21 世纪高等院校教材

实变函数与泛函分析

宋叔尼 张国伟 王晓敏 编著

科学出版社
www.sciencep.com

21世纪高等院校教材

实变函数与泛函分析

宋叔尼　张国伟　王晓敏　编著

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书第1章至第6章为实变函数与泛函分析的基本内容，包括集合与测度、可测函数、Lebesgue积分、线性赋范空间、内积空间、有界线性算子与有界线性泛函等. 第7章介绍了Banach空间上算子的微分，第8章介绍了泛函极值的相关内容. 本书循着几何、代数、分析中熟悉的线索介绍了泛函分析的基本理论与非线性泛函分析的初步知识.

本书可用作应用数学、信息与计算科学、统计学专业的本科生教材，也可供相关专业的教师及工科研究生参考.

图书在版编目(CIP)数据

实变函数与泛函分析/宋叔尼，张国伟，王晓敏编著. —北京：科学出版社，2007

(21世纪高等院校教材)

ISBN 978-7-03-018804-5

Ⅰ. 实… Ⅱ. ①宋…②张…③王… Ⅲ. ①实变函数-高等学校-教材 ②泛函分析-高等学校-教材 Ⅳ. O17

中国版本图书馆CIP数据核字（2007）第042941号

责任编辑：李鹏奇 王 静/责任校对：郑金红

责任印制：张克忠/封面设计：陈 敬

科学出版社出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

铭浩彩色印装有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2007年5月第 一 版 开本：B5（720×1000）

2007年5月第一次印刷 印张：12 1/4

印数：1—3 000 字数：232 000

定价：19.00元

（如有印装质量问题，我社负责调换〈环伟〉）

前　言

实变函数起源于对连续而不可微函数以及 Riemann 可积函数等的透彻研究，在点集论的基础上讨论分析数学中一些最基本的概念和性质，其主要内容是引入 Lebesgue 积分并克服了 Riemann 积分的不足. 它是数学分析的继续、深化和推广，是一门培养学生数学素质的重要课程，也是现代数学的基础. 我们选取了实变函数中 Lebesgue 测度、可测函数和 Lebesgue 积分的主要内容. 泛函分析起源于经典的数学物理边值问题和变分问题，同时概括了经典分析的许多重要概念，是现代数学中一个重要的分支，它综合运用了分析、代数与几何的观点和方法研究分析数学和工程问题，其理论和方法具有高度概括性和广泛应用性的特点. 我们精选了泛函分析的基本概念和理论，融入了 Banach 空间中算子微分的概念，介绍了泛函的极值与微分方程的变分原理.

随着科学技术的迅速发展，许多学科相互渗透，大学数学课程的设置发生了很大变化，对于数学与应用数学专业和信息与计算科学专业的学生，要求在理解实变函数与泛函分析基本理论的基础上，强调泛函分析的应用. 因此，本书尽最大努力突出那些体现实变函数与泛函分析基本特征的思想，注重系统性和科学性的同时，尽量避免内容烦琐冗杂，降低课程的难度.

本教材是作者在东北大学数学系多年讲授实变函数与泛函分析的基础上编写的. 它的出版获得了科学出版社的大力支持，获得了东北大学教育科学研究“十一五”规划立项、东北大学教材建设计划立项项目“实变函数与泛函分析教材建设”以及东北大学学位与研究生教育科学研究计划的大力支持，在此向他们表示感谢. 同时，惠答真老师在该课程的教学过程中给出了许多宝贵的建议，在此我们表示衷心的感谢.

本书由宋叔尼负责统稿并编写了第 8 章. 张国伟编写了第 1～3、7 章，王晓敏编写了第 4～6 章.

欢迎读者对书中错误和不足之处提出宝贵意见.

