21世纪全国高等院校通用教材

线性代数

MATHS

编著　姚慕生

中国财政经济出版社

21世纪全国高等院校通用教材

线 性 代 数

姚慕生　编著

中国财政经济出版社

图书在版编目（CIP）数据

线性代数/姚慕生编著．—北京：中国财政经济出版社，2007.3
21世纪全国高等院校通用教材
ISBN 978－7－5005－9713－1

Ⅰ．线…　Ⅱ．姚…　Ⅲ．线性代数－高等学校－教材　Ⅳ．0151．2

中国版本图书馆CIP数据核字（2007）第024976号

中国财政经济出版社 出版
URL：http：//www.cfeph.cn
E－mail：jiaoyu@ cfeph.cn
（版权所有　翻印必究）
社址：北京市海淀区阜成路甲28号　邮政编码：100036
发行电话：88190616　传真：88190655
三河市新世纪印务有限公司印刷　各地新华书店经销
787×960毫米　16开　14印张　229 000字
2007年9月第1版　2007年9月河北第1次印刷
定价：18.00元
ISBN 978－7－5005－9713－1/O・0056
（图书出现印装问题，本社负责调换）

前　言

线性代数是普通高等院校的一门基础课．如果说中学代数研究的是单个的数及其运算，那么线性代数研究的对象是数组及其运算．具体来说是向量、矩阵、行列式以及它们的应用．线性代数的研究内容不仅在大学本科的后续课程中有着重要的应用，而且也是学生们在今后工作实践中解决实际问题的有力工具．本教程根据教育部对本科线性代数课程的基本要求，结合作者多年来的教学经验编写而成，适合大学本科经济管理类专业、工科的某些专业、夜大、网络学院以及高职院校的本科生使用．

本教材在内容的取材和处理上力求通俗易懂，尽量避免复杂繁琐的论证和推导，不刻意追求学科的完整性，通过大量的例子来化解教学上的难点．比如在行列式的引进上，我们不采用传统的逆序数方法，而是采用学生很容易接受的，从二阶行列式及其性质讲起，自然地引进高阶行列式的概念，使克莱姆法则成为行列式性质的简单推论．在处理向量、矩阵、线性方程组以及二次型等问题上突出了初等变换的核心作用．初等变换是学生很容易掌握并乐于使用的方法，这样做对提高学生的解题能力很有好处．对一些比较难的概念和定理，在叙述概念定理的同时我们尽可能通过举例让学生有比较深入的理解．本教程的习题绝大多数都是非常基本的，除了每节后面的习题以外，每一章的最后还安排了复习题．复习题中的选择题、填空题以及问答题都是概念性的习题，主要测试学生对基本概念的掌握情况．书后附有习题的参考答案，但是作者建议读者先自己独立完成老师布置的作业，而不要先参考答案．习题训练对于掌握每一门数学课程都是必不可少的．

根据作者经验，本教程的主要内容可以在 50 学时内完成，课时数少

于50学时者可以选修前面四章（或三章）的内容.

虽然本书是作者在从事多年教学的基础上编著完成的，但是限于水平，不当、错误之处在所难免，敬请读者和各位同行批评指正.

本书的出版得到了中国财政经济出版社的大力支持，在此谨向他们表示衷心的感谢！

编　者

2006年9月于复旦大学

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com

目　录

第一章　行列式 ………………………………………… (1)
§1.1　二阶行列式 ………………………………………… (1)
§1.2　三阶行列式 ………………………………………… (7)
§1.3　n 阶行列式 ………………………………………… (12)
§1.4　行列式的计算 ………………………………………… (20)

第二章　矩阵 ………………………………………… (37)
§2.1　矩阵的概念 ………………………………………… (37)
§2.2　矩阵的运算 ………………………………………… (40)
§2.3　逆矩阵 ………………………………………… (53)
§2.4　分块矩阵 ………………………………………… (59)
§2.5　初等变换和初等矩阵 ………………………………………… (68)

第三章　向量和线性方程组 ………………………………………… (86)
§3.1　向量及其线性关系 ………………………………………… (86)
§3.2　极大无关组 ………………………………………… (92)
§3.3　矩阵的秩 ………………………………………… (96)
§3.4　线性方程组解的判定 ………………………………………… (106)
§3.5　线性方程组解的结构 ………………………………………… (116)
§3.6　向量的内积 ………………………………………… (130)

第四章　特征值 ………………………………………… (144)

