全国煤炭高职高专“十一五”规划教材

高等数学

（下册）

主编 徐 强 刘义山

煤炭工业出版社

全国煤炭高职高专“十一五”规划教材

高等数学

（下　册）

主编　徐　强　刘义山

煤炭工业出版社

·北　京·

内 容 提 要

本书是全国煤炭高职高专“十一五”规划教材之一.

《高等数学》分为上、下两册. 上册共六章，主要内容包括函数及其图形、极限与连续、导数与微分、中值定理与导数的应用、不定积分和定积分及其应用等. 下册共六章，主要内容包括向量代数与空间解析几何、多元函数微分学、多元函数积分学、无穷级数、常微分方程与拉氏变换、数学实验与数学建模等.

本书是高等职业教育和高等专科教育“高等数学”课程的通用教材，也可作为成人教育和函授教育高等数学课程的教学用书.

图书在版编目（CIP）数据

高等数学．下册/徐强，刘义山主编．—北京：煤炭工业出版社，2007.8

全国煤炭高职高专“十一五”规划教材

ISBN 978-7-5020-3127-5

Ⅰ.高… Ⅱ.①徐… ②刘… Ⅲ.高等数学-高等学校：技术学校-教材 Ⅳ.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 091595 号

煤炭工业出版社 出版

（北京市朝阳区芍药居 35 号 100029）

网址：www.cciph.com.cn

环球印刷（北京）有限公司 印刷

新华书店北京发行所 发行

*

开本 787mm×1092mm 1/16 印张 12

字数 275 千字 印数 1—5,000

2007 年 8 月第 1 版 2007 年 8 月第 1 次印刷

社内编号 5928 定价 20.00 元

全国煤炭高职高专基础课程类“十一五”规划教材

编审委员会

前　言

本书是全国煤炭高职高专“十一五”规划教材之一.

本教材根据教育部最新制定的《高职高专教育高等数学课程教学基本要求》和《教育部关于加强高职高专教育专业人才培养工作的意见》,并结合煤炭行业高职高专的教育特色的实际情况而编写.

在本教材的编写过程中,重点体现以下指导思想:突出“以应用为目的,以必需、够用为度”的高等职业教育特色;遵循“突出思想分析,立足能力培养,强化动手技能,解决实际问题”的原则;在保证科学性的基础上,力求讲清概念,减少理论求证;注重学生基本运算能力、分析问题能力、解决问题能力以及理论联系实际能力的培养;强调数学学科与相关学科之间的横向联系,力求做到立足实践与应用,拓宽基础知识面,使一般能力的培养与职业能力相结合,努力适应工科高职高专教学需求.

为了培养和启迪学生思维空间的发展及应用现代科学工具,本教材编写了数学实验与数学建模基本知识.

参加本书编写的人员有:黑龙江科技学院职业技术学院杜彦娟(第七章),辽宁工程技术大学职业技术学院郭晓梅(第八章)、郭春英(第九章),平顶山工业职业技术学院刘义山(第十章)、徐强(第十一章),北京工业职业技术学院吴翠兰(第十一章第七节)、郭振海(第十二章),山西煤炭工业职业技术学院武振琦参加了编写提纲的讨论和审稿工作.本书由徐强、刘义山任主编,武振琦、杜彦娟、郭振海任副主编.

北京工业职业技术学院的塔怀锁老师审阅了全书,并提出了许多宝贵意见.

在此,谨向在本书编写出版过程中,进行指导、参加审稿、提供帮助和支持的所有同志及单位,致以衷心的感谢!

由于编者的水平有限,编写时间仓促,书中不足之处肯定不少,错误之处也在所难免,恳请希望得到专家、同行和读者批评指正,以待本书在教学实践中不断完善,并再版时修正.

编　者

2007 年 5 月

目　　录

第七章　向量代数与空间解析几何

空间解析几何是运用代数方法研究空间图形的一门数学学科，它不仅是学习多元函数必不可少的数学基础，而且在工程技术上应用广泛．向量代数是解决有关数学、物理、力学以及工程技术的重要工具．本章将在空间直角坐标系中研究向量及其代数运算，并以向量为工具研究空间的图形——直线、平面、曲线与曲面．

