



2008 知识树考研

全国硕士研究生入学统一考试

数学过关基本题型

(数学三、四)

✧ 文登培训学校策划 ✧

主编 / 陈文灯 副主编 / 陈启浩

专为基础薄弱 时间不足的考生打造
立足历年真题 思路方法简洁实用
现学现练 精选试题供考生演练

 北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS



2008 知识树考研

全国硕士研究生入学统一考试

数学过关基本题型

(数学三、四)

主编 / 陈文灯 副主编 / 陈启浩



北京理工大学出版社

BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

版权专有 侵权必究

图书在版编目(CIP)数据

数学过关基本题型. 3、4 / 陈文灯主编. —北京:
北京理工大学出版社, 2007. 4 (2007. 4 重印)
(知识树考研)
ISBN 978 - 7 - 5640 - 1035 - 5

I. 数... II. 陈... III. 高等数学 - 研究生 - 入学考试 -
习题 IV. O13 - 44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 037864 号

出版发行 / 北京理工大学出版社

社 址 / 北京市海淀区中关村南大街 5 号

邮 编 / 100081

电 话 / (010)68914775(办公室) 68944990(批销中心) 68911084(读者服务部)

网 址 / <http://www.bitpress.com.cn>

经 销 / 全国各地新华书店

印 刷 / 北京地质印刷厂

开 本 / 787 毫米 × 1092 毫米 1/16

印 张 / 21

字 数 / 500 千字

版 次 / 2007 年 4 月第 1 版 2007 年 4 月第 2 次印刷

定 价 / 38.00 元

图书出现印装质量问题,本社负责调换

前 言

在近年的考研辅导中,有很多考生向我们反映,自己的基础比较薄弱,学习起来比较困难,难以迅速提高成绩.还有的考生是在职人员,工作非常繁忙,没有很多时间可以支配,希望能有一本考研数学速成书.如何帮助考生在短时间内取得好的学习效果,达到硕士生入学考试数学的分数线,这就是我们研发此书的初衷和愿望.

本书结合我们多年来的考研数学辅导经验编写而成.针对每个题型,设置了以下几个栏目:

- (1) **■考试概况**:给出 1987 年以来各题型在数学三、数学四试卷中的考查情况:填空题、单项选择题和计算题中出现的频率.
- (2) **■思路点拨**:针对各题型给出了相应的解题思路和方法,简洁而实用.
- (3) **■实例精讲**:根据真题难度和题型设置了典型例题,并给出了详细讲解,供考生学习模拟之用.
- (4) **■现学现练**:精选相应试题供考生进行实战演练.
- (5) **■要点补充**:对一些题型依据需要给出补充注释,帮助考生加强对题型的理解.

考生通过阅读本书,不但能了解历年试卷中试题在高等数学、线性代数、概率论与数理统计等三门课程中的分布情况和难度,而且能够掌握各种基本题型的解题思路和方法.通过对真题的认真演练,揭开考研数学的神秘面纱,达到考试时胸有成竹、应对自如的境界.

成书仓促,并请考研朋友和数学同仁予以指正.

陈文灯

目 录

微积分篇

第1章 函数、极限和连续	(1)
题型1 函数的定义域或值域的求解	(1)
题型2 求复合函数的表达式	(2)
题型3 函数有界性、单调性、周期性和奇偶性等函数的性质的判别或证明	(3)
题型4 函数极限存在性的判定和求解	(4)
题型5 求数列的 n 项和或积的极限	(5)
题型6 极限式中含有 $a + \sqrt{b}$ 或 $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ 形式的极限	(6)
题型7 求 $0/0$ 型极限	(7)
题型8 求 ∞/∞ 型极限	(8)
题型9 求 $\infty - \infty$ 型极限	(9)
题型10 求 $0 \cdot \infty$ 型极限	(10)
题型11 求 1^∞ 型极限	(10)
题型12 求 0^0 型, ∞^0 型极限	(11)
题型13 极限式中常数值的确定	(12)
题型14 无穷小的比较和确定无穷小的阶或求常数	(13)
题型15 讨论函数的连续性或已知函数的连续性反求常数	(14)
题型16 函数间断点的判别或求解	(16)
参考答案	(17)
第2章 导数与微分	(21)
题型1 已知函数在一点可导,求与之相关的函数式的极限或表达式	(21)
题型2 函数在一点是否可导的判定或求解或逆问题求解	(22)
题型3 求一元复合函数的导数或微分	(24)
题型4 求一元隐函数的导数或微分	(26)
题型5 求函数表达式为若干因子连乘积、乘方、开方或商形式的函数的导数或微分	(26)
题型6 求函数的 n 阶导数	(27)
参考答案	(28)
第3章 一元函数积分学	(31)
题型1 与原函数定义、性质相关的命题	(31)