§4.1 特征值和特征向量 …………………………… (144)
§4.2 相似矩阵 …………………………… (152)
§4.3 实对称矩阵的对角化 …………………………… (163)

第五章 二次型 …………………………… (173)
§5.1 实二次型和实对称矩阵 …………………………… (173)
§5.2 化二次型为标准型 …………………………… (180)
§5.3 规范标准型和二次型的有定性 …………………………… (190)

习题参考答案 …………………………… (202)

第一章 行 列 式

§1.1 二阶行列式

我们在中学里曾经学过如何解二元一次方程组和三元一次方程组．在许多实际问题中（包括经济学问题），我们还会遇到未知数更多的一次方程组，通常称之为线性方程组．一般来说，具有下列形状的方程组我们称为 n 元线性方程组的标准式：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{1.1.1}$$

其中 a_{ij}，b_i（$i=1, 2, \cdots, m$；$j=1, 2, \cdots, n$）都是常数，x_i（$i=1, 2, \cdots, n$）是未知数，上述方程组中所有未知数都是一次的．注意一般的线性方程组中，m 和 n 可以不相等，即方程组中未知数个数和方程式个数可以不等．凡是经过有限次移项，合并同类项可以变为（1.1.1）式形状的方程组都称为线性方程组．求解线性方程组是线性代数的一个重要任务，我们在这一章中主要讨论当 $m=n$ 时，即方程式个数等于未知数个数时线性方程组的解．我们的主要工具是行列式．为了简化问题的讨论，我们将从简单的二元一次方程组开始．

设有二元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \tag{1.1.2}$$

用 a_{22}乘第一式的两边，用 $-a_{12}$乘第二式的两边得：

$$\begin{cases} a_{11}a_{22}x_1 + a_{12}a_{22}x_2 = a_{22}b_1 \\ -a_{12}a_{21}x_1 - a_{12}a_{22}x_2 = -a_{12}b_2 \end{cases}$$

将这两个方程式两边相加并提取公因子得：

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = a_{22}b_1 - a_{12}b_2$$

于是

$$x_1 = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

用类似的办法消去 x_1，解得：

$$x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

这样的解表达式不容易记忆，现在我们定义下列二阶行列式的值为：

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

于是方程组（1.1.2）的解可以表达为：

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

在用行列式表示解的公式中，解的表达式有一定的规律可循：

（1）x_1 与 x_2 的分母都是行列式$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$，即只需将原方程组未知数前的系数按原顺序排成一个行列式即可．

（2）x_1 的分子行列式的第一列由原方程组右边的数组成（称为方程组的常数列），第二列由 x_2 的系数组成，因此这个行列式可以看成是将 x_1 与 x_2 的分母行列式$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$中的第一列换成常数列而得．这个规则对 x_2 的分子行列式也适用．

显而易见，这样的解的公式一目了然，且很容易记忆．我们自然希望用同样的公式来表示三元一次方程组的解乃至 n 元线性方程组的解．但是

一般 n 元行列式的定义相当复杂，因此我们首先来研究二阶行列式的性质.

设有二阶行列式

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

$|\mathbf{A}|$的值根据定义为 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$. 我们称下列行列式为$|\mathbf{A}|$的转置:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

记为$|\mathbf{A}'|$. 注意$|\mathbf{A}'|$的第一列就是$|\mathbf{A}|$的第一行,$|\mathbf{A}'|$的第二列就是$|\mathbf{A}|$的第二行. 根据定义$|\mathbf{A}'| = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$,我们发现它就等于行列式$|\mathbf{A}|$的值. 于是我们得到行列式的第一个性质:

性质 1 行列式和其转置具有相同的值.

性质 2 行列式某行或某列全为零,则行列式值等于零.

比如下列行列式若第一行全为零,则显然

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0,$$

其他几种情形也可类似验证.

性质 3 用常数 k 乘以行列式的某一行或某一列,得到的行列式的值等于原行列式值的 k 倍.

比如将 k 乘以$|\mathbf{A}|$的第一行,我们有

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (ka_{11})a_{22} - (ka_{12})a_{21} = k|\mathbf{A}|.$$

其他几种情形请读者自己验证.

性质 4 若行列式中某行（列）元素均为二项之和，则行列式可表示为二个行列式之和.

