工科数学基础

# 线性代数教程

严守权　编著

清华大学出版社

工科数学基础

# 线性代数教程

严守权　编著

清华大学出版社
北京

## 内 容 简 介

本书是按照《工科本科数学基础课教学基本要求》，参照《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》，并结合编者多年的教学经验而编写的. 具体内容为行列式、矩阵、$n$ 维向量空间、线性方程组、特征值和特征向量、二次型，共 6 章.

本书结构清晰、逻辑严谨、讲述详细、通俗易懂、例题多样、习题丰富，既便于学生自学，也易于教学. 可供高等院校工科类专业的学生使用.



**图书在版编目(CIP)数据**

线性代数教程/严守权编著. —北京：清华大学出版社，2007. 8
(工科数学基础)
ISBN 978-7-302-15655-0

Ⅰ. 线…　Ⅱ. 严…　Ⅲ. 线性代数—高等学校—教材　Ⅳ. O151. 2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 103388 号

**责任编辑**：刘　颖　王海燕
**责任校对**：赵丽敏
**责任印制**：何　芊
**出版发行**：清华大学出版社　　**地　址**：北京清华大学学研大厦 A 座
http://www.tup.com.cn　　**邮　编**：100084
c - service@tup.tsinghua.edu.cn
**社 总 机**：010-62770175　　**邮购热线**：010-62786544
**投稿咨询**：010-62772015　　**客户服务**：010-62776969
**印 装 者**：北京市清华园胶印厂
**经　销**：全国新华书店
**开　本**：185 × 230　**印　张**：13.5　**字　数**：267 千字
**版　次**：2007 年 8 月第 1 版　　**印　次**：2007 年 8 月第 1 次印刷
**印　数**：1 ~ 4000
**定　价**：19.00 元

本书如存在文字不清、漏印、缺页、倒页、脱页等印装质量问题，请与清华大学出版社出版部联系调换。联系电话：(010)62770177 转 3103　　产品编号：020965 - 01

# 丛书序

随着我国社会和经济建设的高速发展，全国高等教育规模日益扩大，工科院校各专业对公共数学课的课程建设、教学内容的更新和教材建设提出了新的要求. 与此同时，全国硕士研究生入学统一招生考试的规模也在不断扩大，其中数学考试对于高等院校工科类专业的公共数学课的影响也愈来愈大. 为适应这个变化，许多学校工科类专业的数学基础课，经过多年调整，实际教学大纲已经与工科类研究生入学统一考试的考试大纲所涉及的内容逐步协调一致. “工科数学基础”正是适应我国高校工科类专业教学改革的新形势、新变化，适时推出的一套教材. 全套教材包括《高等数学教程》(上册、下册)、《线性代数教程》、《概率统计教程》，以及相应的学习指导用书.

本套教材的主教材是参照教育部教学指导委员会颁布的《工科类本科数学基础课教学基本要求(修改稿)》和教育部颁布的《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》的要求编写的. 突出了对这两个大纲所涉及的基本概念、基本理论和基本方法的介绍和训练，内容完整紧凑，难度适中，便于组织教学，能够在规定的课时内达到各个专业对公共数学基础课教学的基本要求.

本套教材中针对主教材配套推出了《高等数学教程学习指导》、《线性代数教程学习指导》、《概率统计教程学习指导》这三本相应的学习指导用书. 主要通过精选典型例题，对教材的每个章节进行系统的归纳总结，说明重点难点，进行答疑解惑，其中包括对教材中多数习题提供解答，便于学生自学. 此外，还着重对教材中的题目类型作必要的补充，增加了相当数量的研究生入学统一考试试题题型，力求在分析问题和综合运用知识解决问题的能力方面，帮助学生实现跨越，达到全国硕士研究生入学统一考试对数学(一)、(二)的要求. 因此，这三本学习指导用书完全可以实现全国硕士研究生入学统一考试数学考试复习参考书的功能，在日后报考研究生时发挥积极作用.

参加《工科数学基础》的编写人员大多具有 30 年以上从事公共数学基础课程的教学研究、教材研究和教学实践的经历，其中很多教师还多年从事研究生入学统一考试数学考试考前辅导工作，有相当高的知名度. 因此，作者在把握工科类公共数学基础课程的教学内容和要求、时数安排和难易程度，以及教学与考研之间的协调关系等方面均具有丰富的经验，这对于本套教材的编写质量是一个可靠的保障.