作　者

2006 年 8 月

目 录

第 1 章 集合与测度 ······ 1

1.1 集合及映射 ······ 1

1.2 度量空间 ······ 7

1.3 Lebesgue 可测集 ······ 11

习题 1 ······ 19

第 2 章 可测函数 ······ 22

2.1 简单函数与可测函数 ······ 22

2.2 可测函数的性质 ······ 26

2.3 可测函数列的收敛性 ······ 34

习题 2 ······ 38

第 3 章 Lebesgue 积分 ······ 41

3.1 Lebesgue 积分的概念与性质 ······ 42

3.2 积分收敛定理 ······ 49

3.3 Lebesgue 积分与 Riemann 积分的关系 ······ 58

3.4 微分和积分 ······ 60

3.5 Fubini 定理 ······ 67

习题 3 ······ 68

第 4 章 线性赋范空间 ······ 71

4.1 线性空间 ······ 71

4.2 线性赋范空间 ······ 74

4.3 线性赋范空间中的收敛 ······ 79

4.4 空间的完备性 ······ 83

4.5 列紧性与有限维空间 ······ 86

4.6 不动点定理 ······ 91

4.7 拓扑空间简介 ······ 94

习题 4 ······ 95

第 5 章 内积空间 ······ 96

5.1 内积空间与 Hilbert 空间 ······ 96

5.2 正交与正交补 ······ 99

5.3 正交分解定理 ······ 101

5.4 内积空间中的 Fourier 级数 …… 102
习题 5 …… 106
第 6 章 有界线性算子与有界线性泛函 …… 108
6.1 有界线性算子 …… 108
6.2 开映射定理、共鸣定理和 Hahn-Banach 定理 …… 113
6.3 共轭空间与共轭算子 …… 118
6.4 几种收敛性 …… 127
6.5 算子谱理论简介 …… 130
习题 6 …… 137
第 7 章 Banach 空间上算子的微分 …… 140
7.1 非线性算子的有界性和连续性 …… 140
7.2 微分与导算子 …… 142
7.3 Riemann 积分 …… 152
7.4 高阶微分 …… 155
7.5 隐函数定理与反函数定理 …… 158
习题 7 …… 164
第 8 章 泛函的极值 …… 166
8.1 泛函极值问题的引入 …… 166
8.2 泛函的无约束极值 …… 168
8.3 泛函的约束极值问题 …… 174
8.4 算子方程的变分原理 …… 182
习题 8 …… 187
参考文献 …… 189

第1章　集合与测度

1.1　集合及映射

1. 集合及其运算

集合是最基本的数学概念之一，通常称具有一定性质的对象的全体为集合，集合中的对象称为该集合的元素. 一般用大写字母 A,B 等表示集合，用小写字母 x，y 等表示元素. 如果 x 是集合 A 的元素，称 x 属于 A，记为 $x\in A$. 如果 y 不是集合 A 的元素，称 y 不属于 A，记为 $y\notin A$. 通常用 $\mathbf{R}$ 表示全体实数集合，$\mathbf{Q}$ 表示全体有理数集合，$\mathbf{N}$ 表示全体正整数集合，$\mathbf{C}$ 表示全体复数集合. 不含任何元素的集合称为空集，记为 $\varnothing$. 空集和只含有有限多个元素的集合称为有限集. 不是有限集的集合称为无限集. 以集合为元素的集称为集族.

设 A,B 是两个集合，如果 A 的每个元素都属于 B，称 A 是 B 的子集，记作 $A\subset B$ 或 $B\supset A$，读作 A 包含于 B 或 B 包含 A. 显然任何集合 A 都是自己的子集，即 $A\subset A$. 约定空集 $\varnothing$ 是任何集合的子集. 如果 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，称 A 与 B 相等，记为 $A=B$，这时 A 与 B 所含元素完全相同. 如果 $A\subset B$ 且 $A\neq B$，称 A 是 B 的真子集.

设 A 是非空集合，以 A 的所有子集为元素的集族称为 A 的幂集，记为 2^A，即

$$2^A=\{S\mid S\subset A\}.$$

在讨论某一问题时，如果所有涉及的集合都是一个集合 X 的子集，则称 X 为全集.

设 A,B 是两个集合，集合

$$\{x\mid x\in A\text{ 或 }x\in B\}$$

称为 A 与 B 的并集，记为 $A\cup B$；集合

$$\{x\mid x\in A\text{ 且 }x\in B\}$$

称为 A 与 B 的交集，记为 $A\cap B$；集合

$$\{x\mid x\in A\text{ 且 }x\notin B\}$$

称为 A 与 B 的差集，记为 $A\backslash B$. 如果 X 为全集，集合

$$\{x\mid x\in X\text{ 且 }x\notin A\}$$

称为 A 的余集或补集，记为 A^C 或 C_XA. 当 $A\subset B$ 时，差集 $B\backslash A$ 称为 A 关于 B 的余集，记为 C_BA，显然 $C_BA=B\cap A^C$.

