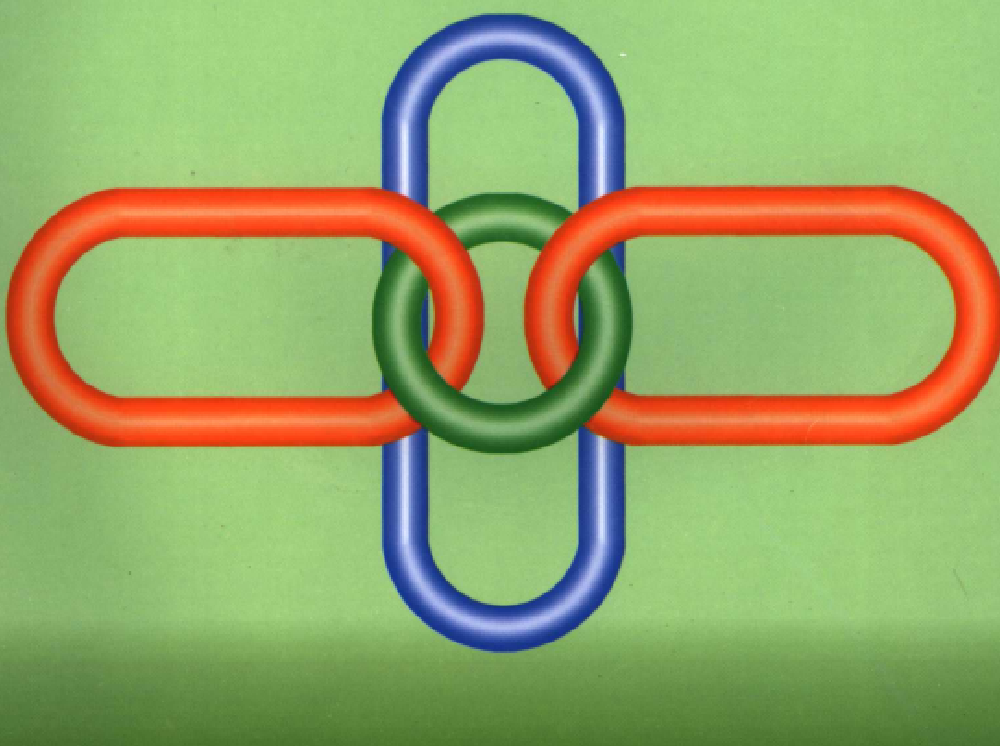
Junior Mathematical Olympiads

奥数精讲与测试

六年级

熊斌 冯志刚 主编
何强 沈军 袁海斌 田雨 编著



学林出版社

Junior Mathematical Olympiads

熊斌

中国数学奥林匹克委员会委员，第45届IMO中国队主教练，第46届IMO中国队领队（中国队在这两次比赛中均取得团体第一），华东师范大学数学系硕士生导师。中国数学奥林匹克高级教练，《数学通讯》“数学竞赛”专栏主持人，《数学教学》、《数理天地》编委、记者。多次担任中国数学奥林匹克国家集训队教练，指导多名学生在IMO上获得金牌，参与全国初中数学竞赛、全国高中数学联赛、西部数学奥林匹克、女子数学奥林匹克、希望杯全国数学邀请赛、中国数学奥林匹克（CMO）、国际青少年城市数学邀请赛的命题工作。在国内外杂志发表文章80多篇，编著、翻译、主编著作百余本，其中与单墫共同主编的《奥数教程》发行尤广，此外还主持编写了相关的电子教材。

冯志刚

理学硕士。上海市上海中学特级教师，中国数学奥林匹克高级教练。长期从事数学竞赛的教学、研究与命题工作，参与西部数学奥林匹克的命题工作，擅长代数与数论。所教学生中累计有2人获IMO金牌，30余人进入国家集训队，40多人次在中国数学奥林匹克（CMO，即“冬令营”）上获奖，200余人获全国高中数学联赛一等奖。作为2003年中国队副领队带队参加了第44届IMO并取得优异成绩，主编或参编十余套竞赛方面的读物，著作有《奥数教程》、《数学奥林匹克一讲一练》、《赛前集训》、《高中竞赛数学教程》、《数学奥赛导引》、《数学归纳法的证明方法与技巧》、《整除、同余与不定方程》，译有《解决问题的策略》等。

