西安交通大學

研究生创新教育系列教材

经济学的分析方法

寿纪麟 主编

西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

西安交通大学

研究生创新教育系列教材

经济学的分析方法

寿纪麟 主编

西安交通大学出版社
·西 安·

内容提要

现代经济学中广泛应用了数学和对策论来表述经济学的概念和模型，对数学基础有相当高的要求。除微积分、线性代数的基础知识外，还要求具备现代分析、最优化、数学规划、统计学、微分方程、最优控制等基本知识。

本书以较少的篇幅，运用比较简易的方法和途径来介绍最必要的数学知识，帮助读者解除学习中的障碍。编写方法是使经济学与数学并重，从经济学中引出数学模型，在讨论了数学模型后再给出经济解释，把数学与经济学有机地结合起来。

本书适合于经济、管理类各专业的高年级学生和研究生使用。只要具备高等数学、线性代数和概率论等的基础知识就可通读全书。

图书在版编目(CIP)数据

经济学的分析方法/寿纪麟主编. —西安：西安交通大学出版社，2007.6
ISBN 978-7-5605-2476-4

Ⅰ.经... Ⅱ.寿... Ⅲ.经济数学 Ⅳ.F224.0

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 079323 号

书　　名	经济学的分析方法
主　　编	寿纪麟
出版发行	西安交通大学出版社
地　　址	西安市兴庆南路 10 号(邮编:710049)
电　　话	(029)82668357　82667874(发行部)
	(029)82668315　82669096(总编办)
印　　刷	西安东江印务有限公司
字　　数	213 千字
开　　本	727mm×960mm　1/16
印　　张	12
版　　次	2007 年 6 月第 1 版　2007 年 6 月第 1 次印刷
书　　号	ISBN 978-7-5605-2476-4/F·150
定　　价	19.00 元

总　序

创新是一个民族的灵魂，也是高层次人才水平的集中体现。因此，创新能力的培养应贯穿于研究生培养的各个环节，包括课程学习、文献阅读、课题研究等。文献阅读与课题研究无疑是培养研究生创新能力的重要手段，同样，课程学习也是培养研究生创新能力的重要环节。通过课程学习，使研究生在教师指导下，获取知识的同时理解知识创新过程与创新方法，对培养研究生创新能力具有极其重要的意义。

西安交通大学研究生院围绕研究生创新意识与创新能力改革研究生课程体系的同时，开设了一批研究型课程，支持编写了一批研究型课程的教材，目的是为了推动在课程教学环节加强研究生创新意识与创新能力的培养，进一步提高研究生培养质量。

研究型课程是指以激发研究生批判性思维、创新意识为主要目标，由具有高学术水平的教授作为任课教师参与指导，以本学科领域最新研究和前沿知识为内容，以探索式的教学方式为主导，适合于师生互动，使学生有更大的思维空间的课程。研究型教材应使学生在学习过程中可以掌握最新的科学知识，了解最新的前沿动态，激发研究生科学研究的兴趣，掌握基本的科学方法，把教师为中心的教学模式转变为以学生为中心教师为主导的教学模式，把学生被动接受知识转变为在探索研究与自主学习中掌握知识和培养能力。

出版研究型课程系列教材，是一项探索性的工作，有许多艰苦的工作。虽然已出版的教材凝聚了作者的大量心血，但毕竟是一项在实践中不断完善的工作。我们深信，通过研究型系列教材的出版与完善，必定能够促进研究生创新能力的培养。

西安交通大学研究生院

前　言

经济学在近几十年来发展很快，一个突出的特点就是广泛应用了数学和对策论来表述经济学的概念和模型。其中数学方面的应用几乎涵盖了古典数学和现代数学的大部分分支。即使在现代经济学的基础课程中也对数学基础有相当高的要求，不仅要具备微积分、线性代数等较坚实的基础理论，而且还要具备现代分析、最优化、数学规划、统计学、微分方程、最优控制等方面的基础知识。然而目前大部分学生在大学期间只学过高等数学、线性代数和概率论等的基础课程。因此想要真正学好高级微观经济学、高级宏观经济学、计量经济学等基础的学位课程也会遇到一定的困难。为了弥补这个空缺，在有些经典的经济学教科书的后面配有数学知识的附录，但在附录里往往也只列举一些相关的数学概念和结论，对于没有学过上述数学课程的学生是很难理解的，更谈不上应用了。然而要到数学系去听课，比较系统地学习这些数学知识，不但要费大量的时间，而且还听不到这些数学知识是如何应用于经济学中去的。近年来我国已经翻译或出版了一些数学应用于经济学方面的书籍（见参考文献），有利于学习时参考、备查。

