KNOWLEDGE TREE

2008知识树考研

全国硕士研究生入学统一考试

数学过关基本题型

（数学三、四）

文登培训学校策划

主编/陈文灯 副主编/陈启浩

专为基础薄弱 时间不足的考生打造
立足历年真题 思路方法简洁实用
现学现练 精选试题供考生演练

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

KNOWLEDGE TREE

2008知识树考研

全国硕士研究生入学统一考试

数学过关基本题型

（数学三、四）

主编/陈文灯　副主编/陈启浩

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

数学过关基本题型. 3、4 / 陈文灯主编. —北京:
北京理工大学出版社,2007.4 (2007.4 重印)
(知识树考研)
ISBN 978-7-5640-1035-5

Ⅰ.数... Ⅱ.陈... Ⅲ.高等数学-研究生-入学考试-
习题 Ⅳ.O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 037864 号

出版发行 / 北京理工大学出版社
社　　址 / 北京市海淀区中关村南大街 5 号
邮　　编 / 100081
电　　话 /(010)68914775(办公室)　68944990(批销中心)　68911084(读者服务部)
网　　址 / http://www.bitpress.com.cn
经　　销 / 全国各地新华书店
印　　刷 / 北京地质印刷厂
开　　本 / 787 毫米×1092 毫米　1/16
印　　张 / 21
字　　数 / 500 千字
版　　次 / 2007 年 4 月第 1 版　2007 年 4 月第 2 次印刷
定　　价 / 38.00 元

前　言

在近年的考研辅导中，有很多考生向我们反映，自己的基础比较薄弱，学习起来比较困难，难以迅速提高成绩. 还有的考生是在职人员，工作非常繁忙，没有很多时间可以支配，希望能有一本考研数学速成书. 如何帮助考生在短时间内取得好的学习效果，达到硕士生入学考试数学的分数线，这就是我们研发此书的初衷和愿望.

本书结合我们多年来的考研数学辅导经验编写而成. 针对每个题型，设置了以下几个栏目：

(1) ■**考试概况**：给出 1987 年以来各题型在数学三、数学四试卷中的考查情况：填空题、单项选择题和计算题中出现的频率.

(2) ■**思路点拨**：针对各题型给出了相应的解题思路和方法，简洁而实用.

(3) ■**实例精讲**：根据真题难度和题型设置了典型例题，并给出了详细讲解，供考生学习模拟之用.

(4) ■**现学现练**：精选相应试题供考生进行实战演练.

(5) ■**要点补充**：对一些题型依据需要给出补充注释，帮助考生加强对题型的理解.

考生通过阅读本书，不但能了解历年试卷中试题在高等数学、线性代数、概率论与数理统计等三门课程中的分布情况和难度，而且**能够掌握各种基本题型的解题思路和方法**. 通过对真题的认真演练，**揭开考研数学的神秘面纱，达到考试时胸有成竹、应对自如的境界**.

成书仓促，并请考研朋友和数学同仁予以指正.

陈文灯

目 录

微积分篇

线性代数篇

概率论与数理统计篇

应用题篇

微积分篇

第1章 函数、极限和连续

题型1 函数的定义域或值域的求解

考试概况：数学三没有考过；数学四在1992年考过1道填空题.

思路点拨：(1) 由解析式建立的函数，其定义域是使运算有意义的自变量的集合；根据实际问题建立的函数，其定义域是具有实际意义的自变量的集合；而求复杂函数的定义域，就是求解由简单函数的定义域(见要点补充2)所构成的不等式组的解集.

(2) 由多项式表达的函数，一般用配方法或判别式法求函数的值域；若存在反函数，则可通过求反函数的定义域来求原函数的值域；若含三角函数，可利用某些三角函数的有界性；还可利用连续函数在闭区间上存在最值来求函数的值域.

实例精讲：

【例1】 求下列函数的定义域：

$(1) y=\log_{x-1}(9-x^2)$； $(2) y=\sqrt{\arcsin x-\frac{x}{4}}$.

