

柴学林 著

小学数学 解题专题研究



兰州大学出版社

LANZHOU UNIVERSITY PRESS

- 策划编辑/高燕平
- 责任编辑/许雅茹 高燕平
- 封面设计/赵 会



ISBN 978-7-311-03002-5



9 787311 030025 >

定价：23.00元

初等教育专业及小学教师培训教材

小学数学解题专题研究

柴学林 著

兰州大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

小学数学解题专题研究/柴学林著. —兰州:兰州大学出版社, 2007. 8
ISBN 978-7-311-03002-5

I. 小... II. 柴... III. 数学课—小学—解题 IV.
G623.505

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 116252 号

出版人 陶炳海
策划编辑 高燕平
责任编辑 许雅茹 高燕平
封面设计 赵 会

书 名	小学数学解题专题研究
作 者	柴学林 著
出版发行	兰州大学出版社 (地址:兰州市天水南路 222 号 730000)
电 话	0931-8912613(总编办公室) 0931-8617156(营销中心) 0931-8914298(读者服务部)
网 址	http://www.onbook.com.cn
电子信箱	press@onbook.com.cn
印 刷	兰州德辉印刷有限责任公司
开 本	880×1230 1/32
印 张	9.125
字 数	257 千字
印 数	1~1200 册
版 次	2007 年 8 月第 1 版
印 次	2007 年 8 月第 1 次印刷
书 号	ISBN 978-7-311-03002-5
定 价	23.00 元

(图书若有破损、缺页、掉页可随时与本社联系)

内 容 提 要

研究小学数学解题，是师范院校初等教育专业学生和小学教师的一个重要课题。本书所选都是一些基本的数学问题，主要通过这些问题的解答，引导读者理解具体的解题策略和解题方法，诠释小学数学知识以及规律性，感受解题策略的思想内涵和艺术魅力。本书体现了作者深入钻研习题理论，多角度探索解题过程、解题方法、解题策略，初步建立通过解题过程的分析与探索，构建“小学数学解题策略产生于解答具体的数学问题过程中”的教学观。以期提高小学教师的数学基础知识和基本技能，使更多的小学教师在教学改革过程中关注小学数学教育，从数学思维和数学方法论的高度指导小学数学教学活动。

本书可供师范院校初等教育专业学生研究小学数学解题策略和方法时使用，也可以作为小学教师的培训教材。

前 言

小学数学习题是小学数学教学内容的重要组成部分。研究小学数学解题，是师范院校初等教育专业学生和小学教师的一个重要课题。笔者根据初等教育小学教师的培养目标，认真思考提高小学教师的基本素质、训练基本功的问题，从数学方法论和解题策略的角度出发，研究小学数学解题的一般方法、小学数学解题的思维方法、小学数学解题的思想方法和解题策略。并把多年来研究小学数学教学的成果，包括小学数学专题研究的讲稿、论文等，按一定的逻辑顺序编写成书，供初等教育专业学生和小学教师使用。以期提高小学教师的数学基础知识和基本技能，使更多的教师在小学教育教学改革过程中关注小学数学教育，从数学思维和数学方法论的高度指导小学数学教学活动。

目前对同类问题的研究，主要是习题理论和数学学习理论的研究。如波利亚的《怎样解题》（1982）是非常著名的解题研究，侧重于中学数学研究；戴再平教授的《数学习题理论》（1991）理论性较强，主要是中学数学解题的一般性研究；郑君文的《数学学习论》、任樟辉的《数学思维论》（1990）以及王仲春教授的《数学思维与数学方法论》（1989）等都是在数学教育领域里的专题研究成果。在本书的撰写过程中，作者也参阅了以上研究成果并受到很多启发，但是涉及小学数学解题方法与策略问题的较少。也有一些同类小学数学习题教材，如小学数学奥林匹克训练教程等，都是面对小学生的教材。如果从小学师资培养与培训的角度去看，国内外的研究并不是很多，从解题策略