题型 2 求有理函数的不定积分	(32)
题型 3 求含根式的不定积分	(34)
题型 4 求三角有理式的不定积分	(35)
题型 5 求含有反三角函数的不定积分	(35)
题型 6 求抽象函数的不定积分	(36)
题型 7 求定积分或已知定积分反求参数	(37)
题型 8 求分段函数或含绝对值符号的变限积分或定积分	(39)
题型 9 求变限积分的导数(有一部分在求极限中考查)	(40)
题型 10 计算广义积分	(41)
题型 11 广义积分的判敛	(42)
参考答案	(44)
第 4 章 中值定理	(48)
题型 1 方程根存在性的证明	(48)
题型 2 至少存在一点 ξ , 使 $f'(\xi) = 0$ 或 $f''(\xi) = 0$ 的证明	(49)
题型 3 至少存在一点 ξ , 使含 $f'(\xi)$ 的代数式成立的证明	(50)
题型 4 至少存在两点 ξ, η , 使某个关系式成立的证明	(52)
题型 5 定积分等式的证明	(53)
参考答案	(55)
第 5 章 多元函数微分学	(58)
题型 1 求多元复合函数的偏导数	(58)
题型 2 求多元隐函数的偏导数	(59)
题型 3 求全微分	(62)
参考答案	(63)
第 6 章 二重积分	(65)
题型 1 被积分域为矩形、三角形或任意形的二重积分的计算	(65)
题型 2 被积分域为圆域、环域、扇域、环扇域且被积函数形如 $f(x^2 + y^2)$, $f\left(\frac{x}{y}\right)$, $f\left(\frac{y}{x}\right)$ 的 二重积分的计算	(67)
题型 3 交换二重积分的积分次序或直角坐标与极坐标的转化	(68)
题型 4 求无界区域上的二重积分	(70)
参考答案	(71)
第 7 章 无穷级数	(74)
题型 1 无穷级数敛散性的判定或证明	(74)
题型 2 求函数项级数的收敛域, 求幂级数的收敛域或收敛半径	(76)
题型 3 函数的幂级数展开	(78)
题型 4 求无穷级数的和(常与微分方程或极值一起出题)	(80)
参考答案	(82)
第 8 章 常微分方程与差分方程	(85)
题型 1 求一阶可分离变量方程, 一阶齐次方程或可化为齐次方程的通解或特解	(85)
题型 2 求一阶线性方程的通解或特解	(87)

题型 3 求二阶齐次或非齐次线性微分方程的通解或特解	(88)
题型 4 求一阶差分方程的通解或特解	(90)
参考答案	(91)
第 9 章 函数方程与不等式证明	(93)
题型 1 根据函数方程式求函数表达式	(93)
题型 2 函数方程中含有极限式, 求解函数表达式	(93)
题型 3 已知函数在一点的导数及函数方程, 求解函数表达式	(94)
题型 4 已知函数方程中含有变上限积分或导函数, 求函数表达式	(95)
题型 5 已知函数连续, 且函数式中含函数的定积分、极限或二重积分, 求函数表达式	(96)
题型 6 存在一个点 $\xi \in (a, b)$, 使得不等式成立或不等式通过变形, 一端可写成 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ 或 $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-f(a)}$ 的不等式的证明	(98)
题型 7 在某一区间 (a, b) 不等式命题成立的证明	(99)
题型 8 积分不等式的证明	(100)
题型 9 杂例	(102)
参考答案	(102)