上架建议：初中数学奥数

ISBN 978-7-80730-426-5

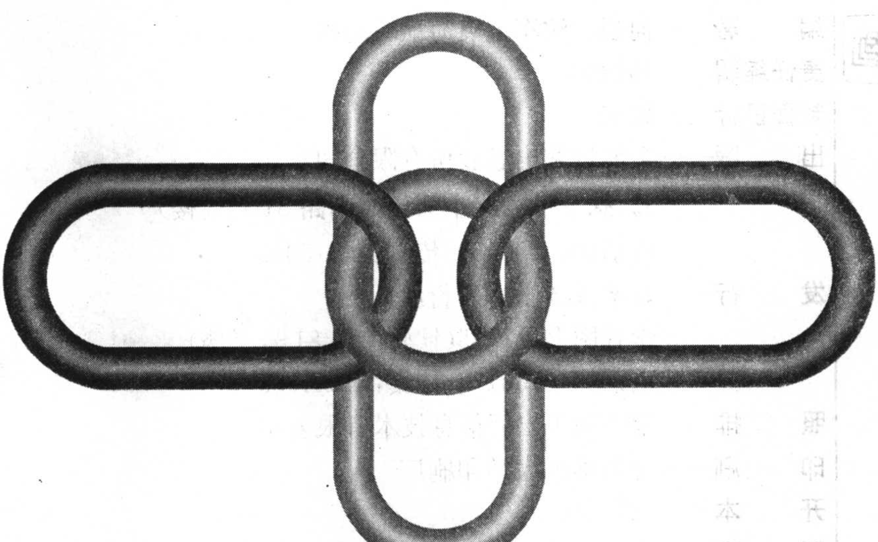
9 787807 304265 >

定价 23.00 元

奥数精讲与测试

六年级

熊斌 冯志刚 主编
何强 沈军 袁海斌 田雨 编著



学林出版社

图书在版编目(CIP)数据

奥数精讲与测试·六年级/熊斌，冯志刚主编；何强等编著. —上海：学林出版社，2007.10

ISBN 978-7-80730-426-5

Ⅰ. 奥… Ⅱ. ①熊…②冯…③何… Ⅲ. 数学课-小学-教学参考资料 Ⅳ. G624.203

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 121350 号

奥数精讲与测试·六年级

编　　著——何强　沈军　袁海斌　田雨
责任编辑——马健荣
封面设计——魏来
出　　版——上海世纪出版股份有限公司
学林出版社(上海钦州南路 81 号 3 楼)
电话：64515005　传真：64515005
发　　行——新华书店上海发行所
学林图书发行部(钦州南路 81 号 1 楼)
电话：64515012　传真：64844088
照　　排——南京理工出版信息技术有限公司
印　　刷——上海师范大学印刷厂
开　　本——787×1092　1/16
印　　张——15.25
字　　数——27 万
版　　次——2007 年 10 月第 1 版
2007 年 10 月第 1 次印刷
印　　数——8 000 册
书　　号——ISBN 978-7-80730-426-5/G·121
定　　价——23.00 元

前言

我们都知道数学是科学之母，在科技迅速发展的今天，数学的重要性尤为明显。由于人们深刻地了解到数学的重要性，也意识到应当尽早培养青少年学生对数学的兴趣与数学思维的习惯，因此举办了许多内容丰富的数学活动，数学奥林匹克竞赛就是这些丰富多彩的活动中的一项。