和方法论的角度研究更要少一些。

在数学史中，数学问题解决的过程，对于数学发展的作用不亚于问题解决的结果。例如，寻找求解五次方程一般公式的过程，导致了数论的重大发展；证明欧氏几何平行公理的各种尝试，启迪了非欧几何的创立；解答哥尼斯堡七桥问题的过程，引出了一笔画问题并导致图论的产生。在小学数学学习中，问题解决的过程，对于强化已有知识的理解和掌握，对于解题策略的形成，对于解决问题能力的提高，都有显而易见的作用。数学问题解决是一种高级形式的学习活动，它既期望获得数学问题解决的结果，又重视获得数学问题解决的过程。在数学问题的解决过程中，培养学生数学思维能力，让学生形成一定的解题策略是一项重点工程。

本书是在作者多年进行小学数学教学研究的基础上，广泛收集了国内外小学数学中的部分优秀问题编写而成的。重点以小学数学解题的一般方法、小学数学解题策略和研究为基本框架，提出问题、分析问题、解决问题。通过一些数学问题的分析与解答，揭示“小学数学解题策略存在于具体问题的解答过程中”的观点。引导读者通过例题的分析解答，具体理解小学数学解题策略，感受解题策略的思想内涵和艺术魅力，从而在研究解题规律的同时，回答“怎样学会解题”、“如何培养创新能力”的问题。有些问题具有典型性，对于感受数学文化传统、训练数学思维有一定的价值；有些问题包含着数学的一般规律，通过研讨和挖掘，可以进一步对数学知识进行引申或推广，达到解决一类问题的目的；有些问题颇具开放性，要求解题者综合运用数学知识，开展广泛联想，有利于培养创新意识；有些问题的设计新

颖，突出问题的应用意识，为小学教师提供一个发现、创新的模式。编者紧密结合小学教师的培养与培训，使书中的研究内容贴近小学数学教学，既能使读者系统地学“深”，又能使读者联系实际学“活”。对培养小学生分析问题、解决问题能力和创新意识、创新能力都有促进作用。

本书所选的研究内容丰富，数学问题具有代表性，题型多样，解答方法灵活。在每一章的后面，精选了相关的习题，供读者分析解答，通过适当的训练掌握解题策略，提高分析问题和解决问题的能力。书后还附有参考答案，读者可以对自己的解答情况进行适时的判断与反馈。

本书作为《小学数学解题专题研究》课题的主要成果，得到甘肃省教科所、兰州市教科所领导和兰州师范学校领导的关注，在课题研究过程中，多次得到西北师范大学王仲春教授的具体指导，也得到兰州大学出版社领导及各位编辑的热情帮助和支持，在此表示真诚的谢意。

柴 学 林

2007年4月15日

目 录

第一章 小学数学解题的一般方法	(1)
一、小学数学中常见的数量关系	(1)
二、小学数学解题的一般步骤	(6)
三、小学数学解题的思维方法	(12)
四、小学数学应用题的算术解法与代数解法	(24)
五、小学数学分数应用题的分类及其解答方法	(31)
六、从一道分数应用题的解答理解“一题多解”的价值	(36)
习题一	(42)
第二章 小学数学解题的思想方法	(46)
一、对应思想	(46)
二、假设思想	(49)
三、转化思想	(52)
四、分类思想	(55)
五、数形结合思想	(57)
六、代数思想	(60)
习题二	(62)
第三章 小学数学解题策略(一)	(67)
一、数与数的性质	(67)
二、数字趣题	(83)
三、找规律	(96)
四、平均数问题	(102)
五、浓度问题	(103)
六、比和比例问题	(104)
习题三	(109)