线性代数篇

第 1 章 行列式	(106)
题型 1 抽象行列式的计算	(106)
题型 2 低阶行列式的计算	(108)
题型 3 n 阶行列式的计算	(110)
参考答案	(114)
第 2 章 矩阵	(117)
题型 1 与矩阵的乘积等运算相关的命题	(117)
题型 2 与初等变换或初等矩阵相关的命题	(118)
题型 3 矩阵秩的运算或已知矩阵的秩反求矩阵中的参数或其他	(119)
题型 4 有关矩阵可逆的证明	(121)
题型 5 求矩阵的逆或已知矩阵的逆反求参数	(122)
题型 6 有关伴随矩阵的判定或证明	(125)
题型 7 解矩阵方程	(126)
参考答案	(128)
第 3 章 向量	(131)
题型 1 求向量组的秩或极大线性无关组或根据向量组的秩求向量中的参数	(131)
题型 2 向量组的线性相关性的判定或根据向量相关性求参数	(134)
题型 3 向量组的线性表示的命题的判定或讨论	(137)
参考答案	(139)

第4章 线性方程组	(143)
题型1 与解的性质、判定和结构相关的命题	(143)
题型2 有关基础解系的证明或判定	(146)
题型3 求不含参数的线性方程组的通解	(148)
题型4 含参数的线性方程组的解的讨论	(150)
题型5 抽象方程组的通解	(152)
题型6 有关两个方程组的公共解的求解或证明	(153)
参考答案	(156)
第5章 特征值与特征多项式	(162)
题型1 求数值矩阵的特征值和特征向量	(162)
题型2 求抽象矩阵的特征值和特征向量	(164)
题型3 已知矩阵的特征值和特征向量,反求矩阵和行列式等问题	(166)
题型4 有关矩阵相似和对角化的命题	(169)
题型5 有关特征值和特征向量的证明题	(172)
参考答案	(174)
第6章 二次型	(179)
题型1 有关二次型所对应的矩阵、秩、正负惯性指数等命题	(179)
题型2 将二次型化为标准形或已知标准形反求参数	(180)
题型3 有关二次型正定或正定矩阵的讨论或证明	(182)
题型4 与矩阵合同或规范形相关的命题	(183)
参考答案	(184)

概率论与数理统计篇

第1章 随机事件和概率	(188)
题型1 有关事件关系和运算的命题	(188)
题型2 有关事件的独立和相容性的判定或证明	(190)
题型3 求古典型概率	(191)
题型4 求几何型概率	(192)
题型5 有关条件概率和积事件概率的计算	(193)
题型6 有关全概率公式和贝叶斯公式的计算	(194)
参考答案	(196)
第2章 随机变量及其分布	(199)
题型1 与一维随机变量概念、性质有关的命题	(199)
题型2 求一维随机变量的分布函数、分布律或分布密度	(202)
题型3 求一维随机变量满足一定条件的概率或逆问题	(203)
题型4 求一维随机变量函数的分布及分布律或分布密度	(205)
参考答案	(207)
第3章 二维随机变量及其分布	(211)
题型1 与二维随机变量概念、性质有关的命题	(211)

题型 2 求二维随机变量的各种分布及独立性的讨论	(212)
题型 3 求二维随机变量函数的分布或取值的概率	(217)
参考答案	(219)
第 4 章 随机变量的数字特征	(224)
题型 1 有关数字特征运算与性质的命题	(224)
题型 2 求一维随机变量的数字特征或逆问题	(226)
题型 3 求一维随机变量函数的数学期望	(227)
题型 4 求二维或多维随机变量的数字特征及独立性的讨论	(229)
题型 5 求二维或多维随机变量函数的数字特征	(232)
题型 6 根据切比雪夫不等式估计概率	(234)
参考答案	(235)
第 5 章 大数定律和中心极限定理	(240)
题型 1 与中心极限定理有关的命题	(240)
题型 2 与大数定律有关的命题	(241)
参考答案	(243)
第 6 章 数理统计的基本概念	(244)
题型 1 统计量的分布的求解或判定或已知分布反求统计量	(244)
题型 2 求统计量的数字特征	(247)
题型 3 求统计量取值的概率或样本的容量	(247)
参考答案	(248)
第 7 章 参数估计与假设检验	(250)
题型 1 求矩估计量、矩估计值或最大似然估计量、估计值	(250)
题型 2 评价估计的优劣(无偏性、有效性、一致性等)	(252)
题型 3 有关区间估计或置信区间的命题	(253)
题型 4 正态总体的均值和方差的假设检验	(255)
题型 5 有关两类错误的命题	(257)
参考答案	(258)