第一节　向量及其线性运算

一、空间直角坐标系

1．空间直角坐标系

在空间取定一点 O，以 O 为坐标原点作三条两两相互垂直的数轴(一般它们的单位长度相同)，这三条数轴分别称为 x 轴、y 轴和 z 轴，这样就建立了空间直角坐标系 $Oxyz$．习惯上，把 x 轴和 y 轴放置在水平面上，z 轴垂直于水平面．它们的正向通常符合**右手法则**，即右手握住 z 轴，让右手的四指从 x 轴的正方向以 $\frac{\pi}{2}$ 的角度转向 y 轴的正方向，这时大拇指所指的方向就是 z 轴的正方向(图 7－1)．

在空间直角坐标系中，点 O 称为坐标原点，x 轴称为横轴，y 轴称为纵轴，z 轴称为竖轴，它们统称为**坐标轴**．每两个坐标轴所确定的平面称为坐标平面，简称**坐标面**，x 轴与 y 轴所确定的坐标面为 xOy 坐标面，类似的有 yOz 坐标面、zOx 坐标面．三个坐标面相互垂直，它们把整个空间分为八个部分，每一部分称为一个**卦限**．在 xOy 坐标面上方有四个卦限，含 x 轴、y 轴、z 轴正半轴的卦限为第Ⅰ卦限，然后逆时针依次为Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ卦限；xOy 坐标面下方有四个卦限，对应第Ⅰ卦限下方为第Ⅴ卦限，逆时针依次为Ⅵ，Ⅶ，Ⅷ卦限．有关八个卦限的排列顺序如图 7－2 所示．

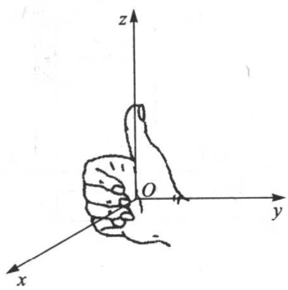

图 7－1

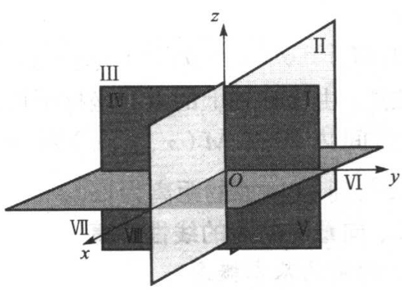

图 7－2

空间直角坐标系建立以后，就可以建立空间的点与有序数组之间的对应关系.

设点 M 是空间一点，过点 M 分别作垂直于三条坐标轴的平面，分别与 x 轴、y 轴、z 轴交于点 P,Q,R（图 7－3）. 这三个点在 x 轴、y 轴、z 轴上的坐标分别为 x,y,z. 这样点 M 唯一地确定了一个有序数组 (x,y,z)；反之，设给定一个有序数组 x,y 和 z，在 x 轴、y 轴和 z 轴上总能找到分别以三个数值为坐标的点 P,Q,R. 过这三点分别作垂直于三条坐标轴的平面，三个平面必交于唯一的点 M，这组数 (x,y,z) 就称做点 M 的坐标，并依次称 x,y 和 z 为点 M 的横坐标、纵坐标和竖坐标，通常记为 $M(x,y,z)$.

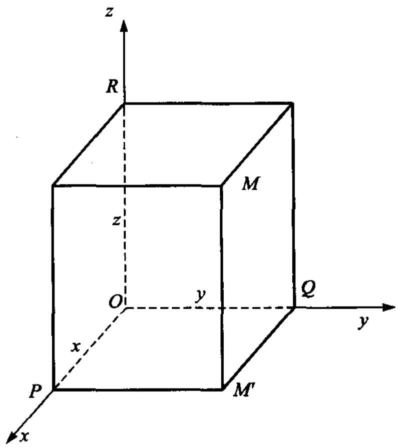

图 7－3

从上面两个方面可知，空间的任意点 M 和有序数组 (x,y,z) 之间建立了一个一一对应的关系. 显然，原点的坐标为 $(0,0,0)$；x 轴、y 轴和 z 轴上点的坐标分别为 $(x,0,0)$，$(0,y,0)$，$(0,0,z)$；xOy 坐标面上点的坐标为 $(x,y,0)$.