第四章 小学数学解题策略（二）	(115)
一、和差问题	(115)
二、和倍问题	(117)
三、差倍问题	(121)
四、倍比问题	(123)
五、归一问题和归总问题	(126)
六、根据两个差求未知数的问题	(130)
习题四	(133)
第五章 小学数学解题策略（三）	(139)
一、年龄问题	(139)
二、行程问题	(141)
三、流水问题	(150)
四、植树问题	(152)
五、鸡兔同笼问题	(154)
六、还原问题	(156)
七、盈亏问题	(159)
习题五	(162)
第六章 小学数学解题策略（四）	(168)
一、几何图形的个数	(168)
二、最短线路问题	(172)
三、平面图形的周长与面积	(175)
四、立体图形的表面积与体积	(183)
五、集合的元素个数问题	(188)
六、图形的一笔画与哥尼斯堡七桥问题	(191)
习题六	(196)
第七章 小学数学解题策略（五）	(206)
一、逻辑推理问题	(206)
二、抽屉原理及其应用	(211)
三、乘法原理及其应用	(217)

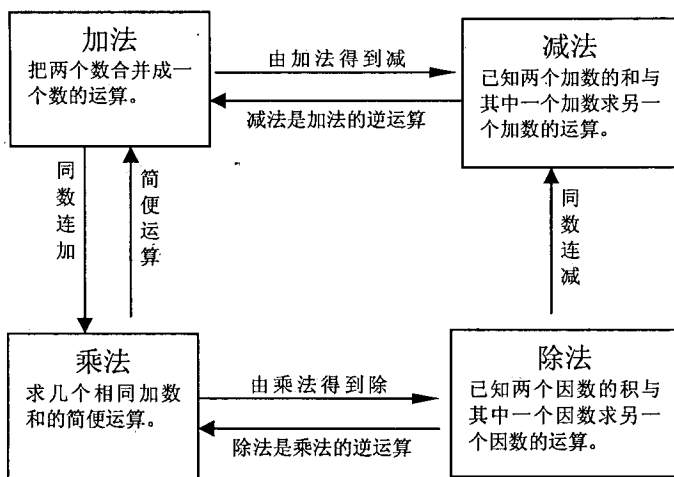
四、加法原理及其应用·····	(221)
五、孙子定理·····	(224)
六、时钟问题·····	(227)
七、“牛吃草”问题·····	(230)
习题七·····	(236)
第八章 小学数学解题策略研究·····	(243)
一、从一道分数证明题看数学思维的问题性·····	(243)
二、盈不足术的思想和方法·····	(249)
三、解题策略是在解题实践中产生的 ——对一道分数应用题解答方法的分析·····	(259)
四、要善于揭示数学问题的一般规律 ——对两道数学思考题解法的探讨·····	(264)
参考答案·····	(270)
主要参考文献·····	(279)

第一章 小学数学解题的一般方法

一、小学数学中常见的数量关系

小学数学所涉及的运算主要是四种：加法、减法、乘法、除法，称为四则运算。另外在小学高年级教学圆的面积和立体图形的体积时，引入乘方的概念。作为小学数学解题的基础，我们首先要搞清四则运算的意义和它们之间的关系，再理解小学数学中的一些基本数学关系。

1. 四则运算的意义和相互之间的关系



2. 加减法和乘除法算式中各部分之间的关系

小学数学加减法、乘除法算式中各部分之间的关系如下，可以作为基本的数量关系。

加法中：和—一个加数=另一个加数

减法中：被减数—差=减数

差+减数=被减数

乘法中：积÷一个因数=另一个因数

除法中：被除数÷商=除数

商×除数=被除数

有余数的除法：商×除数+余数=被除数

3. 小学数学简单应用题的数量关系

围绕小学数学四则运算的基本数量关系，根据解决问题的具体情况，以运算种类为特征，又可以对小学数学应用题进行细致的划分，进一步理解应用题的基本数量关系。在这里我们作简单介绍，供教学研究时参考。

加法的简单应用有 2 种。(1) 求两个数的和。如：小明家养灰兔 6 只，养白兔 4 只。一共养兔多少只？已知两个数：灰兔 6 只，白兔 4 只，求这两个数的和，要用加法计算： $6+4=10$ （只）。(2) 求比一个数多几的数。如：李强家养公鸡 5 只，母鸡比公鸡多 7 只。母鸡有多少只？已知公鸡 5 只，母鸡比公鸡多 7 只，求母鸡有多少只，就是求比 5 多 7 的数是多少。母鸡的只数可以分成两部分，一部分是与公鸡只数同样多的 5 只，另一部分是比公鸡多出的 7 只，合起来就可以算出： $5+7=12$ （只）。