应用题篇

第 1 章 几何应用题	(262)
题型 1 一元函数的极值问题的判定或求解	(262)
题型 2 一元函数的最值问题的判定或求解	(264)
题型 3 函数凹凸区间及拐点的判断或求解	(266)
题型 4 曲线的渐近线的判定或求解	(267)
题型 5 方程的根的判定或求解	(268)
题型 6 至少存在一点,使函数在该点的值等于某常数的证明	(269)
题型 7 有关函数的图形的命题	(270)
题型 8 求平面曲线的切线和法线方程或逆问题	(272)
题型 9 求平面图形的面积或参数	(273)

题型 10 求平面图形绕坐标轴旋转所成的旋转体的体积	(275)
题型 11 多元函数的极值与最值问题的判定或求解	(277)
参考答案	(280)
第 2 章 经济应用题	(287)
题型 1 涉及经济函数的命题	(287)
题型 2 微分学在经济中的应用题	(288)
题型 3 积分学在经济中的应用题	(293)
题型 4 复利问题	(293)
题型 5 概率论在经济中的应用题	(294)
题型 6 微分方程与差分方程在经济中的应用题	(296)
参考答案	(298)
2006 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题	(303)
2006 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题解答	(306)
2006 年全国硕士研究生入学统一考试数学四试题	(316)
2006 年全国硕士研究生入学统一考试数学四试题解答	(319)

微积分篇

第1章 函数、极限和连续

题型 1 函数的定义域或值域的求解

考试概况: 数学三没有考过; 数学四在 1992 年考过 1 道填空题.

思路点拨: (1) 由解析式建立的函数, 其定义域是使运算有意义的自变量的集合; 根据实际问题建立的函数, 其定义域是具有实际意义的自变量的集合; 而求复杂函数的定义域, 就是求解由简单函数的定义域 (见要点补充 2) 所构成的不等式组的解集.

(2) 由多项式表达的函数, 一般用配方法或判别式法求函数的值域; 若存在反函数, 则可通过求反函数的定义域来求原函数的值域; 若含三角函数, 可利用某些三角函数的有界性; 还可利用连续函数在闭区间上存在最值来求函数的值域.

实例精讲:

【例 1】 求下列函数的定义域:

$$(1) y = \log_{x-1}(9-x^2); \quad (2) y = \sqrt{\arcsin x - \frac{x}{4}}.$$

【解】 (1) 函数若有意义, 必满足以下条件:

$$\begin{cases} 9-x^2 > 0 \\ x-1 > 0 \\ x-1 \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3 < x < 3 \\ x > 1 \\ x \neq 2 \end{cases}, \text{ 故函数的定义域为: } \{x \mid 1 < x < 2 \text{ 或 } 2 < x < 3\}.$$

(2) 函数若有意义, 必满足以下条件:

$$\begin{cases} \arcsin x - \frac{\pi}{4} \geq 0 \\ |x| \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -1 \leq x \leq 1 \end{cases}, \text{ 故函数的定义域为: } \left\{x \mid \frac{\sqrt{2}}{2} \leq x \leq 1\right\}.$$

【例 2】 求下列函数的值域:

$$\begin{aligned} (1) y &= 3 - \sqrt{x^2 - 4x + 9}; & (2) y &= \frac{\sin x - 2}{\sin x + 2}; \\ (3) y &= \frac{x+1}{x-1}; & (4) y &= 3 - 2\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right). \end{aligned}$$