设 $\{A_\alpha\mid\alpha\in I\}$ 是一集族，这里 I 是一个指标集. 集合

$$\{x \mid \text{存在 } \alpha_0 \in I, \text{使得 } x \in A_{\alpha_0}\}$$

称为这一族集合的并集，记为$\bigcup\limits_{\alpha\in I} A_\alpha$或$\bigcup\{A_\alpha \mid \alpha\in I\}$；集合

$$\{x \mid x \in A_\alpha, \forall \alpha \in I\}$$

称为这一族集合的交集，记为$\bigcap\limits_{\alpha\in I} A_\alpha$ 或$\bigcap\{A_\alpha \mid \alpha\in I\}$.

定理 1.1　设$\{A_\alpha \mid \alpha\in I\}$是一集族，$B$ 是任一集合，则

$$\left(\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha\right) \cap B = \bigcup_{\alpha\in I} (A_\alpha \cap B), \left(\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha\right) \cup B = \bigcap_{\alpha\in I} (A_\alpha \cup B).$$

证明　我们只证$\left(\bigcup\limits_{\alpha\in I} A_\alpha\right) \cap B = \bigcup\limits_{\alpha\in I} (A_\alpha \cap B)$.

设$x\in\left(\bigcup\limits_{\alpha\in I} A_\alpha\right) \cap B$，则$x\in B$，且存在$\alpha_0\in I$，使得$x\in A_{\alpha_0}$，于是

$$x \in A_{\alpha_0} \cap B \subset \bigcup_{\alpha\in I} (A_\alpha \cap B),$$

从而$\left(\bigcup\limits_{\alpha\in I} A_\alpha\right) \cap B \subset \bigcup\limits_{\alpha\in I} (A_\alpha \cap B)$.

反之，如果$x\in\bigcup\limits_{\alpha\in I} (A_\alpha \cap B)$，则存在$\alpha_0\in I$，使得$x\in A_{\alpha_0}\cap B$，此即$x\in B$且$x\in A_{\alpha_0}$，从而$x\in\bigcup\limits_{\alpha\in I} A_\alpha$，所以$x\in\left(\bigcup\limits_{\alpha\in I} A_\alpha\right)\cap B$，故又有$\bigcup\limits_{\alpha\in I}(A_\alpha\cap B)\subset\left(\bigcup\limits_{\alpha\in I} A_\alpha\right)\cap B$.

综上可得，$\left(\bigcup\limits_{\alpha\in I} A_\alpha\right) \cap B = \bigcup\limits_{\alpha\in I} (A_\alpha \cap B)$.

定理 1.2(De Morgen 对偶律)　如果 X 为全集，$\{A_\alpha \mid \alpha\in I\}$是 X 的子集族，则

$$\left(\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha\right)^C = \bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha^C, \left(\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha\right)^C = \bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha^C.$$

证明　我们只证$\left(\bigcap\limits_{\alpha\in I} A_\alpha\right)^C = \bigcup\limits_{\alpha\in I} A_\alpha^C$.

设$x\in\left(\bigcap\limits_{\alpha\in I} A_\alpha\right)^C$，则$x\in X$且$x\notin\bigcap\limits_{\alpha\in I} A_\alpha$. 于是存在$\alpha_0\in I$，使得$x\notin A_{\alpha_0}$，故$x\in A_{\alpha_0}^C\subset\bigcup\limits_{\alpha\in I} A_\alpha^C$. 所以$\left(\bigcap\limits_{\alpha\in I} A_\alpha\right)^C\subset\bigcup\limits_{\alpha\in I} A_\alpha^C$.

反之，设$x\in\bigcup\limits_{\alpha\in I} A_\alpha^C$，则存在$\alpha_0\in I$使得$x\in A_{\alpha_0}^C$，于是$x\in X$且$x\notin A_{\alpha_0}$，当然$x\notin\bigcap\limits_{\alpha\in I} A_\alpha$，这意味着$x\in\left(\bigcap\limits_{\alpha\in I} A_\alpha\right)^C$，从而$\bigcup\limits_{\alpha\in I} A_\alpha^C\subset\left(\bigcap\limits_{\alpha\in I} A_\alpha\right)^C$.