减法的简单应用 3 种。(1) 求剩余。如：小明家一共养了 10 只兔，白兔有 4 只，其余的是灰兔，灰兔有多少只？已知一共养了 10 只兔，白兔是 4 只，其余的是灰兔，求“灰兔有多少只？”就是在 10 只中去掉 4 只，求还剩几只，用减法计算： $10-4=6$ （只）。(2) 求比一个数少几的数。如：李强家养母鸡 12 只，养的母鸡比公鸡多 7 只，养公鸡多少只？求“公鸡有多少只？”就是求比 12 只少 7 只的数： $12-7=5$ （只）。(3) 求两个数相差多少。如：李强家养母鸡 12 只，养公鸡 5 只，养的母鸡比公鸡多多少只？（或养的公鸡比母鸡少多少只？）已知两个数：母鸡 12 只和公鸡 5 只，求它们的相差数“母鸡比公鸡多多少只？”或“养的公鸡比母鸡少多少只？”就是用较大数减去较小数，求出相差数： $12-5=7$ （只）。

乘法的简单应用有 2 种。(1) 求几个相同加数的和。如：学习小

组有 5 个同学，每个同学写 8 个大字，一共写多少个大字？求一共写多少个大字，就是求 5 个 8 是多少，根据乘法含义要用乘法计算： $8 \times 5 = 40$ （个）。(2) 求一个数的几倍是多少。如：学校有 6 棵杨树，柳树的棵数是杨树的 3 倍。柳树有多少棵？杨树有 6 棵，柳树的棵数是杨树的 3 倍，也就是说：柳树的棵数有 3 个杨树的棵数那么多，也就是求 3 个 6 棵是多少棵？列式计算： $6 \times 3 = 18$ （棵）。

除法的简单应用有 4 种。(1) 把一个数平均分成几份，求一份是多少。如：学习小组有 5 个同学，一共写 40 个大字，平均每个同学写几个大字？求平均每个同学写几个大字，也就是把 40 平均分成 5 份，求每份是多少： $40 \div 5 = 8$ （个）。(2) 求一个数包含几个另一个数。如：学习小组同学一共写了 40 个大字，平均每个同学写 8 个大字，学习小组有几个同学？求学习小组有几个同学，就是把 40 个大字每 8 个分一份，有几份就有几个同学。列式计算： $40 \div 8 = 5$ （个）。(3) 求一个数是另一个数的几倍。如：学校有 6 棵杨树，有 18 棵柳树，柳树的棵数是杨树的几倍？在柳树的棵数里面有几个杨树的棵数，就是杨树的几倍。列式计算： $18 \div 6 = 3$ 。(4) 已知一个数的几倍是多少，求这个数。如：学校有 18 棵柳树，柳树的棵数是杨树的 3 倍，杨树有多少棵？已知柳树有 18 棵，柳树的棵数是杨树的 3 倍，求杨树有多少棵，就是把 18 棵平均分成 3 份，每份的棵数就是杨树的棵数。列式计算： $18 \div 3 = 6$ 。

上面的加减乘除的简单应用是以运算种类为特征划分的，分为 11 种情况。如果从各部分量之间的联系（内在联系）的角度思考，上面的简单应用题还可以归纳为 4 种数量关系。