本书的宗旨是用较少的篇幅，试图以简易的方法和途径来介绍最必要的内容。希望通过较系统地讲述相关的数学知识，让读者能看到它们在经济学中的应用，以帮助读者解除学习中的障碍。所以本课程设计使数学与经济学并重，尽量从经济学中引出数学概念和模型，在讨论了数学模型后再给出经济解释，把数学与经济学有机地结合起来。

本书是编者多年来在西安交通大学金禾经济研究中心为经济学专业的研究生讲授“经济学的（数学）分析方法”课程的基础上完成的。全书包括 12 章：在第 1，2 章中，先介绍现代分析和最优化方面的一些基本知识。从第 3 章起，就结合经济学的基本问题讲述应用数学的方法。鉴

于对策论(博弈论)在经济学中的作用越来越大,我们用3章的篇幅讲述对策论(即博弈论)的基本概念和方法。本书各章之间既有前后的连贯性,但在不同专题的章节之间又有相对的独立性。第7章是泛函分析的内容,读者初学时可以跳过不看。读者只要具备高等数学、线性代数和概率论等的基础知识就可通读全书。本书是为经济、管理类各专业的研究生而写的,对本科的高年级学生也同样适用。

本书在写作过程中得到西安交通大学研究生院和金禾经济研究中心的支持和帮助,在此表示深切的感谢。由于编者才疏学浅,加之时间仓促,错误和疏漏之处难以避免,敬请批评指正。

2007年4月于西安

目　录

第 1 章　集合论与实分析基础

本章将简要介绍数学分析的一些基本知识，特别是与实数的完备性有关的若干个重要的基本定理.

§1.1　集合及其运算

集合是数学的一个基本概念，它已被广泛地应用于现代数学与其他学科，包括经济学的各个领域. 我们不去研究集合的严格定义，而把**集合**(或**集**)看作是具有某种确定性质的元素的全体. 我们用一个花括号把它的元素写在里面，如 $S=\{(1,1\}$，自然数的集合：$\mathbf{N}=\{1,2,\cdots,n,\cdots\}$等. 更一般的表示法是在一个花括号里写出要表示的元素 x，后面列出元素 x 的所确定的性质 $P(x)$. 例如，集合 A 表示为

$$A=\{x \mid x\text{ 具有性质 }P(x)\}$$

元素 x 属于集合 A，记为 $x\in A$；元素 x 不属于集合 A，记为 $x\notin A$.

下面来看几个例子.

例 1.1　$\{(x,y)\mid x^2+y^2=1\}$表示平面 $\mathbf{R}^2$ 上以原点为中心，半径为 1 的圆周上点的全体.

例 1.2　$v(y)=\{(x_1,x_2)\in\mathbf{R}_+^2 \mid y\leqslant Ax_1^{\alpha}x_2^{1-\alpha}\}$表示 $\mathbf{R}_+^2$ 中满足不等式 $y\leqslant Ax_1^{\alpha}x_2^{1-\alpha}$ 的(x_1,x_2)的全体. 其中 y 是已知的数，A,α 为参数.

例 1.3　$C[a,b]=\{f(x)\mid f(x)\text{为}[a,b]\text{上的连续函数}\}$表示$[a,b]$上连续函数的全体.

例 1.4　设 $u(x)$为消费者的效用函数，$\{x\mid u(x)=\alpha\}$表示消费者的效用值为 α 的商品组合的全体，即为一条效用值为 α 的无差别曲线.

下面讨论集合之间的关系.

设 A 与 B 是两个集合，$A\subset B$(或 $B\supset A$)表示 A 是 B 的子集，即任意 A 中的元素都是 B 中的元素. 若 $A\subset B$ 且 $B\subset A$ 则称 A 与 B **相等**，记为 $A=B$.