数学奥林匹克竞赛对于激发学生的学习兴趣、开发智力、培养创新能力、开拓视野有着非常积极的作用。通过开展数学奥林匹克竞赛活动，可以更好地发现和培养优秀学生，并能提高教师的水平，促进教学改革，为我国数学事业的长期发展提供源源不断的生力军。

本套丛书从小学一年级至高中三年级共12册，将数学奥林匹克竞赛的内容以精讲和测试的形式系统地组织起来，目的是为学生提供一套强化知识、提高数学素养和能力的教材，让学生通过对这套教材的学习，具备和提高参加各种数学竞赛的知识和能力，使学生不仅能把自己课内的成绩提高，而且能在各级各类数学竞赛中取得理想的成绩。

本书的每一讲都有“精讲”和“测试ABC卷”组成，分设三部分内容：

1. 竞赛热点、考点、知识点。将数学奥林匹克竞赛的知识、内容以及当前的热点问题和历届数学奥林匹克竞赛中经常出现的问题给予分析、归纳、阐述和总结。

2. 典型例题精讲。围绕数学竞赛的热点、考点，选择典型的例题，提高对典型例题的分析、讲解，使学生能够掌握基本思想和基本方法，进而提高分析问题和解决问题的能力。

3. 测试ABC卷。有针对性地选择一些名题、新题、好题给学生练习。A卷是“精讲”内容的延伸与拓展，题目难度较小；B卷进一步加强数学竞赛的基本功，突出了解题的基本技巧与方法；C卷是为准备在数学奥林匹克竞赛

中取得优异成绩的同学设计的，题目具有一定的挑战性，是学生发挥自己的创造性、一显身手的试金石。

作者希望同学们在使用本书后，视野开阔了，数学素养提高了，解题与应试的能力加强了，不仅能在课内考试脱颖而出，也能在数学奥林匹克竞赛中出类拔萃。

参加本套丛书编写的作者都是长期在数学竞赛辅导第一线的富有经验的教师，有中国数学奥林匹克国家队的领队、副领队、主教练，还有多次参与各级各类数学竞赛命题的专家，他们丰富的教学经验为本套丛书增色不少。

让我们尽情地享受数学的乐趣，积极地参与数学奥林匹克竞赛吧！

目 录

第 1 讲　分数的计算

知识点、重点、难点

分数计算是小学数学的重要组成部分，也是数学竞赛的重要内容之一.

分数计算同整数计算一样，既有知识要求又有能力要求. 法则、定理、性质是进行计算的依据，要使计算快速、准确，关键在于掌握运算技巧. 对于复杂的分数运算题，常用的方法和技巧是通分、约分、凑整、分解、分拆等.

例题精讲

例1　计算 $19+9\frac{1}{2}+7\frac{1}{4}+3\frac{1}{8}+8\frac{1}{16}+4\frac{1}{32}$.

解　原式 $=(19+9+7+3+8+4)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}\right)$

$$=50+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{32}\right)-\frac{1}{32}$$

$$=50+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}\right)-\frac{1}{32}$$

$$=50+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)-\frac{1}{32}$$

$$=50+1-\frac{1}{32}$$

$$=50\frac{31}{32}.$$

例2 计算 $\dfrac{1\,999\times(3.4\times69+3.5)}{3.5\times69-3.4}$.

分析 可以清楚地看到分子的括号部分与分母可以通过乘法意义转化成同一个算式,从而使计算简便.

解 原式 $=1\,999\times\dfrac{3.4\times69+3.5}{(3.4+0.1)\times69-3.4}$

$$=1\,999\times\frac{3.4\times69+3.5}{3.4\times69+6.9-3.4}$$

$$=1\,999\times\frac{3.4\times69+3.5}{3.4\times69+3.5}$$

$$=1\,999.$$

例3 计算 $\dfrac{1}{4}\left(4.85\div\dfrac{5}{18}-3.6+6.15\times3\dfrac{3}{5}\right)+\left[5.5-1.75\times\left(1\dfrac{2}{3}+\dfrac{19}{21}\right)\right]$.

