面已经指出那样, 对系统 (1.4) 右端的特定要求, 实质上是依赖于确定系统 (1.4) 解的那些定解条件的特性, 这种依赖性在本书的下一章将进一步加以阐明.

刚才我们只在某种程度上研究了这种依赖性的特点, 而且还是对一个十分简单的线性例子进行讨论; 下面我们考虑一个由两个常系数一阶方程组成的系统

$$\mu\frac{dz_1}{dt} = a_{11}z_1 + a_{12}z_2 + b_1, \quad \mu\frac{dz_2}{dt} = a_{21}z_1 + a_{22}z_2 + b_2; \tag{1.14}$$

其初始条件 (为了简单起见, 令 $t_0 = 0$) 是

$$z_1(0, \mu) = z_1^0, \quad z_2(0, \mu) = z_2^0. \tag{1.15}$$

系统 (1.14) 的通解为

$$\begin{cases} z_1(t, \mu) = c_1\alpha_{11}\exp\left(\dfrac{\lambda_1 t}{\mu}\right) + c_2\alpha_{12}\exp\left(\dfrac{\lambda_2 t}{\mu}\right) + \overline{z}_1, \\ z_2(t, \mu) = c_1\alpha_{21}\exp\left(\dfrac{\lambda_1 t}{\mu}\right) + c_2\alpha_{22}\exp\left(\dfrac{\lambda_2 t}{\mu}\right) + \overline{z}_2; \end{cases} \tag{1.16}$$

其中 λ_1, λ_2 为系统 (1.14) 的特征方程 $\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0$ 的根, 且为了简单起见假设它们是单根; α_{ik} 是一些不依赖于 μ 的确定常数, 这是因为 μ 只可能以组合形式 t/μ 出现; $\overline{z}_1, \overline{z}_2$ 是 (1.14) 的特解, 我们把它们取成与 (1.14) 所对应的退化方程组 (1.5) 的解, 即一组二元线性方程组的解; c_1, c_2 为任意常数.

为了满足初始条件 (1.15), 常数 c_1, c_2 应由方程组

$$\begin{cases} c_1\alpha_{11} + c_2\alpha_{12} + \overline{z}_1 = z_1^0, \\ c_1\alpha_{21} + c_2\alpha_{22} + \overline{z}_2 = z_2^0 \end{cases}$$

来决定. 由此可见, c_1 和 c_2 并不依赖于 μ. 将求得的 c_1, c_2 代入 (1.16) 之后, 不难相信: 如果

$$\mathrm{Re}\lambda_1 < 0, \quad \mathrm{Re}\lambda_2 < 0, \tag{1.17}$$

则当 $t > 0$ 时, 问题 (1.14), (1.15) 的解当 $\mu \to 0$ 时, 确实趋于退化方程组的解. 关于特征方程的根应有**负实部**的条件 (1.17), 正是在简单例子 (1.10) 中对 a 符号所加条件的推广.

如果 $\mathrm{Re}\lambda_1 > 0$, $\mathrm{Re}\lambda_2 > 0$, 则问题 (1.14), (1.15) 的解将在 $t < 0$ 当 $\mu \to 0$ 时趋于退化方程组的解.

如果特征方程根的实部有不同符号

$$\mathrm{Re}\lambda_1 < 0, \quad \mathrm{Re}\lambda_2 > 0, \tag{1.18}$$

(值得注意的是在给定的二维情况下, 这与 $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 > 0$ 是一样的) 则初值问题的解无论在 $t = 0$ 的左边或在它的右边都不趋于退化方程的解 (当然应除去给定的 z_1^0 和 z_2^0 的值正好使得指数函数之一消失的特殊情形, 即 c_1 或 c_2 有一个为零的情形). 但这时如果给定的不是初始条件 (1.15), 而是用边界条件

$$z_1(0, \mu) = z_1^0, \quad z_2(1, \mu) = z_2^0 \tag{1.19}$$

来确定 (1.14) 的解, 则容易看出, 在区间 $0 < t < 1$ 上当 $\mu \to 0$ 时, 这个解将趋于退化方程组的解, 而且不需要对 z_1^0, z_2^0 作特别的选择. 实际上, 将 (1.16) 代入 (1.19) 即得

$$\begin{cases} z_1^0 = c_1\alpha_{11} + c_2\alpha_{12} + \overline{z}_1, \\ z_2^0 = c_1\alpha_{21}\exp\left(\dfrac{\lambda_1}{\mu}\right) + c_2\alpha_{22}\exp\left(\dfrac{\lambda_2}{\mu}\right) + \overline{z}_2. \end{cases}$$