各卦限内点（除去坐标面上的点外）的坐标符号见下表。

各卦限内点的坐标符号

Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ	Ⅳ	Ⅴ	Ⅵ	Ⅶ	Ⅷ
(+,+,+)	(−,+,+)	(−,−,+)	(+,−,+)	(+,+,−)	(−,+,−)	(−,−,−)	(+,−,−)

2. 空间两点间的距离公式

设 $M_1(x_1,y_1,z_1)$，$M_2(x_2,y_2,z_2)$ 是空间任意两点，则两点间的距离公式为

$$d=|M_1M_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}. \tag{1}$$

过 M_1,M_2 分别作垂直于三条坐标轴的平面，这六个平面围成一个以 M_1,M_2 为对角线的长方体（图 7－4）.

$$\begin{aligned}d^2=|M_1M_2|^2&=|M_1N|^2+|NM_2|^2\\&=|M_1P|^2+|PN|^2+|NM_2|^2\\&=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2,\end{aligned}$$

所以

$$d=|M_1M_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

注意：由坐标轴上的点和坐标平面上的点的特点可知，空间内的点 $M(x,y,z)$ 到 x 轴的距离为 $\sqrt{y^2+z^2}$，到 xOy 面的距离为 $|z|$.

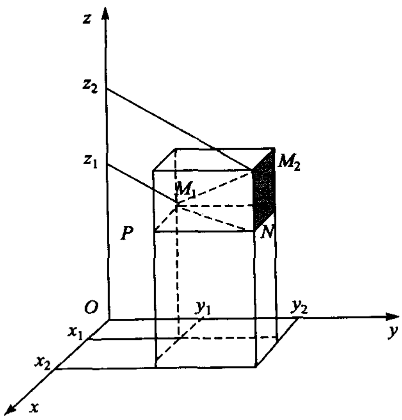

图 7－4

二、向量与向量的线性运算

1. 向量的基本概念

在物理学中，有一些量只有大小，没有方向，如温度、质量、距离等；另一些量既有大小，又有方向，如力、速度、加速度等. 前一类量称为**数量**，

也称**标量**；后一类量称为**向量**或**矢量**.

在数学中，往往用一条有方向的线段，又称**有向线段**来表示向量. 有向线段的方向表示该向量的方向. 以 M_1 为起点，M_2 为终点的有向线段表示的向量，记作 $\overrightarrow{M_1M_2}$（图 7-5），有时用一个粗体字母表示，如 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$，或者用上面带有箭头的字母来表示，如 $\vec{a},\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ 等.

有向线段的长度表示该向量的大小，向量的大小称为**向量的模**. 向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$，$\vec{a}$，$\boldsymbol{a}$ 的模依次记作 $|\overrightarrow{M_1M_2}|$，$|\vec{a}|$，$|\boldsymbol{a}|$.

注意：(1) $|\ |$ 不是绝对值.

(2) 模为 1 的向量称为**单位向量**，$\boldsymbol{a}$ 的单位向量记作 $\boldsymbol{a}^0$.

(3) 模为 0 的向量称为**零向量**，记作 $\mathbf{0}$ 或 $\vec{0}$，规定零向量的方向是任意的.

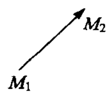

图 7-5

定义 1　模相等且方向相同的向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 称为**相等的向量**，或称 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 相等，记作 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$. 此时，它们是同一个向量.

在实际问题中，有的向量与始点位置无关（比如指南针），而有的与始点位置有关（比如质点的位移）. 在本书中只考虑前一种，即不考虑始点的所在位置，只考虑方向和大小. 因此，如果两个向量在空间经过平行移动后能够完全重合，就称为两个向量相等，即一个向量可以在空间任意地平行移动，这种向量称为**自由向量**. 本书所讨论的都是自由向量.

规定：一切零向量都相等.

若两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 方向相同或者相反，称向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行，记作 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$. 此时 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 又称为共线向量.

两个向量的夹角定义：设给定两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，将向量 $\boldsymbol{a}$ 或 $\boldsymbol{b}$ 平移，使它们的起点重合，两个向量所在射线夹角 θ（其中 $0\leqslant\theta\leqslant\pi$）称为两个向量的夹角，记作 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$. 显然，当 $\theta=0$ 或 $\theta=\pi$ 时，两个向量平行；当 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ 时，两个向量互相垂直.

2. *向量的线性运算*

向量的加法运算和数与向量的乘法运算统称为**向量的线性运算**.

向量的加法运算规定如下：

在研究物体受力时，作用于一个质点的两个力可以看做两个向量，而它们的合力就是以这两个力作为邻边的平行四边形对角线上的向量. 现在讨论向量的加法就是对合力这个概念在数学上的抽象和概括.