分析 若按部就班,计算的复杂性是可想而知的.通过观察,$3.6=\dfrac{18}{5}$,$3\dfrac{3}{5}=\dfrac{18}{5}$.因此在第一个括号中,可以把$\dfrac{18}{5}$提取出来,再计算.

解 原式 $=\dfrac{1}{4}\left(4.85\times\dfrac{18}{5}-\dfrac{18}{5}+6.15\times\dfrac{18}{5}\right)+\left[5.5-1.75\times\dfrac{54}{21}\right]$

$$=\frac{1}{4}\times\frac{18}{5}\times(4.85-1+6.15)+(5.5-4.5)$$

$$=\frac{1}{4}\times\frac{18}{5}\times10+1=9+1=10$$

例4 计算 $1-\left(\dfrac{101\,010}{202\,020}\right)^2\times\left(\dfrac{202\,020}{303\,030}\right)^2\times\left(\dfrac{333\,033}{505\,050}\right)^2\times\left(\dfrac{555\,555}{777\,777}\right)^2$.

解 仔细观察,可以发现每个分数都可以约分,于是

原式 $=1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^2\times\left(\dfrac{3}{5}\right)^2\times\left(\dfrac{5}{7}\right)^2$

$$=1-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}\times\frac{5}{7}\times\frac{5}{7}$$

$$=1-\frac{1}{49}$$

$$=\frac{48}{49}.$$

例5 计算 $\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)\times\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)\times\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)$.

分析 把相同的算式用同一个字母表示，先进行字母运算，得到最简单的字母表达式，再把原算式代入，这是常用的一种巧妙的方法.

解 令 $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=B$，$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=A$.

$$\begin{aligned}\text{原式}&=(1+B)\times A-(1+A)\times B\\&=A+AB-B-AB\\&=A-B.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{所以原式}&=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)\\&=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\\&=\frac{1}{5}.\end{aligned}$$

例6 计算 $\left(1\frac{5}{99}+3\frac{5}{33}+9\frac{5}{11}\right)\div\left(1\frac{1}{99}+3\frac{1}{33}+9\frac{1}{11}\right)$.

分析 由于 $99=33\times3=11\times9$，因此可以把两个括号内的数分拆成正整数与分数的和，这样就有公因数 $(1+3+9)$.

解

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\left[(1+3+9)+\left(\frac{5}{99}+\frac{5}{33}+\frac{5}{11}\right)\right]\div\left[(1+3+9)+\left(\frac{1}{99}+\frac{1}{33}+\frac{1}{11}\right)\right]\\&=\left[(1+3+9)+\frac{5}{99}(1+3+9)\right]\div\left[(1+3+9)+\frac{1}{99}(1+3+9)\right]\\&=\left[(1+3+9)\times\left(1+\frac{5}{99}\right)\right]\div\left[(1+3+9)\times\left(1+\frac{1}{99}\right)\right]\\&=\left(1+\frac{5}{99}\right)\div\left(1+\frac{1}{99}\right)\\&=\frac{104}{99}\div\frac{100}{99}\\&=\frac{26}{25}.\end{aligned}$$

水平测试1

A 卷

一、填空题

1. 计算 $1\,992\frac{1}{2}-1\frac{1}{3}+2\frac{1}{2}-3\frac{1}{3}+4\frac{1}{2}-5\frac{1}{3}+\cdots+1\,990\frac{1}{2}-1991\frac{1}{3}=$ ________.

2. 计算 $1-\frac{1}{2}-\frac{1}{20}-\frac{1}{200}-\frac{1}{2\,000}-\frac{1}{20\,000}=$ ________.

3. 计算 $\left(1+\frac{7}{33}\right)+\left(1+\frac{7}{33}\times 2\right)+\left(1+\frac{7}{33}\times 3\right)+\cdots+\left(1+\frac{7}{33}\times 10\right)+\left(1+\frac{7}{33}\times 11\right)=$ ________.