我们知道，一套便于使用的成熟的教材往往需要多年不断的磨炼和广大读者的支持与帮助. 欢迎广大读者对本套教材的不足提出批评和建议.

《工科数学基础》作者

2007 年 3 月

# 前　　言

本书参照教育部教学指导委员会颁布的《工科类本科数学基础课教学基本要求(修改稿)》和《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》(工学)线性代数部分编写.内容包括行列式、矩阵、$n$维向量空间、线性方程组、特征值与特征向量、二次型.全书覆盖了大纲的基本内容,表述简洁、难度适中.每章配有习题,书末附有习题答案,同时还配套出版了辅导教材《线性代数教程学习指导》.辅导书除对教材中重点、难点作深入浅出的讲解,还针对工学类硕士研究生入学考试数学考试线性代数试题题型特点和要求,增加相当数量的典型例题,其中包括填空题和单项选择题,此外,每章还配有综合练习题和答案,这将有助于提高读者分析、解决问题的能力.书后还附有教材所有习题的详解.

本书可作为高等学校工科类各专业公共数学基础课线性代数课程的教材或教学参考书.配套的《线性代数教程学习指导》一书可作报考工学类硕士研究生的考生备考用的数学辅导书.

负责编写工作的是严守权,阳庆节参加了第3章的编写,张伦传参加了第5章、第6章的编写.编写过程中,姚孟臣、吴良大等同志对教材的编写大纲、书稿内容、体例都提出了宝贵的意见,出版社的编辑认真审阅了书稿,也提出了不少改进的意见,对此,我们一并表示衷心感谢.

作　者

2007年8月

# 目　　录

# 第 1 章

# 行 列 式

行列式是研究线性代数的一个重要工具，本章将介绍行列式的概念、性质及其计算方法.

## 1.1 二阶、三阶行列式

历史上线性代数的第一个问题是关于解线性方程组的问题，行列式的概念就是从求解线性方程组的问题中引进的. 在中学初等代数中我们已经在求解二元和三元线性方程组中引入二阶、三阶行列式. 这里作一简单回顾.

设二元一次方程组为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases} \tag{1.1}$$

通过消元法，得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12},$$
$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = b_2a_{11} - b_1a_{21},$$

于是，当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时，方程组有唯一解

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad x_2 = \frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \tag{1.2}$$

公式(1.2)直接给出了方程组的系数、常数项与解的关系. 为了便于记忆，引入记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

表示代数和 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$，称为二阶行列式，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \tag{1.3}$$

其中 $a_{ij}(i,j=1,2)$ 表示第 $i$ 行第 $j$ 列的元素. 下标 $i$ 是行标，代表元素所在行的位置，下标 $j$ 是列标，代表元素所在列的位置. 行列式每项均由不同行不同列的元素乘积构成，项前符号可用对角线法确定，如图 1.1，其中实线连接的取"+"号，虚线连接的取"−"号. 同样可记

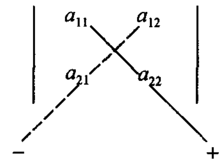


图 1.1

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1a_{22} - b_2a_{12}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = b_2a_{11} - b_1a_{21},$$

于是，在 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$ 的条件下，方程组(1.1)的解可表示为

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

类似地，对于三元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3, \end{cases} \tag{1.4}$$

引入记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

表示代数和 $a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$，称为三阶行列式，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}. \tag{1.5}$$

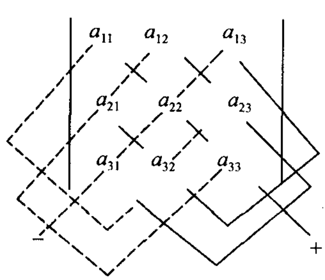


图 1.2

式中每项均由不同行不同列的元素乘积构成，项前符号也可用对角线法确定，如图 1.2，其中实线连接的取"+"号，虚线连接的取"−"号.