将两个不平行的向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的起点放在一起，并以 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 为邻边作平行四边形，则从起点到对角顶点的向量称为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**和向量**，记为 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$（图 7-6），这种求向量和的方法称为向量加法的**平行四边形法则**.

当两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行时，它们的和向量规定如下：

(1) 若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向，其和向量的方向就是 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的共同方向，其模为 $|\boldsymbol{a}|$ 与 $|\boldsymbol{b}|$ 的和.

(2) 若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 反向，其和向量的方向为 $|\boldsymbol{a}|$ 与 $|\boldsymbol{b}|$ 中较大的向量的方向，其模为 $|\boldsymbol{a}|$ 与 $|\boldsymbol{b}|$ 差的绝对值.

除了向量加法的平行四边形法则外，还有一种向量加法的三角形法则，即若将向量 $\boldsymbol{a}$ 的终点与向量 $\boldsymbol{b}$ 的起点放在一起，则以 $\boldsymbol{a}$ 的起点为起点，以 $\boldsymbol{b}$ 的终点为终点的向量称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和向量，记作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$. 这种求和向量的方法称为**向量加法的三角形法则**

(图 7－7).

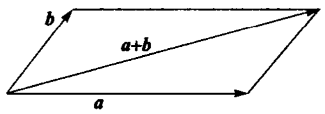

图 7－6

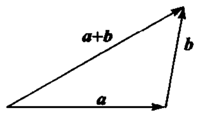

图 7－7

向量的加法满足下列运算律:

(1) 交换律:$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$;

(2) 结合律:$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.

数与向量的乘法运算规定如下:

定义 2 实数 λ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 的乘积是一个向量,称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与数 λ 的乘积,记作 $\lambda\boldsymbol{a}$,并且规定:

(1) $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda|\cdot|\boldsymbol{a}|$;

(2) 当 $\lambda>0$ 时,$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相同;当 $\lambda<0$ 时,$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相反;

(3) 当 $\lambda=0$ 时,$\lambda\boldsymbol{a}$ 是零向量.

特别地,当 $\lambda=-1$ 时,记 $(-1)\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}$,则 $-\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的模相等,方向相反,$-\boldsymbol{a}$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的**负向量**(或逆向量). 对于任意向量 $\boldsymbol{a}$,均有:$\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=0$.

设 λ,μ 都是实数,向量与数的乘法满足下列运算律:

(1) 结合律:$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}=\mu(\lambda\boldsymbol{a})$;

(2) 分配律:$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$, $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.

两向量的减法(即向量的差)规定为 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-1)\boldsymbol{b}$.

向量的减法也可按三角形法则进行,只要把 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的起点放在一起,$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 即是以 $\boldsymbol{b}$ 的终点为起点,以 $\boldsymbol{a}$ 的终点为终点的向量(图 7－8). 由图 7－8 可见,$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 是平行四边形另一条对角线上的向量.

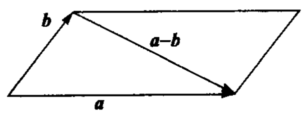

图 7－8

由向量与数的乘法,可得如下定理.

定理 1 设向量 $\boldsymbol{a}\neq 0$,则向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 平行的充要条件是存在唯一的实数 λ,使 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

设向量 $\boldsymbol{a}$ 是一个非零向量,则与 $\boldsymbol{a}$ 同向的单位向量为

$$\boldsymbol{a}^0=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}. \tag{2}$$

例 1 已知平行四边形以向量 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$ 为两邻边,其对角线交点为 M(图 7－9),试用向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 表示向量 $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{MA}$.

解 因为 $\overrightarrow{OC}=2\overrightarrow{OM}$, 又 $\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$,

所以 $2\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$, $\overrightarrow{OM}=\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$;

又因为 $\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$,

所以

$$\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\overrightarrow{MA}=\boldsymbol{a},$$

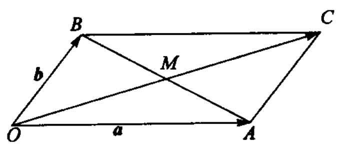

图 7－9

$$\overrightarrow{MA}=\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}).$$

三、向量的坐标表示式

为了进一步发挥向量这一工具的作用,在空间直角坐标系中引进向量的坐标表示式,使向量的运算代数化.

1. 向径及其坐标表示式

在空间直角坐标系 $Oxyz$ 中,分别与 x 轴、y 轴、z 轴的正向同向的单位向量称为**基本单位向量**,分别记作 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$.