【解】 (1) 应用配方法, 则 $y = 3 - \sqrt{(x-2)^2 + 5}$, 而 $(x-2)^2 + 5 \geq 5$, 故函数的值域为: $(-\infty, 3 - \sqrt{5}]$.

$$(2) y = \frac{\sin x - 2}{\sin x + 2} = 1 - \frac{4}{\sin x + 2}, \text{ 而 } -1 \leq \sin x \leq 1,$$

$$\text{所以 } 1 \leq \sin x + 2 \leq 3, \frac{4}{3} \leq \frac{4}{\sin x + 2} \leq 4,$$

$$\text{即 } -3 \leq y \leq -\frac{1}{3}, \text{故函数的值域为: } \left[-3, -\frac{1}{3}\right].$$

(3) 当 $x \neq 1$ 时, 由原式可得 $x = \frac{1+y}{y-1}$, 即 $y \neq 1$. 故函数的值域为: $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$.

(4) 由原式可得: $x = \frac{1}{3} \arcsin \frac{3-y}{2} + \frac{\pi}{12}$, 因为 $\left| \frac{3-y}{2} \right| \leq 1$, 即 $1 \leq y \leq 5$,

所以函数的值域为: $[1, 5]$.

现学现练:

1.1 (1992 数学四) 已知 $f(x) = \sin x, f(\varphi(x)) = 1 - x^2$, 则 $\varphi(x) =$ _____ 的定义域为 _____.

1.2 求解下列函数的定义域:

$$(1) y = \sqrt{\sin x} + \lg(16 - x^2); \quad (2) y = \arcsin \frac{2x-1}{7} + \frac{\sqrt{2x-x^2}}{\ln(2x-1)}.$$

1.3 求函数的值域: $y = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4) + 17$.

要点补充:

1. 函数表示法的无关性: 函数与用什么字母表示无关, 只与定义域和对应法则相关.

2. 简单函数的定义域:

$$y = \frac{1}{x}, \text{定义域为: } x \neq 0;$$

$$y = \sqrt[n]{x}, \text{定义域为: } x \geq 0;$$

$$y = \log_a x, \text{定义域为: } x > 0, a > 0 \text{ 且 } a \neq 1;$$

$$y = \sin x \text{ 或 } \cos x, \text{定义域为: } (-\infty, +\infty);$$

$$y = \tan x, \text{定义域为: } x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z};$$

$$y = \cot x, \text{定义域为: } x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z};$$

$$y = \arcsin x \text{ 或 } \arccos x, \text{定义域为: } [-1, 1].$$

题型 2 求复合函数的表达式

考试概况: 数学三和数学四都没有考过.

思路点拨: (1) 利用代入法, 将一个函数中的自变量用另一个函数的表达式来替代;

(2) 利用分析法, 抓住最外层函数定义域的各区间段, 结合中间变量的表达式及定义域进行分析, 注意外层函数的定义域包含内层函数的值域;

(3) 利用图示法, 借助于图形的直观性.

实例精讲:

【例 3】(2001 数学二) 设 $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$, 则 $f(f(f(x)))$ 等于

(A) 0.

(B) 1.

$$(C) \begin{cases} 1, & |x| \leq 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$$

$$(D) \begin{cases} 0, & |x| \leq 1 \\ 1, & |x| > 1 \end{cases}$$

【 】

【解】因为 $|f(x)| \leq 1$, 则 $f(f(x)) = 1$, 所以 $f(f(f(x))) = f(1) = 1$. 故选(B).