引入三阶行列式，对于三元线性方程组(1.4)的解，可以得到类似于二元线性方程组(1.1)解的结构形式，即当

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

时，方程组(1.4)有唯一解，且可表示为

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}, \quad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}.$$

**例** 求解三元一次方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 8, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 2. \end{cases}$$

**解** 先计算系数行列式

$$\begin{aligned} D = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \\ 2 & -3 & 2 \end{vmatrix} &= 2 \times 2 \times 2 + (-1) \times (-3) \times 2 + 1 \times 3 \times (-3) \\ &\quad - 2 \times (-3) \times (-3) - (-1) \times 3 \times 2 - 1 \times 2 \times 2 \\ &= 8 + 6 - 9 - 18 + 6 - 4 = -11. \end{aligned}$$

由于 $D \neq 0$，知方程组有唯一解. 再计算

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 8 & 2 & -3 \\ 2 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 6 - 24 - 9 - 4 + 16 = -11,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 8 & -3 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 32 - 6 + 6 + 12 - 6 - 16 = 22,$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 8 \\ 2 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 8 - 16 - 9 + 48 + 6 - 4 = 33,$$

于是

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = 1, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = -2, \quad x_3 = \frac{D_3}{D} = -3.$$

容易看到,用行列式法求解线性方程组,省略了繁杂的消元过程. 后面我们将证明,行列式法同样适用于更为一般的由 $n$ 个 $n$ 元一次线性方程构成的方程组的求解问题. 为此,需要将二阶和三阶行列式的概念推广到 $n$ 阶行列式.

## 1.2 $n$ 阶行列式

### 1.2.1 排列与逆序

$n$ 阶行列式的一般定义,需要用到关于排列的相关知识.

**定义 1.1** 由 $1,2,\cdots,n$ 组成的一个有序数组称为一个 $n$ 级排列.

例如,2413 是一个 4 级排列,45231 是一个 5 级排列.

3 级排列的全体是:123,132,213,231,321,312,共 6 个.

$n$ 级排列的全体共 $n!$ 个,其中从小到大按自然顺序组成的排列 $123\cdots n$,称为自然序排列. 如果其中两个数字大小顺序前后颠倒,如 4 排在 3 前面,那么它们之间就形成一个逆序. 一般地可定义如下.

**定义 1.2** 在一个排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 中,如果一对数的前后位置与大小顺序相反,即排在前面的数大于排在后面的数,那么就称它们为一个逆序,一个排列中逆序的总数称为这个排列的逆序数,记作 $\tau(j_1j_2\cdots j_n)$.

例如,在排列 32541 中,32,31,21,54,51,41 是逆序,共 6 个,因此 $\tau(32541)=6$. 又如,在排列 54321 中,54,53,52,51,43,42,41,32,31,21 是逆序,共 9 个. 因此 $\tau(54321)=9$.

**定义 1.3** 逆序数为偶数的排列称为偶排列,逆序数为奇数的排列称为奇排列.

如上面例子中,排列 32541 是偶排列,排列 54321 是奇排列.

在一个排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 中,如果将其中两个数 $j_s,j_t$ 的位置互换,其余的数的位置不变,得到另一个排列,这样的变换,称为对换,记作对换 $(j_s,j_t)$.

例如,排列 32541 经对换(3,1)变成排列 12543. 排列 12543 的逆序数为 3,是奇排列. 说明对换(3,1)改变了排列 32541 的奇偶性. 这种对换对排列奇偶性的改变,具有一般性.

**定理 1.1** 对换改变排列的奇偶性.

**证** (1) 先考虑排列中两个相邻数 $i,j$ 对换的情形,即排列

$$\cdots ij\cdots$$

经对换 $(i,j)$ 变为新排列

$$\cdots ji\cdots,$$

这一过程中,仅仅发生了数 $i,j$ 之间的逆序改变,而与排列中的其他数之间的逆序关系并没有改变,因此原排列与新排列的逆序数只相差 1 个(增加或减少). 因此,对换 $(i,j)$ 改变

了原排列的奇偶性.