在空间直角坐标系 $Oxyz$ 中,以坐标原点 O 为始点,点 M 为终点的向量$\overrightarrow{OM}$称为点 M 对点 O 的**向径**[图 7-10(a)],用粗体字 $\boldsymbol{r}$ 表示.

下面讨论如何用基本单位向量表示向径和任意的向量.

过点 $M(x,y,z)$分别作与三个坐标轴垂直的三个平面,交坐标轴于 $A(x,0,0)$,$B(0,y,0)$,$C(0,0,z)$三点.

由向量的定义及向量的线性运算,得

$$\overrightarrow{OA}=x\boldsymbol{i},\ \overrightarrow{OB}=y\boldsymbol{j},\ \overrightarrow{OC}=z\boldsymbol{k},\ \overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OM'}+\overrightarrow{M'M}.$$

而

$$\overrightarrow{OM'}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AM'},\ \overrightarrow{AM'}=\overrightarrow{OB},$$

所以

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}.\tag{3}$$

式(3)称为**向径$\overrightarrow{OM}$的坐标表示式**,记作

$$\overrightarrow{OM}=\{x,y,z\}.$$

其中 x,y,z 称为向径 $\overrightarrow{OM}$的坐标.

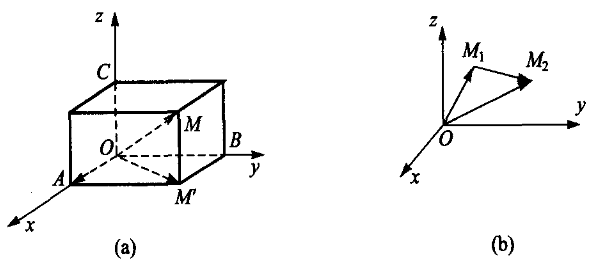

图 7-10

2. 向量的坐标表达式

设$\overrightarrow{M_1M_2}$是以 $M_1(x_1,y_1,z_1)$为起点,$M_2(x_2,y_2,z_2)$为终点的向量[图 7-10(b)].因为$\overrightarrow{OM_1}$,$\overrightarrow{OM_2}$均为向径,所以

$$\overrightarrow{OM_1}=x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k},$$
$$\overrightarrow{OM_2}=x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k},$$

于是

$$\begin{aligned}\overrightarrow{M_1M_2}&=(x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k})-(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k})\\&=(x_2-x_1)\boldsymbol{i}+(y_2-y_1)\boldsymbol{j}+(z_2-z_1)\boldsymbol{k}\end{aligned}\tag{4}$$

或

$$\overrightarrow{M_1M_2}=\{x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1\}. \qquad (4')$$

若设向量 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{M_1M_2}$,它的坐标为

$$a_x=x_2-x_1,\ a_y=y_2-y_1,\ a_z=z_2-z_1,$$

则式(4)可写作

$$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}, \qquad (5)$$

或

$$\boldsymbol{a}=\{a_x, a_y, a_z\}. \qquad (5')$$

式(5)和式(5′)称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的基本单位向量的**分解表示式与坐标表示式**,有序数组 a_x,a_y,a_z 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的**坐标**(又称为 $\boldsymbol{a}$ 在三个坐标轴上的**投影**).

由此可知,只要知道向量的三个坐标,向量的坐标表示式也就唯一确定了.

3. 坐标表示下的向量的线性运算

设 $\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}$,则

(1) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(a_x+b_x)\boldsymbol{i}+(a_y+b_y)\boldsymbol{j}+(a_z+b_z)\boldsymbol{k}$;

(2) $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(a_x-b_x)\boldsymbol{i}+(a_y-b_y)\boldsymbol{j}+(a_z-b_z)\boldsymbol{k}$;

(3) $\lambda\boldsymbol{a}=\lambda(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})=\lambda a_x\boldsymbol{i}+\lambda a_y\boldsymbol{j}+\lambda a_z\boldsymbol{k}$.