如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ b_{21}+c_{21} & b_{22}+c_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix};$$

$$\begin{vmatrix} b_{11}+c_{11} & a_{12} \\ b_{21}+c_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_{11} & a_{12} \\ b_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_{11} & a_{12} \\ c_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

验证也非常容易，只需按照行列式定义计算等式两边的值即可．需要注意的是下面的等式不成立：

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}.$$

请读者想一想为什么？上式左边的行列式应该等于什么？

性质 5　行列式二行或二列成比例，行列式值等于零．

对列成比例的情形我们可证明如下：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & ka_{11} \\ a_{21} & ka_{21} \end{vmatrix} = a_{11}ka_{21} - ka_{11}a_{21} = 0.$$

同理可证明行成比例的情形．

性质 6　行列式的某一行（列）乘以某个数加到另一行（列）上，行列式值不变．

比如行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}+ka_{11} \\ a_{21} & a_{22}+ka_{21} \end{vmatrix} = a_{11}(a_{22}+ka_{21}) - a_{21}(a_{12}+ka_{11}) =$$

$$a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

同理可证

$$\begin{vmatrix} a_{11}+ka_{12} & a_{12} \\ a_{21}+ka_{22} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21}+ka_{11} & a_{22}+ka_{12} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11}+ka_{21} & a_{12}+ka_{22} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

性质 7　交换行列式不同的二行（列），行列式的值改变符号．

证明也很容易：

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = a_{21}a_{12} - a_{11}a_{22} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

同理

$$\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com

注：从性质 2 到性质 7 我们发现行列式性质具有行和列的对称性，即对行成立的性质，对列也成立．这是因为性质 1 在起作用．转置将行变成了相应的列，既然行列式转置后值不改变，那么同样的性质对列也成立．

现在我们试着用行列式性质来解方程组（1.1.2）．

将 b_1，b_2 代入下面的行列式：

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 & a_{12} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 & a_{22} \end{vmatrix}$$

由性质 6，在右边的行列式中用 $-x_2$ 乘以第二列加到第一列上，行列式值应该不变，即上式等于

$$\begin{vmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 - a_{12}x_2 & a_{12} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 - a_{22}x_2 & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}x_1 & a_{12} \\ a_{21}x_1 & a_{22} \end{vmatrix}$$

再由性质 3，

$$\begin{vmatrix} a_{11}x_1 & a_{12} \\ a_{21}x_1 & a_{22} \end{vmatrix} = x_1 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

综上，

$$x_1 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$$

故

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

同理通过计算行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

我们得到

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

习 题 §1.1

1. 计算下列行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$.

2. 计算下面二个行列式并和性质 1 比较：

$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$.

3. 计算下面两个行列式并和性质 3 比较：

(1) $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 4 \end{vmatrix}$.

(2) $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$.

4. 计算下面三个行列式并和性质 4 比较（第一个行列式的第二行等于后二个行列式第二行之和）：

$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$.

5. 计算下列行列式并和性质 5 比较：

$\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 1 & \frac{2}{3} \end{vmatrix}$.

6. 利用性质 6 说明下列二个行列式值相同：

$\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 11 \end{vmatrix}$.

7. 比较下列行列式的值：

$\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}$.

8. 举例说明下列等式不成立：

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}.$$

问：根据性质4，行列式$\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{vmatrix}$应等于什么?

§1.2 三阶行列式

现在我们来定义三阶行列式，先引进几个名词. 设

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \tag{1.2.1}$$

称$|\mathbf{A}|$是一个三阶行列式. 如果将行列式$|\mathbf{A}|$划去某个元素 $a_{ij}(i,j=1,2,3)$所在的一行和一列,则剩下的元素按原来的次序组成一个二阶行列式,我们称这个二阶行列式为元素 a_{ij}的余子式,记为 $\mathbf{M}_{ij}$.

比如$|\mathbf{A}|$中元素 a_{11}的余子式为 $\mathbf{M}_{11}=\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$,元素 a_{12}的余子式为 $\mathbf{M}_{12}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$,元素 a_{23}的余子式为 $\mathbf{M}_{23}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$,等等.