【解】 (1) 函数若要有意义，必满足以下条件：

$$\begin{cases}9-x^2>0\\x-1>0\\x-1\neq 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-3<x<3\\x>1\\x\neq 2\end{cases}$$，故函数的定义域为：$\{x\mid 1<x<2 或 2<x<3\}$.

(2) 函数若要有意义，必满足以下条件：

$$\begin{cases}\arcsin x-\frac{\pi}{4}\geqslant 0\\|x|\leqslant 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}\\-1\leqslant x\leqslant 1\end{cases}$$，故函数的定义域为：$\left\{x\left|\frac{\sqrt{2}}{2}\leqslant x\leqslant 1\right.\right\}$.

【例2】 求下列函数的值域：

$(1) y=3-\sqrt{x^2-4x+9}$； $(2) y=\frac{\sin x-2}{\sin x+2}$；

$(3) y=\frac{x+1}{x-1}$； $(4) y=3-2\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)$.

【解】 (1) 应用配方法，则 $y=3-\sqrt{(x-2)^2+5}$，而 $(x-2)^2+5\geqslant 5$，

故函数的值域为：$(-\infty,3-\sqrt{5}]$.

(2) $y=\frac{\sin x-2}{\sin x+2}=1-\frac{4}{\sin x+2}$，而 $-1\leqslant\sin x\leqslant 1$，

所以 $1 \leqslant \sin x + 2 \leqslant 3, \frac{4}{3} \leqslant \frac{4}{\sin x + 2} \leqslant 4$,

即 $-3 \leqslant y \leqslant -\frac{1}{3}$,故函数的值域为:$\left[-3, -\frac{1}{3}\right]$.

(3) 当 $x \neq 1$ 时,由原式可得 $x = \frac{1+y}{y-1}$,即 $y \neq 1$. 故函数的值域为:$(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$.

(4) 由原式可得:$x = \frac{1}{3}\arcsin\frac{3-y}{2} + \frac{\pi}{12}$,因为 $\left|\frac{3-y}{2}\right| \leqslant 1$,即 $1 \leqslant y \leqslant 5$,

所以函数的值域为:$[1,5]$.

现学现练:

1.1 (1992 数学四) 已知 $f(x) = \sin x, f(\varphi(x)) = 1 - x^2$,则 $\varphi(x) =$ ________的定义域为________.

1.2 求解下列函数的定义域:

(1)$y = \sqrt{\sin x} + \lg(16 - x^2)$; (2)$y = \arcsin\frac{2x-1}{7} + \frac{\sqrt{2x - x^2}}{\ln(2x-1)}$.

1.3 求函数的值域:$y = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4) + 17$.

要点补充:

1. 函数表示法的无关性:函数与用什么字母表示无关,只与定义域和对应法则相关.

2. 简单函数的定义域:

$y = \frac{1}{x}$,定义域为:$x \neq 0$; $y = \sqrt[2n]{x}$,定义域为:$x \geqslant 0$;

$y = \log_a x$,定义域为:$x > 0, a > 0$ 且 $a \neq 1$; $y = \sin x$ 或 $\cos x$,定义域为:$(-\infty, +\infty)$;

$y = \tan x$,定义域为:$x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$; $y = \cot x$,定义域为:$x \neq k\pi, k \in \mathbf{Z}$;

$y = \arcsin x$ 或 $\arccos x$,定义域为:$[-1,1]$.

题型 2 求复合函数的表达式

考试概况:数学三和数学四都没有考过.

思路点拨:(1) 利用代入法,将一个函数中的自变量用另一个函数的表达式来替代;

(2) 利用分析法,抓住最外层函数定义域的各区间段,结合中间变量的表达式及定义域进行分析,注意外层函数的定义域包含内层函数的值域;

(3) 利用图示法,借助于图形的直观性.

实例精讲:

【例 3】 (2001 数学二) 设 $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leqslant 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$,则 $f(f(f(x)))$ 等于

(A)0. (B)1.