4. 计算 $1\frac{1}{2}+2\frac{1}{3}+3\frac{1}{4}+4\frac{1}{5}+5\frac{1}{6}+6\frac{1}{7}+7\frac{1}{8}=$ ________.

5. 计算 $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}+\frac{1}{56}=$ ________.

6. 计算 $\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\frac{1}{60}+\frac{1}{40}=$ ________.

7. 计算 $\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}=$ ________.

8. 计算 $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{2}{3}+\frac{1}{4}+\frac{2}{4}+\frac{3}{4}+\frac{1}{5}+\frac{2}{5}+\cdots+\frac{1}{50}+\frac{2}{50}+\cdots+\frac{49}{50}=$ ________.

9. 计算 $\frac{1}{2}-\frac{1}{6}-\frac{1}{12}-\frac{1}{20}-\frac{1}{30}-\frac{1}{42}=$ ________.

10. 计算 $\frac{1}{5\times 7}+\frac{1}{7\times 9}+\frac{1}{9\times 11}+\frac{1}{11\times 13}+\frac{1}{13\times 15}=$ ________.

二、解答题

11. 计算 $\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)\times\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)\times\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)$.

12. 计算 $99\frac{3}{4}+199\frac{3}{4}+2\,999\frac{3}{4}+39\,999\frac{3}{4}+1$.

13. 计算 $7\frac{5}{6}-6\frac{7}{12}+5\frac{9}{20}-4\frac{11}{30}+3\frac{13}{42}-2\frac{15}{56}+1\frac{17}{72}$.

B 卷

一、填空题

1. 计算 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}=$ ________.

2. 计算 $1+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\cdots+\frac{1}{1+2+\cdots+10}=$ ________.

3. 计算 $\left[\left(\frac{49}{12}-\frac{63}{20}+\frac{77}{30}-\frac{91}{42}+\frac{105}{56}\right)-3\frac{1}{6}\right]\div\frac{1}{24}=$ ________.

4. 计算 $1+3\frac{1}{6}+5\frac{1}{12}+7\frac{1}{20}+9\frac{1}{30}+11\frac{1}{42}=$ ________.

5. 计算 $\frac{1}{1\times4}+\frac{1}{4\times7}+\frac{1}{7\times10}+\frac{1}{10\times13}+\cdots+\frac{1}{97\times100}=$ ________.

6. 计算 $\frac{1\,994}{1\,994^2-1\,993\times1\,995}+6=$ ________.

7. 有 30 个数：1.65，$1.65+\frac{1}{30}$，$1.65+\frac{2}{30}$，…，$1.65+\frac{28}{30}$，$1.65\frac{29}{30}$. 如果取每个数的整数部分，并将这些数相加，那么其和是________.

8. 计算 $\frac{1\,999\times(3.4\times69+3.5)}{3.5\times69-3.4}=$ ________.

9. 计算 $\frac{1.2\times3.6\times10.8+2\times6\times18+\frac{1}{13}\times\frac{3}{13}\times\frac{9}{13}}{1.2\times2.4\times4.8+2\times4\times8+\frac{1}{13}\times\frac{2}{13}\times\frac{4}{13}}=$ ________.

10. 计算 $1-\left(\frac{101\,010}{202\,020}\right)^2\times\left(\frac{202\,020}{303\,030}\right)^2\times\left(\frac{333\,033}{555\,055}\right)^2\times\left(\frac{5\,555\,555}{7\,777\,777}\right)^2=$ ________.

二、解答题

11. 计算 $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{31}+\frac{1}{62}+\frac{1}{124}+\frac{1}{248}+\frac{1}{496}$.

12. 求下列所有分母不超过 40 的真分数的和

$\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{2}{4}+\frac{3}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{40}+\frac{2}{40}+\cdots+\frac{38}{40}+\frac{39}{40}\right)$.

C　卷

一、填空题

1. 计算 $\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}+\frac{1}{63}+\frac{1}{99}=$ ______.