由此推出

$$c_1 = \frac{\beta_1\alpha_{22}\exp\left(\dfrac{\lambda_2}{\mu}\right) - \beta_2\alpha_{12}}{\alpha_{11}\alpha_{22}\exp\left(\dfrac{\lambda_2}{\mu}\right) - \alpha_{12}\alpha_{21}\exp\left(\dfrac{\lambda_1}{\mu}\right)} = \frac{\beta_1}{\alpha_{11}}\Big(1 + O(\mu)\Big),$$

$$c_2 = \frac{\beta_2\alpha_{11} - \beta_1\alpha_{21}\exp\left(\dfrac{\lambda_1}{\mu}\right)}{\alpha_{11}\alpha_{22}\exp\left(\dfrac{\lambda_2}{\mu}\right) - \alpha_{12}\alpha_{21}\exp\left(\dfrac{\lambda_1}{\mu}\right)} = \frac{\beta_2}{\alpha_{22}}\exp\left(-\frac{\lambda_2}{\mu}\right)\Big(1 + O(\mu)\Big);$$

其中 $\beta_1 = z_1^0 - \overline{z}_1, \beta_2 = z_2^0 - \overline{z}_2$, 而 $O(\mu)$ 在这里以及今后都是表示其量阶不比 μ 低的小量. 因此问题 (1.14), (1.19) 的解成为

$$z_1(t,\mu) = \beta_1\Big(1+O(\mu)\Big)\exp\left(\frac{\lambda_1 t}{\mu}\right) + \beta_2\frac{\alpha_{12}}{\alpha_{22}}\Big(1+O(\mu)\Big)\exp\left(\frac{\lambda_2(t-1)}{\mu}\right) + \overline{z}_1,$$

$$z_2(t,\mu) = \beta_1\frac{\alpha_{21}}{\alpha_{11}}\Big(1+O(\mu)\Big)\exp\left(\frac{\lambda_1 t}{\mu}\right) + \beta_2\Big(1+O(\mu)\Big)\exp\left(\frac{\lambda_2(t-1)}{\mu}\right) + \overline{z}_2. \quad (1.20)$$

于是对 $0 < t < 1$, 当 $\mu \to 0$ 时, $z_1(t,\mu)$ 和 $z_2(t,\mu)$ 就趋于退化方程组的解 $\overline{z}_1$ 和 $\overline{z}_2$.

总之, 为了保证系统 (1.14) 的解趋向于其退化方程组的解, 其**条件**是与确定系统(1.14) 解的**定解条件形式**密切相关的.

此外, 上面所考虑的例子还给出了进一步研究系统 (1.14) 的解在这样一些点邻域中性质的可能性, 在这些点处, 加在系统 (1.14) 上的定解条件当方程组退化时被丢弃了.

我们现在转到对初值问题 (1.14), (1.15) 的解 (1.16) 进行讨论; 假设它满足条件 (1.17). 于是令 $\mu \to 0$ 取极限即得

$$\lim_{\mu\to 0} z_1(t,\mu) = \overline{z}_1, \quad \lim_{\mu\to 0} z_2(t,\mu) = \overline{z}_2;$$

如上所述, 这对于 $t > 0$ 是成立的. 但是我们注意到这些极限并非对 t 一致地成立. 在 $t = 0$ 附近出现这样的区域, 在该区域中无论 μ 多么小, 非退化方程的解都明显地不同于退化方程的解; 其实, 这是开始时就预料到的. 这种区域在简单例子 (1.10) 中 (见图 1) 就看到过.

在边值问题 (1.14), (1.19) 的解 (1.20) 中也存在同样类型的区域, 不过现在这种使得原来系统的解与退化系统的解之间明显不同的区域, 不仅仅出现在 $t = 0$ 的邻域, 而且出现在 $t = 1$ 的邻域.

在奇摄动问题中, 当 μ 任意小时, 可能产生原来 (摄动) 系统的解与退化系统的解之间明显不同的区域的这种现象, 我们称它为*边界层现象*, 而这个区域本身就叫做*边界层区域*, 或者简单地叫做*边界层*.

术语 "边界层" 来自流体动力学. 描写粘性流体的方程组相对于描写理想流体的方程组正好是奇摄动系统的典型例子. 在流体动力学中早已注意到, 即使在粘性极小的情况下, 理想流体方程组对所描写的例如在流线型物体边界附近流动的过程也不起作用 (例如绕流问题) ; 这种在物体边界附近的区域在流体动力学中就称为**边界层**. 从数学观点来看, 在流体动力学中产生这种现象的原因也是由于理想流体方程组的解不可能满足对粘性流体方程组成立的边界条件.

上面考察的线性例子 (1.14) 不仅说明了边界层的存在, 而且还给出了解在这个区域的构造. 我们看到, 在原来系统的解与退化系统的解之间的差具有**指数式衰减**的特性. 在 (1.16) 或 (1.20) 中的指数函数好像是在对退化解进行修正, 使得它能够