由定理1可知,两个非零向量 $\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k}$ 与 $\boldsymbol{b}=b_1\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j}+b_3\boldsymbol{k}$ 平行的充分必要条件是

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}. \qquad (6)$$

4. 向径 $\overrightarrow{OM}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{i}+z\boldsymbol{k}$ 的模

由图7-10(a)知,线段 OM 是长方体的对角线,可得向径 $\overrightarrow{OM}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{i}+z\boldsymbol{k}$ 的模为

$$|\overrightarrow{OM}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}. \qquad (7)$$

5. 向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的模

由式(7)和空间上两点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$,$M_2(x_2,y_2,z_2)$ 间的距离公式,可得向量 $\overrightarrow{M_1M_2}=\{x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1\}$ 的模为

$$|\overrightarrow{M_1M_2}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}. \qquad (8)$$

6. 向量的方向角与方向余弦

设向量 $\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$ 与 x 轴、y 轴、z 轴的正向夹角分别为 $\alpha,\beta,\gamma\,(0\leqslant\alpha,\beta,\gamma\leqslant\pi)$,称其为向量 $\boldsymbol{a}$ 的三个**方向角**,并称 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 为 $\boldsymbol{a}$ **的三个方向余弦**.

若向量的起点不在坐标原点,可将其移动至坐标原点(图7-11),使 $\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$,则 $\angle MOA=\alpha$, $\angle MOB=\beta$, $\angle MOC=\gamma$ $(0\leqslant\alpha,\beta,\gamma\leqslant\pi)$.

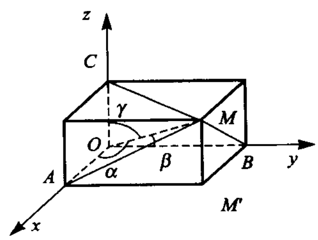

图7-11

下面求向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦.

向量 $\boldsymbol{a}$ 的模为

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}.$$

因为 $\triangle MOA$,$\triangle MOB$,$\triangle MOC$ 都是直角三角形,所以当 $\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\neq 0$ 时,有

$$\begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{a_x}{|\boldsymbol{a}|} = \dfrac{a_x}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}, \\ \cos\beta = \dfrac{a_y}{|\boldsymbol{a}|} = \dfrac{a_y}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}, \\ \cos\gamma = \dfrac{a_z}{|\boldsymbol{a}|} = \dfrac{a_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}, \end{cases} \tag{9}$$

且

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

当方向角为钝角时,式(9)也成立.

注意: 向量 $\boldsymbol{a}$ 的单位向量为

$$\boldsymbol{a}^0=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}.$$

例 2　已知 $\boldsymbol{a}=\{1,-1,-3\}$, $\boldsymbol{b}=\{2,1,-2\}$, 求 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$, $2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}$.

解

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\{1+2,-1+1,-3+(-2)\}=\{3,0,-5\};$$
$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\{1-2,-1-1,-3-(-2)\}=\{-1,-2,-1\};$$
$$2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}=2\{1,-1,-3\}+3\{2,1,-2\}=\{8,1,-12\}.$$

例 3　在 z 轴上,求与 $A(-4,1,7),B(3,5,-2)$两点距离相等的点.

解　设 M 为所求的点,因为 M 在 z 轴上,故可设 $M(0,0,z)$. 根据题意,得

$$\sqrt{[0-(-4)]^2+(0-1)^2+(z-7)^2}=\sqrt{(0-3)^2+(0-5)^2+[z-(-2)]^2}.$$

整理得

$$z=\frac{14}{9}.$$

所以,满足条件的点为

$$M\left(0,0,\frac{14}{9}\right).$$

例 4　试证以点 $A(4,1,9)$, $B(10,-1,6)$, $C(2,4,3)$为顶点的三角形为等腰直角三角形.

证明　由两点间的距离公式,得

$$|\overrightarrow{AB}|^2=(10-4)^2+(-1-1)^2+(6-9)^2=49;$$
$$|\overrightarrow{BC}|^2=(2-10)^2+(4+1)^2+(3-6)^2=98;$$
$$|\overrightarrow{CA}|^2=(4-2)^2+(1-4)^2+(9-3)^2=49.$$

由此可见

$$|AB|=|CA|,$$
$$|AB|^2+|AC|^2=|BC|^2.$$

这表明$\triangle ABC$ 是等腰直角三角形.

例 5　求平行于向量 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$ 的单位向量.

解　所求向量有两个,一个与 $\boldsymbol{a}$ 同向,一个与 $\boldsymbol{a}$ 反向.