2. 计 算 $\left(1+\frac{1}{2}\right)\times\left(1+\frac{1}{4}\right)\times\left(1+\frac{1}{6}\right)\times\left(1+\frac{1}{8}\right)\times\left(1+\frac{1}{10}\right)\times\left(1-\frac{1}{3}\right)\times\left(1-\frac{1}{5}\right)\times\left(1-\frac{1}{7}\right)\times\left(1-\frac{1}{9}\right)=$ ______.

3. 计算 $\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{24}+\frac{1}{48}+\frac{1}{96}+\frac{1}{192}+\frac{1}{384}\right)\times128=$ ______.

4. 计算 $\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{2}{4}+\frac{3}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{60}+\frac{2}{60}+\cdots+\frac{58}{60}+\frac{59}{60}\right)=$ ______.

5. 计算 $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{1\,997}\right)\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{1\,996}\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{1\,997}\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{1\,996}\right)$.

6. 已知 $\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$ 且 $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1\,993}{1\,994}$，$n=$ ______.

7. 计算 $\left(\frac{531}{135}+\frac{579}{357}+\frac{753}{975}\right)\times\left(\frac{579}{357}+\frac{753}{975}+\frac{135}{531}\right)-\left(\frac{531}{135}+\frac{579}{357}+\frac{753}{975}+\frac{135}{531}\right)\times\left(\frac{579}{357}+\frac{753}{975}\right)=$ ______.

8. 按一定规律排着一串数：$\frac{1}{1}$，$\frac{1}{2}$，$\frac{2}{2}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{2}{3}$，$\frac{3}{3}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{2}{4}$，$\frac{3}{4}$，$\frac{4}{4}$，…，$\frac{1}{100}$，$\frac{2}{100}$，$\frac{3}{100}$，…，$\frac{99}{100}$，$\frac{100}{100}$. 这些数的总和 = ______.

9. 和式

$$\frac{2}{1\times(1+2)}+\frac{3}{(1+2)\times(1+2+3)}+\frac{4}{(1+2+3)\times(1+2+3+4)}$$

$$+\cdots+\frac{100}{(1+2+3+\cdots+99)\times(1+2+\cdots+100)}$$

计算化简后得到一个最简分数,分母与分子之差为________.

10. $1+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\cdots+\frac{1}{1+2+\cdots+100}=$________.

二、解答题

11. 计算 $1\,949\times\left(\frac{1}{47}-\frac{1}{1\,996}\right)+47\times\left(\frac{1}{1\,949}-\frac{1}{1\,996}\right)-1\,996\times\left(\frac{1}{1\,949}+\frac{1}{47}\right)+1\,003$.

12. 计算 $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots+\frac{1}{3^{99}}+\frac{1}{3^{100}}$.

13. 计算 $\frac{(10^4+64)(18^4+64)(26^4+64)(34^4+64)}{(6^4+64)(14^4+64)(22^4+64)(30^4+64)}$.

14. 计算 $\frac{7^2+1}{7^2-1}+\frac{9^2+1}{9^2-1}+\frac{11^2+1}{11^2-1}+\cdots+\frac{99^2+1}{99^2-1}$.

第 2 讲　分数的大小比较

知识点、重点、难点

比较两个分数的大小，有两种基本方法. 第一种是：如果两个分数分母相同，分子大的分数较大；第二种是：如果两个分数分子相同，分母小的分数较大；或者统一分母，或者统一分子，再进行比较.

有时候可另辟蹊径，例如相减比较，如果差大，那么减数就小；相除比较，若商是真分数，则被除数小于除数，若商是假分数，则被除数大于除数；交叉相乘比较，分数$\frac{a}{b}$和$\frac{c}{d}$(b, d 都大于 0)，如果 $ad > bc$，那么$\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$；倒数比较，倒数大的分数小于倒数小的分数；化为小数或循环小数比较等等.

在解题中必须认真分析，要学会多角度、多侧面思考问题，灵活动用解题方法，不断开拓解题思路，提高解题能力.