集合之间还可以定义下列的运算：

设 A 与 B 是两个集合.

由集 A 与集 B 中所有元素组成的集合称为 A 与 B 的**并**，如图 1.1(a)，记为

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\} \tag{1.1}$$

由既属于集 A 又属于集 B 的所有元素组成的集合称为 A 与 B 的**交**，如图 1.1(b)，记为

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\} \tag{1.2}$$

由属于集 A 但不属于集 B 的所有元素组成的集合称为 A 与 B 的**差**，如图 1.1(c)，记为

$$A \backslash B = \{x \mid x \in A \text{ 但 } x \notin B\} \tag{1.3}$$

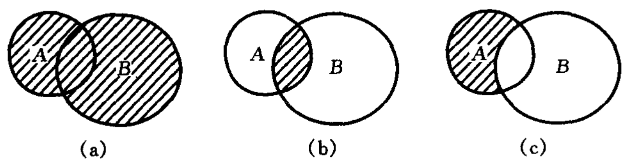

图 1.1

设 X 为基本集，若 $A \subset X$，则 $X \backslash A$ 称为 A 的**余**，记为

$$A^C = \{x \mid x \notin A\} \tag{1.4}$$

集合的运算规则：

交换律：$A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$；　(1.5)

结合律：$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$，

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$；　(1.6)

分配律：$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$，

$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$；　(1.7)

吸收律：若 $A \subset B$，则 $A \cup B = B$；$A \cap B = A$

$A \cap \varnothing = \varnothing, A \backslash B = \varnothing, A \cup \varnothing = A$；　(1.8)

其中 $\varnothing$ 表示空集.

例 1.5　求证 $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

证明：$\forall x \in (A \cup B) \cap C$，则 $x \in A \cup B$，且 $x \in C$，从而，$x \in A$ 或 $x \in B$，且 $x \in C$. 这就是说，$x \in A$，且 $x \in C$，或 $x \in B$，且 $x \in C$，即 $x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$，所以

$$(A \cup B) \cap C \subset (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

另一方面　$\forall x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$，则

$$x \in A \cap C \text{ 或 } x \in B \cap C$$

从而　$x \in C$ 且 $x \in A$ 或 $x \in B$，即 $x \in (A \cup B) \cap C$，则

$$(A \cap C) \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap C$$

因此

$$(A \cap C) \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$$

转换率：$A\backslash B=A\cap B^C$，如图 1.2；　(1.9)

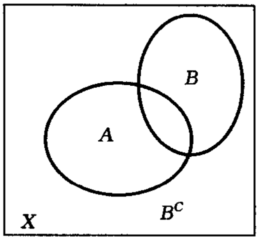

图 1.2

对偶原理(De-Morgen 原理)：

$$(1)\ (\bigcup_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha)^C=\bigcap_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha^C$$

$$(2)\ (\bigcap_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha)^C=\bigcup_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha^C \tag{1.10}$$

其中，Γ 为指标集，它可以是有限集，也可以是无限集. 在不致混淆的情况下通常可省略.

De-Morgen 原理的证明：

(1)　$\forall x\in(\bigcup_\alpha A_\alpha)^C\Rightarrow x\notin\bigcup_\alpha A_\alpha\Rightarrow\forall\alpha,x\notin A_\alpha$

$$\Rightarrow\forall\alpha,x\in A_\alpha^C\Rightarrow x\in\bigcap_\alpha A_\alpha^C,$$

$$\therefore\quad(\bigcup_\alpha A_\alpha)^C\subset\bigcap_\alpha A_\alpha^C \tag{1.11}$$

另一方面　$\forall x\in\bigcap_\alpha A_\alpha^C\Rightarrow\forall\alpha,x\in A_\alpha^C\Rightarrow\forall\alpha,x\notin A_\alpha$

$$\Rightarrow x\notin\bigcup_\alpha A_\alpha\Rightarrow x\in(\bigcup_\alpha A_\alpha)^C,$$

$$\therefore\quad\bigcap_\alpha A_\alpha^C\subset(\bigcup_\alpha A_\alpha)^C \tag{1.12}$$

结合(1.11)，(1.12)就有　$(\bigcup_\alpha A_\alpha)^C=\bigcap_\alpha A_\alpha^C$

(2)　由(1)可证(2).