【例4】(1997 数学二) 设 $g(x) = \begin{cases} 2-x, & x \leq 0 \\ x+2, & x > 0 \end{cases}$, $f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0 \\ -x, & x \geq 0 \end{cases}$, 则 $g(f(x)) =$

$$(A) \begin{cases} 2+x^2, & x < 0 \\ 2-x, & x \geq 0 \end{cases}$$

$$(B) \begin{cases} 2-x^2, & x < 0 \\ 2+x, & x \geq 0 \end{cases}$$

$$(C) \begin{cases} 2-x^2, & x < 0 \\ 2-x, & x \geq 0 \end{cases}$$

$$(D) \begin{cases} 2+x^2, & x < 0 \\ 2+x, & x \geq 0 \end{cases}$$

【 】

【解】 $g(f(x)) = \begin{cases} 2-f(x), & f(x) \leq 0 \\ f(x)+2, & f(x) > 0 \end{cases} = \begin{cases} 2+x, & x \geq 0 \\ 2+x^2, & x < 0 \end{cases}$, 故选(D).

现学现练:

$$2.1 \text{ 设 } f(x) = \begin{cases} 4-x^2, & |x| \leq 2 \\ 0, & |x| > 2 \end{cases}, \text{ 求 } f(f(x)).$$

题型 3 函数有界性、单调性、周期性和奇偶性等函数的性质的判别或证明

考试概况: 数学三在 1990 年、1997 年、2004 年和 2005 年共考过 3 道选择题和 1 道计算题; 数学四在 1990 年、1991 年、2002 年、2004 年和 2005 年共考过 5 道选择题.

思路点拨: 一般利用定义. 另外, 利用 $f(x) + f(-x) = 0$ 是判别 $f(x)$ 为奇函数的有效方法; 若函数在区间可导, 利用导数判别单调性较简便; 利用闭区间上连续函数的有界性或有极限的函数必局部有界来判断函数的有界性.

实例精讲:

【例5】设 $f(x)$ 为定义在 $(-a, a)$ 内的奇函数, 若 $f(x)$ 在 $(0, a)$ 内单调增加, 证明 $f(x)$ 在 $(-a, 0)$ 内也单调增加.

【证明】 $\forall x_1, x_2 \in (-a, 0)$, 且 $x_1 < x_2$, 则 $-x_1, -x_2 \in (0, a)$, 且 $-x_1 > -x_2$.

由于 $f(x)$ 在 $(0, a)$ 内单调增加, 故 $f(-x_1) > f(-x_2)$.

又由于 $f(x)$ 为奇函数, 故 $-f(x_1) > -f(x_2)$, 即 $f(x_1) < f(x_2)$.

因此 $f(x)$ 在 $(-a, 0)$ 内单调增加.

【例6】函数 $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ 在定义域内为

(A) 有上界无下界.

(B) 有下界无上界.

(C) 有界, 且 $-\frac{1}{2} \leq f(x) \leq \frac{1}{2}$.

(D) 有界且 $-2 \leq \frac{x}{1+x^2} \leq 2$.

【 】

【解】 $|f(x)| = \left| \frac{x}{1+x^2} \right| = \frac{|x|}{1+x^2} \leq \frac{|x|}{2|x|} = \frac{1}{2}$ (因为 $1+x^2 \geq 2|x|$),

故 $-\frac{1}{2} \leq f(x) \leq \frac{1}{2}$, 可知(C)入选.

现学现练:

3.1 (1990 数学三、四) 设函数 $f(x) = x \tan x \cdot e^{\sin x}$, 则 $f(x)$ 是

(A) 偶函数.

(B) 无界函数.

(C) 周期函数.

(D) 单调函数.

【 】

3.2 (1991 数学四) 设数列的通项为 $x_n = \begin{cases} \frac{n^2 + \sqrt{n}}{n}, & \text{若 } n \text{ 为奇数} \\ \frac{1}{n}, & \text{若 } n \text{ 为偶数} \end{cases}$, 则当 $n \rightarrow \infty$ 时, x_n 是

(A) 无穷大量.

(B) 无穷小量.

(C) 有界变量.

(D) 无界变量.

【 】

3.3 (2004 数学三、四) 函数 $f(x) = \frac{|x| \sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}$ 在下列哪个区间内有界?

(A) $(-1, 0)$.(B) $(0, 1)$.(C) $(1, 2)$.(D) $(2, 3)$.