(C)$\begin{cases} 1, & |x| \leqslant 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$. (D)$\begin{cases} 0, & |x| \leqslant 1 \\ 1, & |x| > 1 \end{cases}$. 【 】

【解】因为 $|f(x)|\leqslant 1$,则 $f(f(x))=1$,所以 $f(f(f(x)))=f(1)=1$.故选(B).

【例4】　(1997 数学二)　设 $g(x)=\begin{cases}2-x, & x\leqslant 0\\ x+2, & x>0\end{cases}$,$f(x)=\begin{cases}x^2, & x<0\\ -x, & x\geqslant 0\end{cases}$,则 $g(f(x))=$

(A) $\begin{cases}2+x^2, & x<0\\ 2-x, & x\geqslant 0\end{cases}$.　　(B) $\begin{cases}2-x^2, & x<0\\ 2+x, & x\geqslant 0\end{cases}$.

(C) $\begin{cases}2-x^2, & x<0\\ 2-x, & x\geqslant 0\end{cases}$.　　(D) $\begin{cases}2+x^2, & x<0\\ 2+x, & x\geqslant 0\end{cases}$.　　【　】

【解】　$g(f(x))=\begin{cases}2-f(x), & f(x)\leqslant 0\\ f(x)+2, & f(x)>0\end{cases}=\begin{cases}2+x, & x\geqslant 0\\ 2+x^2, & x<0\end{cases}$,故选(D).

现学现练:

2.1　设 $f(x)=\begin{cases}4-x^2, & |x|\leqslant 2\\ 0, & |x|>2\end{cases}$,求 $f(f(x))$.

题型 3　函数有界性、单调性、周期性和奇偶性等函数的性质的判别或证明

考试概况:数学三在 1990 年、1997 年、2004 年和 2005 年共考过 3 道选择题和 1 道计算题;数学四在 1990 年、1991 年、2002 年、2004 年和 2005 年共考过 5 道选择题.

思路点拨:一般利用定义.另外,利用 $f(x)+f(-x)=0$ 是判别 $f(x)$ 为奇函数的有效方法;若函数在区间可导,利用导数判别单调性较简便;利用闭区间上连续函数的有界性或有极限的函数必局部有界来判断函数的有界性.

实例精讲:

【例5】　设 $f(x)$ 为定义在 $(-a,a)$ 内的奇函数,若 $f(x)$ 在 $(0,a)$ 内单调增加,证明 $f(x)$ 在 $(-a,0)$ 内也单调增加.

【证明】　$\forall x_1,x_2\in(-a,0)$,且 $x_1<x_2$,则 $-x_1,-x_2\in(0,a)$,且 $-x_1>-x_2$.
由于 $f(x)$ 在 $(0,a)$ 内单调增加,故 $f(-x_1)>f(-x_2)$.
又由于 $f(x)$ 为奇函数,故 $-f(x_1)>-f(x_2)$,即 $f(x_1)<f(x_2)$.
因此,$f(x)$ 在 $(-a,0)$ 内单调增加.

【例6】　函数 $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$ 在定义域内为

(A) 有上界无下界.　　(B) 有下界无上界.

(C) 有界,且 $-\dfrac{1}{2}\leqslant f(x)\leqslant\dfrac{1}{2}$.　　(D) 有界且 $-2\leqslant\dfrac{x}{1+x^2}\leqslant 2$.　　【　】

【解】　$|f(x)|=\left|\dfrac{x}{1+x^2}\right|=\dfrac{|x|}{1+x^2}\leqslant\dfrac{|x|}{2|x|}=\dfrac{1}{2}$　(因为　$1+x^2\geqslant 2|x|$),

故　$-\dfrac{1}{2}\leqslant f(x)\leqslant\dfrac{1}{2}$,　可知(C)入选.

现学现练:

3.1　(1990 数学三、四)设函数 $f(x)=x\tan x\cdot e^{\sin x}$,则 $f(x)$ 是

(A) 偶函数.　　　　(B) 无界函数.

(C) 周期函数.　　　　(D) 单调函数.　　　　【　】

3.2 (1991 数学四)　设数列的通项为 $x_n = \begin{cases} \dfrac{n^2+\sqrt{n}}{n}, & 若 n 为奇数 \\ \dfrac{1}{n}, & 若 n 为偶数 \end{cases}$,则当 $n \to \infty$ 时,x_n 是

(A) 无穷大量.　　　　(B) 无穷小量.