因为

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{2^2+1^2+(-2)^2}=3,$$

所以

$$a^0=\frac{a}{|a|}=\frac{2}{3}i+\frac{1}{3}j-\frac{2}{3}k,$$

或

$$a^0=-\frac{a}{|a|}=-\frac{2}{3}i-\frac{1}{3}j+\frac{2}{3}k.$$

例 6　已知向量$\overrightarrow{P_1P_2}$的始点为 $P_1(2,2,5)$，终点为 $P_2(1,4,7)$，试求：

(1) 向量$\overrightarrow{P_1P_2}$的方向余弦；

(2) 与向量$\overrightarrow{P_1P_2}$方向相反的单位向量.

解　(1) 因为

$$\overrightarrow{P_1P_2}=-i+2j+2k,$$

$$|\overrightarrow{P_1P_2}|=\sqrt{(-1)^2+2^2+2^2}=3,$$

所以$\overrightarrow{P_1P_2}$的方向余弦分别为

$$\cos\alpha=-\frac{1}{3},\ \cos\beta=\frac{2}{3},\ \cos\gamma=\frac{2}{3}.$$

(2) 与向量$\overrightarrow{P_1P_2}$方向相反的单位向量为

$$\{-\cos\alpha,-\cos\beta,-\cos\gamma\}=\left\{\frac{1}{3},-\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right\}.$$

习题 7－1

1. 填空：

(1) 已知点 $P(2,-1,3)$，则点 P 到坐标原点的距离为______；到 x 轴的距离为______；到点 $Q(0,1,2)$的距离为______.

(2) 在空间直角坐标系中，点 $A(3,1,2)$关于 xOy 坐标面的对称点为______；关于 x 轴的对称点为______；关于原点的对称点为______.

(3) 已知 $M_1(-1,4,1)$，$M_2(1,0,-3)$，则$\overrightarrow{M_1M_2}=$______；$\overrightarrow{M_2M_1}=$______；$|\overrightarrow{M_1M_2}|=$______.

(4) 已知向量 $a=\{3,4,1\}$，$b=\{0,1,1\}$，则 $-3a=$______；$3a+4b=$______.

(5) 向量 $a=i+j+k$ 的模为______，与其方向相同的单位向量为______.

(6) 已知点 $A(0,-1,2)$，$B(1,1,0)$，则向量$\overrightarrow{AB}$的模为______；方向余弦为 $\cos\alpha=$______；$\cos\beta=$______；$\cos\gamma=$______；单位向量为______.

(7) 已知向量 $a=4i+5j+6k$ 的终点坐标为$(2,3,-1)$，其始点坐标为______.

(8) 已知两个向量$\{5,a,1\}$，$\{10,-1,b\}$平行，则 $a=$______，$b=$______.

2. 在 xOy 坐标面上找点 P，横坐标为 1，且到点 $M_1(1,-2,2)$与 $M_2(2,-1,-4)$距离相等.

3. 设 M 是$\triangle ABC$ 的重心，O 是$\triangle ABC$ 所在平面上任意一点，证明$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$.

4. 试证以点 $A(-1,2,3)$，$B(1,1,1)$，$C(0,0,5)$为顶点的三角形为直角三角形.

5. 求与向量 $a=\{1,-1,0\}$平行且模为 2 的向量.

6. 一个向量与 x 轴、y 轴、z 轴所成的方向角分别为$\alpha,\alpha,2\alpha$，求该向量的方向余弦.

7. 向量 a 的方向角是三个相等的锐角，且$|a|=2\sqrt{3}$，求：

(1) 向量 a 的坐标表示；

(2) 与 $\boldsymbol{a}$ 平行的单位向量.

第二节　向量的乘法运算

一、向量的数量积

1. 向量的数量积定义

由力学知识可知,若力 $\boldsymbol{F}$ 作用在质点 M 上使之产生位移 $\boldsymbol{s}$(图 7－12),力所做的功为

$$W=|\boldsymbol{F}_1||\boldsymbol{s}|=|\boldsymbol{F}||\boldsymbol{s}|\cos\theta.$$

其中,$\boldsymbol{F}_1=\boldsymbol{F}\cos\theta$ 是力 $\boldsymbol{F}$ 在沿着 $\boldsymbol{s}$ 方向的分力;θ 是 $\boldsymbol{F}$ 与 $\boldsymbol{s}$ 的夹角. 在上式中出现了向量的长度和两个向量的夹角,受此启发,联想到要解决有关长度、角度的问题,需要考虑类似于功 W 那样的实数,这个数量是由向量 $\boldsymbol{F}$ 与 $\boldsymbol{s}$ 确定的.