相并关系（部分量与总量的关系）：(1) 求两个数的和；(2) 求剩余。

相差关系（两数相比较的关系，相差）：(1) 求比一个数多几的数；(2) 求比一个数少几的数；(3) 求两个数相差多少。

份总关系（每份数与总量的关系）：(1) 求几个相同加数的和；(2) 把一个数平均分成几份，求一份是多少（平均除）；(3) 求一个数包含几个另一个数（包含除）。

倍数关系（两数相比较的关系，倍数）：(1) 求一个数的几倍是多

少；②求一个数是另一个数的几倍；③已知一个数的几倍是多少，求这个数。

对以上4种数量关系11种情况从教学论的角度讲，可以作为一个研究思路，但在教学中要慎重考虑。因为对教学内容的处理过于繁琐，教学反而会增加学习负担。针对小学数学加减乘除的简单应用，只要我们在教学过程中，从一年级学生开始抓起，逐步引导学生理解基本数量关系，正确掌握解题方法就可以为数学解题以及解答复合应用题打好基础。

4.四则运算和混合运算顺序的规定

(1)四则运算加、减、乘、除都有严格的计算法则（计算法则略）。规定：加、减法是第一级运算，乘、除法是第二级运算。另外，小学数学中的乘方运算是第三级运算。

(2)四则混合运算。同级运算，从左到右依次计算；既有加减，又有乘除，先乘除后加减。有小括号的先做小括号里面的；有中括号，先做小括号，后做中括号里面的。

5.小学数学应用题中常见的的基本数量关系

结合日常生活与生产实践的实际问题，在小学数学应用过程中经常用到下面的基本数量关系：

单价 $\times$ 数量=总价，路程 $\div$ 时间=速度，工作总量 $\div$ 工作时间=工作效率。

应用乘、除法算式中各部分之间的关系，可以用这些基本数量关系表达另外的关系式。

6.运算定律和运算性质

小学数学中的运算定律、运算性质以及和、差、积、商的变化规律都是进行具体计算或进行简便计算的根据。

(1) 小学数学中的运算定律

加法交换律： $a+b=b+a$

加法结合律： $(a+b)+c=a+(b+c)$

乘法交换律： $a\times b=b\times a$

乘法结合律： $(a\times b)\times c=a\times (b\times c)$

乘法分配律： $(a+b) \times c = a \times c + b \times c$

(2) 小学数学中的运算性质

$$a-b-c=a-(b+c)$$

$$a \div b \div c = a \div (b \times c)$$

(3) 和、差、积、商的变化规律

和的变化规律：①如果一个加数增加（或减少）一个数，另一个加数不变，那么它们的和也增加（或减少）同一个数。②如果一个加数增加一个数，另一个加数减少同一个数，那么它们的和不变。

差的变化规律：①如果被减数增加（或减少）一个数，减数不变，那么它们的差也增加（或减少）同一个数。②如果减数增加（或减少）一个数，被减数不变，那么它们的差反而减少（或增加）同一个数。③如果被减数和减数同时增加（或减少）同一个数，那么它们的差不变。

积的变化规律：①如果一个因数扩大（或缩小）若干倍，另一个因数不变，那么它们的积也扩大（或缩小）同数倍。②如果一个因数扩大若干倍，另一个因数缩小若干倍，那么它们的积不变。

商的变化规律：①如果被除数扩大（或缩小）若干倍，除数不变，那么它们的商也扩大（或缩小）同数倍。②如果除数扩大（或缩小）若干倍，被除数不变，那么它们的商反而缩小（或扩大）同数倍。③如果被除数和除数都扩大（或缩小）同数倍，那么它们的商不变。④在有余数的除法中，如果被除数和除数都扩大（或缩小）同数倍，那么它们的商不变，但是余数要随着扩大（或缩小）同数倍。

综上所述，小学数学中的数量关系有运算含义引出的基本数量关系，也有在实际应用中的基本数量关系，抓住基本数量关系就可以分析和解决数学问题。

我们知道，由于数学的抽象性、数学应用的广泛性，决定了在数学教学中数量关系的复杂性。但是，如果我们能够把握小学数学中基本数量关系，根据数学知识的具体应用理解这些数量关系所特有的内涵和外延所概括出的规律性，就能够掌握那些千变万化、丰富多彩的数学规律，解决数学问题。反过来，根据这些规律性和解决一些数学