(2) 再考虑两个不相邻数 $i,j$ 对换的情况. 不妨设两数中间夹有 $s$ 个数,即排列

$$\cdots ik_1k_2\cdots k_sj\cdots.$$

经对换 $(i,j)$ 变为新排列

$$\cdots jk_1k_2\cdots k_si\cdots.$$

该对换过程等价于 $i,j$ 依次与中间的 $s$ 个数,以及彼此之间共作 $2s+1$ 次的相邻的数之间的对换. 由(1)知,原排列的奇偶性相应地作 $2s+1$ 次改变,最终改变了其奇偶性. 综上讨论可知对换改变排列的奇偶性.

**推论** $n$ 级排列的全体中,奇偶排列各半,即各为 $\frac{n!}{2}$ 个.

**证** 设排列的奇偶排列个数分别为 $p,q$ 个,则 $p+q=n!$. 由定理 1,$p$ 个奇排列作一次对换后,对应有 $p$ 个偶排列,从而有 $p\leqslant q$. 同理,$q$ 个奇排列也应该对应有 $q$ 个偶排列,同时有 $p\geqslant q$,因此,有 $p=q=\frac{n!}{2}$.

例如,所有 3 级排列中,有 3 个奇排列:132,213,321;3 个偶排列:123,231,312.

由定理 1.1 还可以得到下列结论.

**定理 1.2** 任意一个 $n$ 级排列经过若干次对换均可实现与排列 $12\cdots n$ 互换,且作对换的个数与该排列有相同的奇偶性.

**推论** 任意两个 $n$ 级排列经过若干次对换均可实现互换,且作对换的个数与这两个排列的逆序数之和有相同的奇偶性.

### 1.2.2 $n$ 阶行列式的定义

在给 $n$ 阶行列式定义前,不妨再研究一下二、三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$- a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

由定义式可以观察到三个共同的特点:

(1) 二、三阶行列式都是由行列式的不同行不同列元素乘积构成的代数和.

(2) 代数和的每一项符号,在乘积元素按行标自然序排列的情况下,取决于列标排列的奇偶性. 如三阶行列式取负号的三项,在行标排列为自然序的情况下,列标排列分别为

132,213,321,其逆序数依次为1,1,3,即均为奇排列,因此,三阶行列式的一般项可表示为

$$(-1)^{\tau(j_1j_2j_3)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}.$$

(3) 代数和的所有项可以看作在行标排列为自然序的情况下,由列标所有排列生成,因此,二阶行列式共有2! 项,三阶行列式共有3! 项.

将上述特征推广至$n$阶行列式,即可得到$n$阶行列式的定义.

**定义 1.4**　$n$阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1.6}$$

是所有取自不同行不同列的$n$个元素乘积

$$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \tag{1.7}$$

的代数和.其中$j_1j_2\cdots j_n$是一个$n$级排列,当$j_1j_2\cdots j_n$是偶排列时,项前符号带有正号,当$j_1j_2\cdots j_n$是奇排列时,项前符号带有负号.即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}, \tag{1.8}$$

其中$\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$表示对所有$n$级排列求和,$(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$称为行列式的一般项.式(1.8)称为$n$阶行列式的表达式.$n$阶行列式有时可以简记为$|a_{ij}|$.元素$a_{ii}(i=1,2,\cdots,n)$所在的直线称为主对角线,元素$a_{i,n-i+1}(i=1,2,\cdots,n)$所在的直线称为副对角线.

当$n=1$时,$|a_{11}|$就是$a_{11}$,应注意与绝对值符号的区别.

**例 1**　判断下列各项是否为4阶行列式的项,若是,项前应带什么符号?

(1) $a_{13}a_{24}a_{11}a_{42}$;　　(2) $a_{13}a_{24}a_{31}a_{42}$;

(3) $a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}$;　　(4) $a_{13}a_{21}a_{34}a_{42}$.

**解**　由行列式定义,行列式的项取自不同行不同列,行标与列标的排列均应构成一个4级排列,因此,其中$a_{13}a_{24}a_{11}a_{42}$不是行列式中的项.又由

$$\tau(3412)=4,\quad \tau(4321)=6,\quad \tau(3142)=3$$

知$a_{13}a_{24}a_{31}a_{42}$,$a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}$前带正号,$a_{13}a_{21}a_{34}a_{42}$前带负号.