因为　$(\bigcup_\alpha A_\alpha^C)^C=\bigcap_\alpha(A_\alpha^C)^C=\bigcap_\alpha A_\alpha$

所以　$\bigcup_\alpha A_\alpha^C=(\bigcap_\alpha A_\alpha)^C$

例 1.6　求证：$A\backslash(A\backslash B)=A\cap B$.

证明：$A\backslash(A\backslash B)=A\cap(A\backslash B)^C=A\cap(A\cap B^C)^C$

$$=A\cap(A^C\cup B)=(A\cap A^C)\cup(A\cap B)$$

$$=\varnothing\cup(A\cap B)=A\cap B$$

§ 1.2　实数集(R)的完备性

数学分析的基础的实数系和它的完备性. 正因为实数系有完备性，所以在实数系中讨论极限问题时才没有后顾之忧. 那么，什么是实数的完备性呢？它有什么作用呢？本节将要作详细的介绍. 为了说明这个问题，先让我们来考察有理数集 **Q**.

大家知道，有理数是指形如 p/q 的数，其中 p,q_0 均为整数，有理数集 **Q** 表示如下：

$$\mathbf{Q} = \{x \mid x = \frac{p}{q}, p, q \text{ 为整数}, q \neq 0\}$$

关于有理数集，我们知道下列的性质：

性质 1.1　有理数集是稠密的，即 $\forall x, y \in \mathbf{Q}, x \neq y, x < y$，必存在 $z \in \mathbf{Q}$，使 $z \in (x, y)$.

性质 1.2　有理数集对四则运算法则是封闭的. 但是有理数集对极限运算不是封闭的.

例如，$x_1 = 1.4, x_2 = 1.41, x_3 = 1.414, x_4 = 1.4142, \cdots$，每一个 x_n 都是有理数，但是，它们的极限：$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt{2}$ 是无理数，不是有理数. 这种对于极限运算不“封闭”的现象，我们称之为不具有完备性. 也就是说有理数集是不完备的. 为了能满足对极限运算的“封闭性”，我们必须将有理数集进一步扩展为实数集，而实数集是具有完备性的，或者说实数集是**连续统**.

下面，我们在实数集中来讨论它的完备性. 关于实数的完备性，共有相互等价的六个定理. 它们的每一个定理都是刻画实数集的完备性的，但是各具有不同的形式.

定义 1.1　设 $\{[a_i, b_i]\}$ 为一个闭区间序列，若它满足下列条件：

(1) $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \cdots \supset [a_n, b_n] \supset \cdots$　　(1.13)

(2) 闭区间 $[a_n, b_n]$ 的长度数列趋于零，即 $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$，　　(1.14)

则把这种闭区间序列称为**闭区间套**.

定理 1.1　(Contor 闭区间套定理).

设 $\{[a_n, b_n]\}$ 为任意一个闭区间套，则必存在唯一的实数 ξ，使

$$\xi \in [a_n, b_n], n = 1, 2, \cdots, m, \cdots, \text{即 } \xi \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n],$$

且

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \xi$$

为什么 Contor 的闭区间套定理能刻画实数集的完备性呢？通俗地讲，实数集的完备性或连续统是指实数集内不应该有所谓“漏洞”. 上面我们已经看到，有理数

集的不完备性是因为有理数集内有诸如$\sqrt{2}$(它不是有理数)那样的"漏洞".那么为什么闭区间套定理能说明实数集内已经不再有"漏洞"呢？我们可以用反证法来说明.若实数集有一个"漏洞"ξ,则我们可以立刻构造一个满足定理 1.1 的闭区间套$\left\{\left[\xi-\frac{1}{n},\xi+\frac{1}{n}\right]\right\}$,$n=1,2,\cdots,n,\cdots$,对这个闭区间套必存在一个实数$\xi$,这与反证法假设$\xi$为实数集中的漏洞相矛盾,这个矛盾就说明了实数集的完备性.由于定理 1.1 相当直观,故我们在此把它当作公理加以承认.

定理 1.2　(Bolzano-Weierstrass 定理)任何的有界数列必有收敛子列.