【 】

要点补充:

1. 无穷大量和无界变量是不同的. 无穷大量一定是无界变量, 但无界变量不一定是无穷大量. 如函数 $f(x) = x \sin x$ 是无界变量, 但不是无穷大量.
2. 可导的奇函数的导函数为偶函数; 可导的偶函数的导函数为奇函数.
3. 可导的周期函数的导函数为周期函数.

题型 4 函数极限存在性的判定和求解

考试概况: 数学三在 1992 年和 2000 年共考过 2 道选择题; 数学四在 1992 年和 2000 年共考过 2 道选择题.

思路点拨: 利用定义、单调有界准则或夹逼准则. 考查双侧极限时需考虑左右极限.

实例精讲:

【例 7】 下列极限哪些是正确的?

$$(A) \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x}} = \infty;$$

$$(B) \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0;$$

$$(C) \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty;$$

$$(D) \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{x}} = 1.$$

【 】

【解】 $x \rightarrow 0^+$ 时, $\frac{1}{x} \rightarrow +\infty$, 故 $e^{\frac{1}{x}} \rightarrow +\infty$, 因此 (C) 正确;

$x \rightarrow 0^-$ 时, $\frac{1}{x} \rightarrow -\infty$, 故 $e^{\frac{1}{x}} \rightarrow 0$, 因此 (B) 正确; 所以 (A) 不正确;

又 $x \rightarrow \infty$ ($+\infty$ 或 $-\infty$) 时, $\frac{1}{x} \rightarrow 0$, 故 $e^{\frac{1}{x}} \rightarrow 1$, 因此 (D) 正确.

【例 8】 (2000 数学三、四) 设任意的 x , 总有 $\varphi(x) \leq f(x) \leq g(x)$, 且 $\lim_{x \rightarrow \infty} [g(x) - \varphi(x)] = 0$, 则 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$

(A) 存在且一定等于零.

(B) 存在但不一定为零.

(C) 一定不存在.

(D) 不一定存在.

【解】 取 $\varphi(x) = f(x) = g(x) = x$, 题设条件均满足, 但 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ (不存在). 又取 $\varphi(x) = f(x) = g(x) = 0$, 此时 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ (存在). 故应选(D).

现学现练:

4.1 求极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{x}{\tan x};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\cot x}.$$

4.2 (1992 数学三、四) 设 $F(x) = \frac{x^2}{x-a} \int_a^x f(t) dt$, 其中 $f(x)$ 为连续函数, 则 $\lim_{x \rightarrow a} F(x)$ 等于

(A) a^2 .

(B) $a^2 f(a)$.

(C) 0.

(D) 不存在.

【 】

要点补充:

1. 若 $x \rightarrow \infty$ 的极限中含有 a^x ($a > 0, a \neq 1$) 特别是 e^x , 或 $\arctan x$, 或 $\operatorname{arccot} x$ 的, 一定分别求出 $x \rightarrow +\infty, x \rightarrow -\infty$ 的极限, 两者相等, 则 $x \rightarrow \infty$ 时的极限存在, 否则不存在.

2. (夹逼定理) 设在 x_0 的邻域内, 恒有 $\varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x)$, 且 $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \psi(x) = A$, 则

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A.$$

题型 5 求数列的 n 项和或积的极限

考试概况: 数学三没有考过; 数学四在 1999 年考过 1 道填空题.

思路点拨: (1) 求数列的 n 项和的极限时, 若 n 个按递增或递减排列的, 一般利用夹逼准则求解; 还可利用加减的连锁反应拆通项处理.

(2) 求数列的 n 项积时, 可利用乘积的连锁反应、拆通项、夹逼定理或借助对数恒等式将积化为 n 项和的形式.

实例精讲:

【例 9】 求下列极限:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} \right]; (2) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}}.$$

【解】 (1) 原式 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \right]$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1.$$

$$(2) 1 \leq \sqrt[n]{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}} \leq \sqrt[n]{n}$$

又 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$, 由夹逼定理, 得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}} = 1.$$

【例 10】 (1) 当 $x \neq 0$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} \cdots \cos \frac{x}{2^n}$;

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right).$$

【解】 (1) 原极限 = $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} \cdots \cos \frac{x}{2^n}}{2^n \sin \frac{x}{2^n}}$ (利用 $\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$)

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n-1} \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} \cdots \left(2 \cos \frac{x}{2^n} \cdot \sin \frac{x}{2^n}\right)}{2^n \sin \frac{x}{2^n}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n-2} \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} \cdots \left(2 \cos \frac{x}{2^{n-1}} \cdot \sin \frac{x}{2^{n-1}}\right)}{2^n \sin \frac{x}{2^n}}$$

= ...