**注意**　如果按照二、三阶行列式的对角线法确定符号,例1中$a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}$是4阶行列式中用虚线连接的副对角线上元素的乘积,应取负号,这是错误的.因此,在计算4阶

及 4 阶以上行列式时，不可套用中学学过的对角线法.

**例 2** 设函数多项式

$$f(x)=\begin{vmatrix}2x & x & 1 & 2\\ 1 & x & 1 & -1\\ 3 & x & 1 & -x\\ 1 & x & x & 3\end{vmatrix},$$

试给出常数项和 $x^4$ 的系数.

**解** 多项式常数项即为 $x=0$ 时的行列式值. 此时，行列式第 2 列元素均为零. 根据行列式定义，行列式各项由不同行不同列元素的乘积构成，其中必含第 2 列的零元素，因此，该多项式常数项为零.

由于行列式中元素均为 $x$ 的一次项，因此，多项式中 $x^4$ 项必须由各行、列中含 $x$ 的元素的乘积构成，其中第 1,3,4 列仅能提供的元素分别是 $a_{11}, a_{43}, a_{34}$，于是按照不同行不同列的构成原则，第 2 列只能取 $a_{22}$，行标按自然序排列，多项式中含 $x^4$ 的项为

$$(-1)^{\tau(1243)}a_{11}a_{22}a_{34}a_{43}=-2x\times x\times x\times(-x)=2x^4,$$

因此该多项式中 $x^4$ 项的系数为 2.

**例 3** 计算行列式

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14}\\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24}\\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34}\\ 0 & 0 & 0 & a_{44}\end{vmatrix}.$$

**解** 根据行列式定义，行列式各项由不同行不同列元素乘积构成. 在第 1 列中仅 $a_{11}\neq 0$，取之. 在 $a_{11}$ 取定后，第 2 列只能取到非零元素 $a_{22}$，依此类推，该行列式展开式中所有非零项仅由 $a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{44}$ 的乘积构成. 即有

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14}\\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24}\\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34}\\ 0 & 0 & 0 & a_{44}\end{vmatrix}=(-1)^{\tau(1234)}a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}=a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}.$$

一般地，形如

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & a_{nn}\end{vmatrix} \quad \text{及} \quad \begin{vmatrix}a_{11} & 0 & \cdots & 0\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & a_{42} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$$

的行列式分别称为上三角行列式和下三角行列式，其结构特点是位于行列式主对角元素

的下方或上方元素均为 0,统称三角行列式. 可以证明,三角行列式等于其主对角线元素的乘积,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{42} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

以上计算行列式各项时,$n$ 个元素的排列按定义要求必须以行标的自然序排列. 由于数的乘法有交换律,这种对于各项元素排列顺序的限制是不必要的,为此,我们可以用定理形式给出关于行列式一般项的补充定义.

**定理 1.3**　$n$ 阶行列式一般项可表示为

$$(-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)+\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \cdots a_{i_n j_n}. \tag{1.9}$$

要证明定理 1.3,只需证明原行列式定义式中的一般项与(1.9)式等价. 事实上,每个元素均带有双下标,元素之间交换一次位置,行标排列和列标排列均发生一次对换,其结果对于 $\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)+\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)$ 的奇偶性不会发生影响,因此不会改变一般项的符号. 又由定理 1.2,排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 经过若干次对换可化至排列 $1,2,\cdots,n$,从而得到与原定义式一般项等价的形式,即

$$\begin{aligned}(-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)+\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \cdots a_{i_n j_n} &= (-1)^{\tau(12\cdots n)+\tau(j_1' j_2' \cdots j_n')} a_{1j_1'} a_{2j_2'} \cdots a_{nj_n'} \\ &= (-1)^{\tau(j_1' j_2' \cdots j_n')} a_{1j_1'} a_{2j_2'} \cdots a_{nj_n'}.\end{aligned}$$

例如对于 5 阶行列式中的项 $a_{23}a_{51}a_{42}a_{14}a_{35}$,由 $\tau(25413)+\tau(31245)=8$,可知该项带正号. 调整排列为 $a_{14}a_{23}a_{35}a_{42}a_{51}$ 后,由 $\tau(12345)+\tau(43521)=8$,可知仍带正号. 调整排列为 $a_{51}a_{42}a_{23}a_{14}a_{35}$ 后,由 $\tau(54213)+\tau(12345)=8$,可知仍带正号. 调整排列为 $a_{23}a_{42}a_{35}a_{51}a_{14}$ 后,由 $\tau(24351)+\tau(32514)=10$,可知仍带正号.