证明:设$\{x_n\}$为有界数列,则存在上、下界 a,b,即 $a<x_n<b$, $\forall n$.

两等分$[a,b]$,其中至少有一个分区间中含有$\{x_n\}$中无穷多个点,并记这个分区间为$[a_1,b_1]$,如图 1.3 所示,

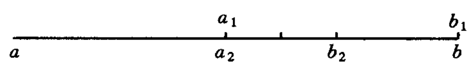

图 1.3

再两等分$[a_1,b_1]$,其中至少有一个分区间含有$\{x_n\}$中无穷多个点,并记为$[a_2,b_2]$,且有$[a_2,b_2]\subset[a_1,b_1]$.

以此类推,可得一个闭区间列$\{[a_n,b_n]\}$,$n=1,2,\cdots$,其中每个$[a_n,b_n]$都包含了$[a,b]$中无穷多个 x_n,且有

$$\cdots\subset[a_n,b_n]\subset[a_{n-1},b_{n-1}]\subset\cdots\subset[a_2,b_2]\subset[a_1,b_1]$$

由此构造出的闭区间列$\{[a_n,b_n]\}$为一个闭区间套.则由定理 1.1 知,必存在ξ使

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=\xi$$

由于每个$[a_n,b_n]$都包含了$[a,b]$中无穷多个$\{x_n\}$中的点,所以,先取 $x_{n_1}\in[a_1,b_1]$,再取 $x_{n_2}\in[a_2,b_2]$,且 $n_2>n_1$.如此继续下去,可取出 $x_{n_k}\in[a_k,b_k]$,且使 $n_{k+1}>n_k$,所以

$$a_k\leqslant x_{n_k}\leqslant b_k,\quad k=1,2,\cdots,n,\cdots$$

且$\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$,$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\xi$,因为$\{x_{n_k}\}$为$\{x_n\}$的子列,故

$$\lim_{k\to\infty}x_{n_k}=\xi$$

定义 1.2　设$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$为一个数列,当 $m,n\to\infty$时,有 $x_n-x_m\to0$,即

$$\forall\varepsilon>0,\exists N,\text{当 } m,n>N \text{ 时,有 } |x_n-x_m|<\varepsilon \tag{1.15}$$

则称该数列为**基本数列**或 **Cauchy 数列**.

定理 1.3　(完备性定理)数列$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$收敛的充要条件是它为基本数列.

证明:(⇒)设$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$为收敛数列.令 $x_n\to a$,则

$\forall \varepsilon>0$，$\exists N$，当 $m,n>N$ 时，有 $|x_n-a|<\varepsilon/2$，$|x_m-a|<\varepsilon/2$，

$$\therefore \quad |x_n-x_m|=|x_n-a+a-x_m|\leqslant|x_n-a|+|x_m-a|<\varepsilon$$

即$\{x_n\}$为 Cauchy 列.

($\Leftarrow$)设$\{x_n\}$为 Cauchy 列. 首先，我们来证明$\{x_n\}$为有界数列.

事实上，取 $\varepsilon=1$，$\exists N_1$，当 $m,n>N_1$ 时，$|x_n-x_m|<1$. 取 $m=N_1+1$，当 $n>N_1$ 时，$|x_n-x_m|<1$，令

$$A=\max\{|x_1|,|x_2|,\cdots,|x_{N_1+1}|\}$$

因此，$A+1$ 为$\{x_n\}$的上界，$-(A+1)$为$\{x_n\}$的下界，即

$$|x_n|\leqslant A+1,\quad \forall n$$

由定理 1.2，在$\{x_n\}$中必定存在一个子列：$\{x_{n_k}\}\subset\{x_n\}$，使

$$x_{n_k}\xrightarrow{k\to\infty}a$$

现在来证明$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

事实上，$\forall \varepsilon>0$，$\exists K$，当 $k>K$ 时，有$|x_{n_k}-1|<\varepsilon/2$. 由假设，$\{x_n\}$为 Cauchy 数列，故$\exists N_1$，当 $k>N_1$ 时，因而当 $n_k>k>N_1$ 时，有

$$|x_k-x_{n_k}|<\varepsilon/2$$

令 $N=\max\{K,N_1\}$，则当 $k>N$ 时，有

$$|x_k-a|\leqslant|x_k-x_{n_k}|+|x_{n_k}-a|<\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon$$

充分性得证.