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{2^n \sin \frac{x}{2^n}} \stackrel{\sin \frac{x}{2^n} \sim \frac{x}{2^n}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{2^n \cdot \frac{x}{2^n}} = \frac{\sin x}{x}.$$

$$(2) \text{ 因为 } 1 - \frac{1}{k^2} = \frac{(k-1)(k+1)}{k^2} = \frac{k-1}{k} \cdot \frac{k+1}{k},$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}\right) \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3}\right) \cdots \left(\frac{n-1}{n} \cdot \frac{n+1}{n}\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{n+1}{n} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

现学现练:

5.1 (1999 数学四) 设函数 $f(x) = a^x (a > 0, a \neq 1)$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \ln[f(1)f(2) \cdots f(n)] =$

5.2 当 $|x| < 1$ 时, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} (1+x)(1+x^2)(1+x^4) \cdots (1+x^{2^n})$.

5.3 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right)$.

题型 6 极限式中含有 $a + \sqrt{b}$ 或 $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ 形式的极限

考试概况: 数学三在 1990 年考过 1 道填空题; 数学四在 1990 年和 1993 年共考过 2 道填空题.

思路点拨: 先利用共轭根式进行分子或分母的有理化, 然后结合其他方法计算极限.

实例精讲:

【例 11】 求 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{x(1 - \cos \sqrt{x})}$.

【解】 原式 $= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos x}{x(1 - \cos \sqrt{x})(1 + \sqrt{\cos x})}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{2}x^2}{x \cdot \frac{1}{2}x(1 + \sqrt{\cos x})} = \frac{1}{2}. \quad \left(\text{当 } x \rightarrow 0^+ \text{ 时, } 1 - \cos \sqrt{x} \sim \frac{1}{2}x, 1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2 \right)$

现学现练:

6.1 (1990 数学三、四) 极限 $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n+3} \sqrt{n} - \sqrt{n-\sqrt{n}}) = \underline{\hspace{2cm}}.$

6.2 (1993 数学四) $\lim_{n \rightarrow \infty} [\sqrt{1+2+\cdots+n} - \sqrt{1+2+\cdots+(n-1)}] = \underline{\hspace{2cm}}.$

题型 7 求 0/0 型极限

考试概况: 数学三在 1988 年、1994 年和 2002 年共考过 3 道计算题; 数学四在 1987 年、1992 年、1994 年和 2002 年共考过 4 道计算题.

思路点拨: 一般先利用分子分母因式分解消去“0”因子或等价无穷小代换简化极限式, 然后再用洛必达法则或抓大头法则等来求极限. 对有的极限式来讲, 作倒代换 $x = \frac{1}{t}$ 可将极限变得易于求解, 注意洛必达法则的使用条件! 另外, 对等价无穷小代换来讲, 只有乘积因子才可作代换, 加减一般不作代换.

实例精讲:

【例 12】 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arcsin x}{\sin^3 x}$.

【解】 原式 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arcsin x}{x^3} \quad (x \rightarrow 0 \text{ 时, } \sin x \sim x)$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{3x^2} \quad (\text{洛必达法则})$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x^2} - 1}{3x^2 \sqrt{1-x^2}}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x^2} - 1}{3x^2} \cdot \frac{\sqrt{1-x^2} + 1}{\sqrt{1-x^2} + 1} \quad (\text{分子有理化})$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^2}{3x^2} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{6}.$

【例 13】 求 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x - \sin x + 1}{\cos x + \sin x - 1}$.

【解】 由于 $\cos x - \sin x + 1 = (1 + \cos x) - \sin x$