(C) 有界变量.　　　　(D) 无界变量.　　　　【　】

3.3 (2004 数学三、四)　函数 $f(x) = \dfrac{|x| \sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}$ 在下列哪个区间内有界?

(A) $(-1,0)$.　　　　(B) $(0,1)$.

(C) $(1,2)$.　　　　(D) $(2,3)$.　　　　【　】

要点补充:

1. 无穷大量和无界变量是不同的. 无穷大量一定是无界变量,但无界变量不一定是无穷大量. 如函数 $f(x) = x\sin x$ 是无界变量,但不是无穷大量.
2. 可导的奇函数的导函数为偶函数;可导的偶函数的导函数为奇函数.
3. 可导的周期函数的导函数为周期函数.

题型 4　函数极限存在性的判定和求解

考试概况:数学三在 1992 年和 2000 年共考过 2 道选择题;数学四在 1992 年和 2000 年共考过 2 道选择题.

思路点拨:利用定义、单调有界准则或夹逼准则. 考查双侧极限时需考虑左右极限.

实例精讲:

【例 7】　下列极限哪些是正确的?

(A) $\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}} = \infty$;　　　　(B) $\lim\limits_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0$;

(C) $\lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty$;　　　　(D) $\lim\limits_{x\to \infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$.　　　　【　】

【解】　$x \to 0^+$ 时,$\dfrac{1}{x} \to +\infty$,故 $e^{\frac{1}{x}} \to +\infty$,因此(C)正确;

$x \to 0^-$ 时,$\dfrac{1}{x} \to -\infty$,故 $e^{\frac{1}{x}} \to 0$,因此(B)正确;所以(A)不正确;

又 $x \to \infty$ ($+\infty$ 或 $-\infty$)时,$\dfrac{1}{x} \to 0$,故 $e^{\frac{1}{x}} \to 1$,因此(D)正确.

【例 8】　(2000 数学三、四)　设任意的 x,总有 $\varphi(x) \leqslant f(x) \leqslant g(x)$,且 $\lim\limits_{x\to\infty}[g(x) - \varphi(x)] = 0$,则 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$

(A) 存在且一定等于零.　　　　(B) 存在但不一定为零.

(C) 一定不存在.　　　　(D) 不一定存在.

【解】 取 $\varphi(x)=f(x)=g(x)=x$，题设条件均满足，但 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$（不存在）. 又取 $\varphi(x)=f(x)=g(x)=0$，此时 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$（存在）. 故应选(D).

现学现练：

4.1 求极限：

(1) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{x}{\tan x}$；　　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\cot x}$.

4.2 (1992 数学三、四)　设 $F(x)=\dfrac{x^2}{x-a}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$，其中 $f(x)$ 为连续函数，则 $\lim\limits_{x\to a}F(x)$ 等于

(A) a^2.　　(B) $a^2f(a)$.　　(C) 0.　　(D) 不存在.　　【　】

要点补充：

1. 若 $x\to\infty$ 的极限中含有 $a^x(a>0,a\neq 1)$ 特别是 e^x，或 $\arctan x$，或 $\operatorname{arccot}x$ 的，一定分别求出 $x\to+\infty$，$x\to-\infty$ 的极限，两者相等，则 $x\to\infty$ 时的极限存在，否则不存在.
2. **(夹逼定理)** 设在 x_0 的邻域内，恒有 $\varphi(x)\leqslant f(x)\leqslant\psi(x)$，且 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\psi(x)=A$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

题型 5　求数列的 n 项和或积的极限

考试概况：数学三没有考过；数学四在 1999 年考过 1 道填空题.

思路点拨：(1) 求数列的 n 项和的极限时，若 n 个按递增或递减排列的，一般利用夹逼准则求解；还可利用加减的连锁反应拆通项处理.