定理 1.4　(单调收敛定理)单调有界数列必收敛.

证明：不妨设$\{x_n\}$为单调增上有界数列. 我们采用反证法.

若$\{x_n\}$不收敛，则必存在 $\varepsilon_0>0$，使得对任意的正整数 N，必有当 $m,n>N$，使$|x_n-x_m|>\varepsilon_0$. 所以，当 $N=1$ 时，必有 $m_1>n_1>1$ 使$|x_{n_1}-x_{m_1}|\geqslant\varepsilon_0$；

当 $N=m_1+1$ 时，必有 $m_2>n_2>m_1+1$，使$|x_{n_2}-x_{m_2}|\geqslant\varepsilon_0$；

如此继续下去，可得到

$$n_1<m_1<n_2<m_2<\cdots<n_k<m_k<\cdots$$

使
$$|x_{n_k}-x_{m_k}|\geqslant\varepsilon_0,\quad k=1,2,\cdots$$

因为$\{x_n\}$单调增，所以$|x_{m_k}-x_{n_k}|=x_{m_k}-x_{n_k}\geqslant\varepsilon_0$，$k=1,2,\cdots$，而且

$$x_{m_k}>x_{n_k}+\varepsilon_0\geqslant x_{m_{k-1}}+\varepsilon_0>x_{n_{k-1}}+2\varepsilon_0>\cdots>x_{n_1}+k\varepsilon_0$$

故
$$\lim_{k\to\infty}x_{m_k}=\infty$$

这与$\{x_n\}$为有界数列的假设相矛盾，定理 1.4 得证.

定义 1.3　设 A 为一个数集，若 M 为 A 的一个上界，且对任意 $\varepsilon>0$，必存在 A 中的 $x\in A$，使 $x>M-\varepsilon$，则称 M 为 A 的**上确界**，如图 1.4 所示. 记为 $M=\sup A$.

同理，若 m 为 A 的一个下界，且对任意 $\varepsilon>0$，必存在 A 中的 $x\in A$，使 $x<m+$

ε，则称 m 为 A 的**下确界**，如图 1.5 所示. 记为 $m=\inf A$.

通俗地说，数集 A 的上确界是 A 的最小上界；数集 A 的下确界是 A 的最大下界.

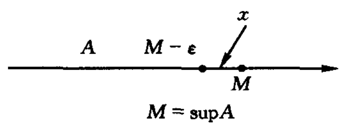

图 1.4

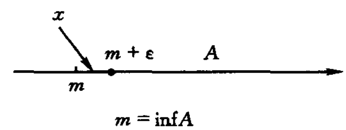

图 1.5

思考题：若 A 的上确界为 M，问 M 是否一定属于 A？

注意：设 $M=\sup A$，则 M 可能属于 A；也可能不属于 A.

例如　若设 $A=[a,b]$，则 $M=\sup A=b\in A$；

若设 $A=[a,b)$，则 $M=\sup A=b\notin A$.

定理 1.5　(确界存在定理)上有界的数集必有上确界；下有界的数集必有下确界.

证明：设 A 为上有界的数集，取最小的整数上界为 r_0. 将每个单位区间二等分，在以 2 为分母的有理数中取最小的上界为 r_1；再将每个单位区间 2^2 等分，在以 2^2 为分母的有理数中取最小的上界为 r_2；依此类推，…，再将每个单位区间 2^n 等分，在以 2^n 为分母的有理数中取最小的上界为 r_n. 显然，

$$r_0\geqslant r_1\geqslant\cdots\geqslant r_n\geqslant\cdots \tag{1.16}$$

且 $\{r_n\}$ 为单调降的有界数列，由定理 1.4，数列 $\{x_n\}$ 收敛，设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=M$，现在来验证 M 即为 A 的上确界：

(1) M 显然是 A 的一个上界.(这是显然的，因为 r_n 都是 A 的上界)；

(2) $\forall\varepsilon>0$，必存在 $x\in A$，使 $x>M-\varepsilon$.