综上可得，$\left(\bigcap\limits_{\alpha\in I} A_\alpha\right)^C = \bigcup\limits_{\alpha\in I} A_\alpha^C$.

推论　设 X 为全集，$A\subset X$. 如果$\{A_\alpha \mid \alpha\in I\}$是 X 的子集族，则

$$A\backslash\left(\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha\in I} (A\backslash A_\alpha), A\backslash\left(\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha\right) = \bigcap_{\alpha\in I} (A\backslash A_\alpha).$$

定义 1.1　设$\{A_n \mid n\in \mathbf{N}\}$是一列集合，简记为$\{A_n\}$. 称集合$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k$ 为$\{A_n\}$的上限集，记为$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n$ 或$\limsup\limits_{n\to\infty} A_n$；称集合$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\bigcap\limits_{k=n}^{\infty} A_k$ 为$\{A_n\}$的下限集，记为$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n$ 或

$\lim\limits_{n\to\infty}\inf A_n$. 如果$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n$，则称集列$\{A_n\}$收敛，并称这个集合为集列$\{A_n\}$的极限集，记为$\lim\limits_{n\to\infty}A_n$.

定理 1.3　设$\{A_n \mid n\in\mathbf{N}\}$是一列集合，则

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}A_n=\{x \mid 存在无穷多个 A_n,使得 x\in A_n\},$$

$$\begin{aligned}\underline{\lim_{n\to\infty}}A_n&=\{x \mid 存在 N\in\mathbf{N},使得当 n\geqslant N 时,x\in A_n\}\\&=\{x \mid x 至多不属于\{A_n\}中有限个集\}.\end{aligned}$$

从而$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n\subset\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n$.

证明　$$\begin{aligned}x\in\overline{\lim_{n\to\infty}}A_n&\Leftrightarrow x\in\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k\\&\Leftrightarrow\forall n\in\mathbf{N},X\in\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k\\&\Leftrightarrow\forall n\in\mathbf{N},存在 k_n\geqslant n,使得 x\in A_{k_n}\\&\Leftrightarrow x 属于集列\{A_n\}中无穷多个集.\end{aligned}$$

所以$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n=\{x \mid 存在无穷多个 A_n,使得 x\in A_n\}$.

$$\begin{aligned}x\in\underline{\lim_{n\to\infty}}A_n&\Leftrightarrow x\in\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}A_k\\&\Leftrightarrow 存在 N\in\mathbf{N},使得 x\in\bigcap_{k=N}^{\infty}A_k\\&\Leftrightarrow 存在 N\in\mathbf{N},使得当 n\geqslant N 时,x\in A_n.\end{aligned}$$

所以$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n=\{x \mid 存在 N\in\mathbf{N},当 n\geqslant N 时,x\in A_n\}$.

定义 1.2　设$\{A_n \mid n\in\mathbf{N}\}$是一列集合. 如果

$$A_1\supset A_2\supset\cdots\supset A_n\supset A_{n+1}\supset\cdots$$

则称这列集合为单调递减集列，简称为递减集列；如果

$$A_1\subset A_2\subset\cdots\subset A_n\subset A_{n+1}\subset\cdots$$

则称这列集合为单调递增集列，简称为递增集列. 递增集列与递减集列统称为单调集列.

容易验证单调集列收敛，并且，如果$\{A_n\}$是递增集列，那么$\lim\limits_{n\to\infty}A_n=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$；如果$\{A_n\}$是递减集列，那么$\lim\limits_{n\to\infty}A_n=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n$.

定义 1.3　设 X 为全集，$A\subset X$，作 X 上的函数

$$\chi_A(x)=\begin{cases}1, & x\in A,\\0, & x\notin A.\end{cases}$$

称χ_A 为集合 A 的特征函数.

集合的运算可以用其特征函数的相应运算来表达.