定义(1.2.1)式中行列式$|\mathbf{A}|$的值为

$$|\mathbf{A}| = a_{11}\mathbf{M}_{11} - a_{21}\mathbf{M}_{21} + a_{31}\mathbf{M}_{31}.$$

例 1.2.1 计算下列三阶行列式:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ -1 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$

解 根据定义,行列式值为

$$1\times\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} - 2\times\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} + (-1)\times\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 4.$$

例 1.2.2 计算下列行列式

$$\begin{vmatrix} a & a^2+a+1 & 1 \\ 0 & -a & a-1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

解 由定义得此行列式值为：

$$a\times\begin{vmatrix} -a & a-1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}-0\times\begin{vmatrix} a^2+a+1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}+1\times\begin{vmatrix} a^2+a+1 & 1 \\ -a & a-1 \end{vmatrix}$$

$$=a^3+a-1.$$

从三阶行列式的定义我们也可以容易地证明所有三阶行列式都满足第一节中的7条性质．以性质1为例，我们给出下面的证明．

性质1 行列式和其转置具有相同的值．

证明 设$|\mathbf{A}|$如(1.2.1)式所示．则

$$|\mathbf{A}|=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

而

$$|\mathbf{A}'|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

根据定义，

$$|\mathbf{A}'|=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{32} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{31} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{31} \\ a_{22} & a_{32} \end{vmatrix}$$

注意$|\mathbf{A}'|$中a_{11}的余子式恰为$|\mathbf{A}|$中元素a_{11}的余子式的转置，因此$|\mathbf{A}|$和$|\mathbf{A}'|$的展开式中右边第一项相等．另一方面，经过计算（将二阶行列式值算出来）和比较，我们不难得到

$$-a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}=-a_{21}a_{12}a_{33}+a_{21}a_{13}a_{32}+a_{31}a_{12}a_{23}-a_{31}a_{13}a_{22},$$

$$-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{31} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{31} \\ a_{22} & a_{32} \end{vmatrix}=-a_{12}a_{21}a_{33}+a_{12}a_{31}a_{23}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{31}a_{22}.$$

比较后即知$|\mathbf{A}'|=|\mathbf{A}|$.

其余各条性质也可类似证明,请读者自己完成.

现在我们利用三阶行列式性质来解三元一次方程组. 设有下列三元一次方程组:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases} \tag{1.2.2}$$

和第一节的做法类似,我们计算行列式

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3 & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

将上述右边行列式的第二列乘以 $-x_2$ 加到第一列上,再将第三列乘以 $-x_3$ 加到第一列上,根据行列式性质 6,得到的行列式值等于原行列式的值,即

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}x_1 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}x_1 & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}x_1 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

再由行列式性质 3,可将上式右边第一列中的 x_1 提出来,即

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = x_1\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

于是得到 x_1 的解:

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}.$$

同理可得

$$x_2=\frac{\begin{vmatrix}a_{11}&b_1&a_{13}\\a_{21}&b_2&a_{23}\\a_{31}&b_3&a_{33}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}},\quad x_3=\frac{\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&b_1\\a_{21}&a_{22}&b_2\\a_{31}&a_{32}&b_3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}}.$$

可见，三元一次方程组有着和二元一次方程组类似的公式解．这里行列式 $\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}$ 称为方程组（1.2.2）的系数行列式，即未知数的系数组成的行列式．

例 1.2.3 用行列式求解下列三元一次方程组：

$$\begin{cases}2x+3y+5z=2\\x+2y=5\\3y+5z=4\end{cases}$$

解 注意这道题中的未知数排列次序是 x，y，z（相当于 x_1，x_2，x_3）．对方程式中未出现的未知数，其系数应视为0. 先计算系数行列式：

$$\begin{vmatrix}2&3&5\\1&2&0\\0&3&5\end{vmatrix}=2\times\begin{vmatrix}2&0\\3&5\end{vmatrix}-1\times\begin{vmatrix}3&5\\3&5\end{vmatrix}+0\times\begin{vmatrix}3&5\\2&0\end{vmatrix}=20.$$

又

$$\begin{vmatrix}2&3&5\\5&2&0\\4&3&5\end{vmatrix}=2\times\begin{vmatrix}2&0\\3&5\end{vmatrix}-5\times\begin{vmatrix}3&5\\3&5\end{vmatrix}+4\times\begin{vmatrix}3&5\\2&0\end{vmatrix}=-20$$

$$\begin{vmatrix}2&2&5\\1&5&0\\0&4&5\end{vmatrix}=2\times\begin{vmatrix}5&0\\4&5\end{vmatrix}-1\times\begin{vmatrix}2&5\\4&5\end{vmatrix}+0\times\begin{vmatrix}2&5\\5&0\end{vmatrix}=60$$

$$\begin{vmatrix}2&3&2\\1&2&5\\0&3&4\end{vmatrix}=2\times\begin{vmatrix}2&5\\3&4\end{vmatrix}-1\times\begin{vmatrix}3&2\\3&4\end{vmatrix}+0\times\begin{vmatrix}3&2\\2&5\end{vmatrix}=-20.$$

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com