定理 1.3 的一个重要意义在于,它说明了在决定行列式的符号问题上,行标和列标同等重要,互相对称,将有助于行列式的简化计算.

## 1.3　行列式的性质

### 1.3.1　行列式的性质

一般情况下,由定义计算 $n$ 阶行列式,要计算 $n!$ 项,每项又要有 $n$ 个元素相乘,运算量很大. 如果经过适当变换,能将行列式化为三角行列式的形式,运算就简单得多. 下面介绍的行列式的性质可以提供有效的变换工具.

**性质 1**　行列互换,行列式的值不变,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质 1 可以由定理 1.3 说明，在行列互换后，行列式元素 $a_{ji}$ 将 $j$ 看作行标，$i$ 看作了列标，由于行标与列标在决定行列式的符号问题上是对称的，两个行列式的一般项相互等价，因此，行列式的值不变.

性质 1 的重要性在于，它说明了行列式中行与列的地位是对称的，对行列式的行适用的变换性质同样适用于列. 因此在以下讨论时只考虑行变换的性质，列变换的性质可以类推.

**性质 2** 行列式一行的公因子可以提出，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质 2 也可表述为：数乘行列式某一行，等于这个数乘此行列式.

**证** 由行列式定义可知

$$\begin{aligned} \text{左边} &= \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots (ka_{ij_i}) \cdots a_{nj_n} \\ &= k \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{ij_i} \cdots a_{nj_n} = \text{右边}. \end{aligned}$$

如果取 $k=0$，由性质 2 容易推出下面推论.

**推论** 若行列式中有一行元素全为零，此行列式为零.

**性质 3** 对换行列式中两行位置，行列式反号，即若

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则 $D=-D_1$.

**证** 设 $a_{1j_1}\cdots a_{ij_i}\cdots a_{sj_s}\cdots a_{nj_n}$ 为 $D$ 中任意一项，显然该项也是 $D_1$ 中的一项. 在 $D$ 中该项符号为 $(-1)^{\tau(1\cdots i\cdots s\cdots n)+\tau(j_1\cdots j_i\cdots j_s\cdots j_n)}$，两行对换时，只有行标 $i$ 与 $s$ 进行对换，列标排列不变，于是，在 $D_1$ 中该项符号为 $(-1)^{\tau(1\cdots s\cdots i\cdots n)+\tau(j_1\cdots j_i\cdots j_s\cdots j_n)}$，两者对照，恰好两者符号相反，由此可以推出 $D=-D_1$.

运用性质 3 还可以进一步得到以下两个推论：

**推论 1** 两行相同，行列式为零.

**推论 2** 两行成比例，行列式为零.

事实上，在行列式 $D$ 中两行相同的情况下，对换这两行位置，行列式不变，即有 $D=D_1$，同时由性质 3 有 $D=-D_1$，从而 $D=-D$，因此 $D=0$. 在 $D$ 中有两行成比例的情况下，将比例系数提出行列式，即出现两行相同的情况，由推论 1 推出 $D=0$.

**性质 4** 若行列式中某行是两组数之和，则此行列式等于两个行列式之和，这两个行列式对应行分别为第一、第二组数，其余行与原行列式相同，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_1+c_1 & b_2+c_2 & \cdots & b_n+c_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

**证** 由行列式定义知

$$\begin{aligned}\text{左边} &= \sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots(b_{j_i}+c_{j_i})\cdots a_{nj_n} \\ &= \sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots b_{j_i}\cdots a_{nj_n}+\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots c_{j_i}\cdots a_{nj_n} \\ &= \text{右边}.\end{aligned}$$

性质 4 可以推广到更一般的情况，有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{11}+b_{12}+\cdots+b_{1m} & b_{21}+b_{22}+\cdots+b_{2m} & \cdots & b_{n1}+b_{n2}+\cdots+b_{nm} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\sum_{j=1}^{m}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{1j} & b_{2j} & \cdots & b_{nj} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$