反证法　若不然，在 $(M-\varepsilon,M)$ 中不存在 A 中的数，则 $M-\varepsilon$ 也是 A 的一个上界，但由有理数的稠密性，必存在以 2^n 为分母的有理数 r_n'，使 $r_n'\in(M-\varepsilon,M)$，且也是 A 的上界，所以

$$r_n\leqslant r_n'\leqslant M$$

这与 $r_n\to M$ 的关系相矛盾，定理 1.5 得证.

定义 1.4　设 $[a,b]$ 为闭区间，$\Phi=\{\varphi_\alpha\mid\alpha\in I\}$ 为一个开区间族，其中 φ_α 都是开区间，指标集 I 可以是有限集，也可以是无限集. 若 $[a,b]$ 中每一点 x，必含于开区间族 Φ 的某一区间 φ_α 中，即 $x\in\varphi_\alpha$，则称区间 $[a,b]$ 被 Φ 所覆盖，或 Φ 覆盖了区间 $[a,b]$.

定理 1.6　(Heine－Borel 有限覆盖定理)

若闭区间$[a,b]$被一个开区间簇$\Phi=\{\varphi_\alpha | \alpha\in I\}$覆盖,则必能从$\Phi$中选出有限个开区间:$B=\{\varphi_{\alpha_i} | i=1,2,\cdots,n,\varphi_{\alpha_i}\in\Phi\}$,使$B$覆盖$[a,b]$,称$B$为$\Phi$的对$[a,b]$有限子覆盖.

证明:令$A=\{x^* | x^*\in[a,b]$,且$[a,x^*]$能被Φ中有限个开区间覆盖$\}$,则$a\in A$,$\therefore A\neq\varnothing$.另一方面$A$是一个有界集,由定理1.5,$A$有上确界.

令$c=\sup A$,显然$c\leqslant b$,从而$c\in[a,b]$,设Φ中取一个开区间含有c,令此开区间为$(\alpha,\beta)\in\Phi$,则$\alpha<c<\beta$;于是,由上确界的定义知,$\exists x^*\in A$,使$\alpha<x^*<c<\beta$从而$c\in A$.

最后要证明$c=b$.

反证法 若$c<b$,则在(α,β)中必存在A中的$x^*\in A$,这与c是A的上确界相矛盾,故$c=b$.

我们还可以利用Heine-Borel定理来证明定理1.1.

定理1.1 (Contor闭区间套定理)

证明:设$\{[a_n,b_n]\}$为任一闭区间套,现在要证明至少存在一个$\xi\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]$,即$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]\neq\varnothing$.

反证法 若$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]=\varnothing$,不妨设所有的$[a_n,b_n]=\varnothing$,由De-Morgen对偶原理,$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]=\varnothing$的余集为$(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n])^C=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]^C=\mathbf{R}\supset[a,b]$,其中

$$[a_n,b_n]^C=(-\infty,a_n)\cup(b_n,+\infty)$$

是两个开区间之并,由有限覆盖定理,必存在有限个$[a_{n_i},b_{n_i}]^C$,使

$$\bigcup_{i=1}^{m}[a_{n_i},b_{n_i}]^C\supset[a,b]$$

而有限个$(-\infty,a_{n_i})$的并为:

$$\bigcup_{i=1}^{m}(-\infty,a_{n_i})=(-\infty,a_{n_{i_0}})$$

有限个$(b_{n_i},+\infty)$的并为:

$$\bigcup_{i=1}^{m}(b_{n_i},+\infty)=(b_{n_{i_0}},+\infty)$$

其中$(b_{n_{i_0}},+\infty)$为b_{n_i}中最小的数.而$(-\infty,a_{n_{i_0}})\cup(b_{n_{i_0}},+\infty)$是不可能覆盖$[a,b]$的(因为$(a_{n_{i_0}},b_{n_{i_0}})\subset[a,b]$,$(a_{n_{i_0}},b_{n_{i_0}})$中的点都不能被覆盖.)

$\therefore$ 必存在ξ,使$\xi\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]\neq\varnothing$.

最后我们要证明ξ是唯一的.

若有两个ξ_1,ξ_2,使$\xi_1,\xi_2\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]$,不妨设$\xi_1<\xi_2$,则