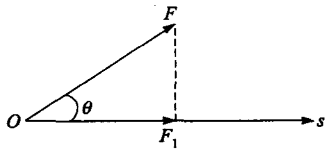

图 7－12

定义 1　两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**数量积**(或点积、内积)规定为一个实数,它等于这两个向量的模及夹角 $\theta(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$ 的余弦的乘积,记作 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$,即有

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta,\quad \theta=(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}). \tag{1}$$

根据定义 1,力 $\boldsymbol{F}$ 所做的功可简记为 $W=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{s}$.

注意: (1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{0}=0$,其中 $\boldsymbol{0}$ 是零向量;

(2) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2$.

特别地,$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}=1$.

证明

(1) 因为 $|\boldsymbol{0}|=0$,所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{0}=0$.

(2) 由数量积的定义 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{a}|\cdot\cos 0=|\boldsymbol{a}|^2$.

因为 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 是三个单位向量,即

$$|\boldsymbol{i}|=|\boldsymbol{j}|=|\boldsymbol{k}|=1,$$

所以

$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}=1.$$

定义 2　$|\boldsymbol{a}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$称为向量 $\boldsymbol{a}$ 在向量 $\boldsymbol{b}$ 上的投影,记作 a_b.

同理,$|\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$称为向量 $\boldsymbol{b}$ 在向量 $\boldsymbol{a}$ 上的投影,记作 b_a(图 7－13).所以两个向量的数量积用投影表示为

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_b\cdot|\boldsymbol{b}|=b_a\cdot|\boldsymbol{a}|. \tag{2}$$

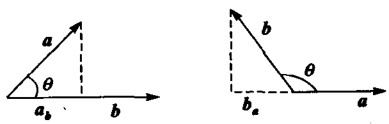

图 7－13

向量的数量积还满足下列运算律:

(1) **交换律**: $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$;

(2) **分配律**: $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$;

(3) **结合律**: $\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}$(其中 λ 为常数).

定理 1　向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 垂直的充分必要条件是

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0.$$

由这个结论可得

$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}=0.$$

规定：向量 **0** 与任何向量都垂直.

2. 数量积的坐标表示

设 $\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}$，则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}&=(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})\cdot(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})\\&=a_xb_x\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}+a_xb_y\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}+a_xb_z\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k}+a_yb_x\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i}+a_yb_y\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}+\\&\quad a_yb_z\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}+a_zb_x\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}+a_zb_y\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{j}+a_zb_z\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}\\&=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z.\end{aligned}$$

所以

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z. \tag{3}$$

式(3)称为数量积的坐标表达式，即在直角坐标系下，两个向量的数量积等于它们的对应坐标乘积之和.

3. 两个非零向量夹角余弦的坐标表达式

设 $\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}$，由两向量的数量积定义及坐标表达式得

$$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}\ (0\leqslant\theta\leqslant\pi). \tag{4}$$

例 1　已知 $\boldsymbol{a}=\{-1,1,4\}$，$\boldsymbol{b}=\{1,2,2\}$，求：

(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$；

(2) $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角；

(3) $\boldsymbol{a}$ 在向量 $\boldsymbol{b}$ 上的投影.

解　(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(-1)\times1+1\times2+4\times2=9.$

(2) 因为

$$\cos\theta=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}=\frac{1}{\sqrt2}=\frac{\sqrt2}{2},$$

所以

$$\theta=\frac{\pi}{4}.$$

(3) $a_b=|\boldsymbol{a}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\sqrt{(-1)^2+1^2+4^2}\cos\frac{\pi}{4}=3\sqrt2\cdot\frac{\sqrt2}{2}=3$；

或由 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_b\cdot|\boldsymbol{b}|$，$a_b=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}=\dfrac{9}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=3.$

例 2　证明向量 $\boldsymbol{a}=\{1,2,3\}$ 与 $\boldsymbol{b}=\{1,1,-1\}$ 是相互垂直的.

证明　因为

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1\cdot1+2\cdot1+3\cdot(-1)=0,$$

所以

$$\boldsymbol{a}=\{1,2,3\}\text{ 与 }\boldsymbol{b}=\{1,1,-1\}\text{ 相互垂直.}$$

例 3　求与 $\boldsymbol{a}=\{1,-1,1\}$ 平行，且 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=3$ 的向量 $\boldsymbol{b}$.

解　**方法1**　由于 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 平行，所以可设

$$\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}=\{\lambda,-\lambda,\lambda\},$$