(2) 求数列的 n 项积时，可利用乘积的连锁反应、拆通项、夹逼定理或借助对数恒等式将积化为 n 项和的形式.

实例精讲：

【例9】 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)}\right]$；(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}}$.

【解】 (1) 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1-\dfrac{1}{2}\right)+\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)\right]$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1.$$

(2) $1\leqslant\sqrt[n]{1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}}\leqslant\sqrt[n]{n}$

又 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$，由夹逼定理，得

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}=1.$$

【例10】 (1) 当 $x\neq 0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^n}$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$.

【解】 (1) 原极限 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n\sin\frac{x}{2^n}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^n}}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}$ （利用 $\sin x=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$）

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n-1}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\left(2\cos\frac{x}{2^n}\cdot\sin\frac{x}{2^n}\right)}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n-2}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\left(2\cos\frac{x}{2^{n-1}}\cdot\sin\frac{x}{2^{n-1}}\right)}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}$$

$$=\cdots$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}\xlongequal{\sin\frac{x}{2^n}\sim\frac{x}{2^n}}\lim_{n\to\infty}\frac{\sin x}{2^n\cdot\frac{x}{2^n}}=\frac{\sin x}{x}.$$

(2) 因为 $1-\frac{1}{k^2}=\frac{(k-1)(k+1)}{k^2}=\frac{k-1}{k}\cdot\frac{k+1}{k}$，

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\right)\cdots\left(\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n+1}{n}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n}=\frac{1}{2}.$$

现学现练：

5.1 （1999 数学四） 设函数 $f(x)=a^x(a>0,a\neq 1)$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\ln[f(1)f(2)\cdots f(n)]=$ ________.

5.2 当 $|x|<1$ 时，求 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2n})$.

5.3 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$.

题型 6 极限式中含有 $a+\sqrt{b}$ 或 $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ 形式的极限

考试概况：数学三在 1990 年考过 1 道填空题；数学四在 1990 年和 1993 年共考过 2 道填空题.

思路点拨：先利用共轭根式进行分子或分母的有理化，然后结合其他方法计算极限.

实例精讲：

【例11】 求$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x(1-\cos\sqrt{x})}$.

【解】 原式$=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1-\cos x}{x(1-\cos\sqrt{x})(1+\sqrt{\cos x})}$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x\cdot\frac{1}{2}x(1+\sqrt{\cos x})}=\frac{1}{2}.\quad\left(当x\to0^+时,1-\cos\sqrt{x}\sim\frac{1}{2}x,1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2\right)$$

现学现练：

6.1 （1990 数学三、四） 极限$\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+3\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}})=$ ________.

6.2 （1993 数学四） $\lim\limits_{n\to\infty}[\sqrt{1+2+\cdots+n}-\sqrt{1+2+\cdots+(n-1)}]=$ ________.

题型 7 求 0/0 型极限

考试概况：数学三在1988年、1994年和2002年共考过3道计算题；数学四在1987年、1992年、1994年和2002年共考过4道计算题.

思路点拨：一般先利用分子分母因式分解消去“0”因子或等价无穷小代换简化极限式，然后再用洛必达法则或抓大头法则等来求极限. 对有的极限式来讲，作倒代换$x=\dfrac{1}{t}$可将极限变得易于求解，注意洛必达法则的使用条件！另外，对等价无穷小代换来讲，只有乘积因子才可作代换，加减一般不作代换.

实例精讲：

【例12】 求$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\arcsin x}{\sin^3x}$.

【解】 原式$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\arcsin x}{x^3}$ （$x\to0$时，$\sin x\sim x$）

$$=\lim_{x\to0}\frac{1-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{3x^2}\quad（洛必达法则）$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{3x^2\sqrt{1-x^2}}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{3x^2}\cdot\frac{\sqrt{1-x^2}+1}{\sqrt{1-x^2}+1}（分子有理化）$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-x^2}{3x^2}\cdot\frac{1}{2}=-\frac{1}{6}.$$

【例13】 求$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x-\sin x+1}{\cos x+\sin x-1}$.

【解】 由于 $\cos x-\sin x+1=(1+\cos x)-\sin x$