例题精讲

分数$\frac{5}{12}$、$\frac{12}{19}$、$\frac{10}{23}$、$\frac{4}{7}$、$\frac{15}{22}$中，哪一个最大?

这五个分数的分子和分母都不相同，如果统一分母，显然计算量大. 统一分子，可以看出分子的最小公倍数是$[5, 12, 10, 4, 15] = 60$，于是统一分子后比较好算.

解　把五个分数的分子变成相同，得

$$\frac{5}{12} = \frac{60}{144}, \frac{12}{19} = \frac{60}{95}, \frac{10}{23} = \frac{60}{138}, \frac{4}{7} = \frac{60}{105}, \frac{15}{22} = \frac{60}{88}.$$

根据分数的性质，分子相同的分数，分母小的分数大，所以这五个分数中最

大的分数是$\frac{15}{22}$.

例2 比较$\frac{666\,665}{666\,667}$和$\frac{777\,776}{777\,778}$的大小.

分析 这两个分数的分子和分母都很接近,且都相差 2. 先分别求出和为 1 的另一个分数,比较两个分子相同的分数,再比较原来的两个分数.

解 因为 $\frac{666\,665}{666\,667}=1-\frac{2}{666\,667}$, $\frac{777\,776}{777\,778}=1-\frac{2}{777\,778}$,

而
$$\frac{2}{666\,667}>\frac{2}{777\,778},$$

所以
$$1-\frac{2}{666\,667}<1-\frac{2}{777\,778},$$

即
$$\frac{666\,665}{666\,667}<\frac{777\,776}{777\,778}.$$

例3 若 $A=\frac{1}{1\,998^2-1\,998+1}$, $B=\frac{1}{1\,998^2-1\,997\times1\,998+1\,997^2}$, 比较 A 与 B 的大小.

解 由于这两个分数的分子都是 1,只要比较这两个分数分母的大小就可以了. 分数 B 的分母为

$$1\,998^2-1\,997\times1\,998+1\,997^2=1\,998^2+1\,997^2-1\,997\times1\,998$$
$$=1\,998^2+1\,997(1\,997-1\,998)$$
$$=1\,998^2-1\,997$$
$$=1\,998^2-1\,998+1.$$

与分数 A 的分母相同,所以分数 A 与分数 B 的大小相等.

例4 在下列方框内填两个相邻的整数,使不等式成立

$$\square<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}<\square.$$

解 因为 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=2$, 所以

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}$$

$$=2+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}$$

$$=2+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{10}\right)+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}$$

$$<2+\frac{3}{8}+\frac{3}{10}+\frac{1}{5}+\frac{1}{8}$$

$$=2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$$

$$=3.$$

因此上面两个方框内应分别填 2 和 3，即

$$\boxed{2}<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}<\boxed{3}.$$

例 5　设 $N=10\times\frac{2\,000^{2\,001}+2\,001^{2\,002}}{2\,000^{2\,000}+2\,001^{2\,001}}$，求 N 的整数部分.

解　记 $A=2\,000^{2\,000}$，$B=2\,001^{2\,001}$，则 $\frac{2\,000^{2\,001}+2\,001^{2\,002}}{2\,000^{2\,000}+2\,001^{2\,001}}=\frac{2\,000A+2\,001B}{A+B}=2\,000+\frac{B}{A+B}<2\,001$，所以 $N<10\times2\,001=20\,010$. 又 $B=2\,001^{2\,001}=2\,001\times2\,001^{2\,000}>2\,001A>9A$，即 $A<\frac{1}{9}B$，所以 $\frac{B}{A+B}>\frac{B}{\frac{1}{9}B+B}=0.9$，从而 $N>10\times(2\,000+0.9)=20\,009$. 所以 N 的整数部分是 $20\,009$.

例 6　设 A 是一个整数，求 A，使得下面等式成立，

$$A<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}<A+1.$$

因为 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=2$，而

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}$$

$$=2+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}$$