定理 1.4　设 X 为全集，$A,B\subset X$，$\{A_\alpha|\alpha\in I\}$ 是 X 的子集族，则

(1)$A=X\Leftrightarrow\chi_A(x)\equiv1$，$A=\varnothing\Leftrightarrow\chi_A(x)\equiv0$；

(2)$A\subset B\Leftrightarrow\chi_A(x)\leqslant\chi_B(x)$，$A=B\Leftrightarrow\chi_A(x)=\chi_B(x)$；

(3)$\chi_{\bigcap\limits_{\alpha\in I}A_\alpha}(x)=\min\limits_{\alpha\in I}\chi_{A_\alpha}(x)$，$\chi_{\bigcup\limits_{\alpha\in I}A_\alpha}(x)=\max\limits_{\alpha\in I}\chi_{A_\alpha}(x)$；

(4) 如果 $I=\{1,2,\cdots,n\}$，$\chi_{\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i}(x)=\prod\limits_{i=1}^{n}\chi_{A_i}(x)$，当 $A_i(i=1,2,\cdots,n)$ 互不相交时，$\chi_{\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i}(x)=\sum\limits_{i=1}^{n}\chi_{A_i}(x)$；

(5)$\chi_{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n}(x)=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\chi_{A_n}(x)$，$\chi_{\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n}(x)=\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\chi_{A_n}(x)$；

(6)$\chi_{A^C}(x)=1-\chi_A(x)$.

定义 1.4　设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是 n 个非空集合. 称下列有序元素组的集合

$$\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)|x_1\in X_1,x_2\in X_2,\cdots,x_n\in X_n\}$$

为 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的 Descartes 乘积，简称为 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的积集，记为

$$X_1\times X_2\times\cdots\times X_n.$$

特别地，记

$$\underbrace{X\times X\times\cdots\times X}_{n\text{个}X\text{的积集}}=X^n.$$

2. 映射

定义 1.5　设 X，Y 是两个非空集合，如果存在一个法则 f，使对任意 $x\in X$，在 Y 中有唯一确定的元素 y 与之对应，则称 f 是 X 到 Y 的一个映射，记为

$$f:X\to Y.$$

y 称为 x 在映射 f 之下的像，记为 $y=f(x)$. X 称为映射 f 的定义域，记为 $\mathscr{D}(f)$. 集合 $\{y|y=f(x),x\in X\}$ 称为映射 f 的值域，记为 $\mathscr{R}(f)$. 当 $Y=\mathbf{R}$ 时，将映射 f 叫做函数. $X\times Y$ 的子集

$$\{(x,y)|x\in X,y=f(x)\}$$

称为映射 f 的图像，记为 $\mathscr{G}(f)$. 如果 $A\subset X,B\subset Y$，称 Y 的子集

$$\{y\in Y|\text{存在 }x\in A,\text{ 使得 }y=f(x)\}$$

为 A 在映射 f 下的像，记为 $f(A)$；称 X 的子集

$$\{x\in X|f(x)\in B\}$$

为映射 f 下 B 的原像，记为 $f^{-1}(B)$.

设 X,Y,Z 都是非空集合，映射 $f:X\to Y,g:Y\to Z$. 定义

$$(g\circ f)(x)=g(f(x)),\forall x\in X,$$

则 $g\circ f$ 是 $X\to Z$ 的映射，称为 f 与 g 的复合映射.

定义 1.6　设 X，Y 是两个非空集合，映射 $f: X \to Y$. 如果 $\forall x_1, x_2 \in X$，当 $x_1 \neq x_2$ 时，有 $f(x_1) \neq f(x_2)$，则称 f 是 X 到 Y 的单射；如果 $\mathscr{R}(f) = f(X) = Y$，则称 f 是 X 到 Y 的满射；如果 f 既是 X 到 Y 的单射，又是 X 到 Y 的满射，则称 f 是 X 到 Y 的双射，或称 f 是 X 到 Y 的一一对应.

容易看出，如果 X 中的集合 $A_1 \subset A_2$，则 $f(A_1) \subset f(A_2)$；如果 Y 的子集 $B_1 \subset B_2$，则 $f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$.

定理 1.5　设 X，Y 是两个非空集合，映射 $f: X \to Y$. 如果集合 $A \subset X$，$B \subset Y$，$\{A_\alpha \mid \alpha \in I\}$ 是 X 的子集族，$\{B_\alpha \mid \alpha \in I\}$ 是 Y 的子集族，则

(1) $f^{-1}(f(A)) \supset A$，当 f 是单射时，$f^{-1}(f(A)) = A$；

(2) $f(f^{-1}(B)) \subset B$，当 f 是满射时，$f(f^{-1}(B)) = B$；

(3) $f^{-1}\left(\bigcup\limits_{\alpha \in I} B_\alpha\right) = \bigcup\limits_{\alpha \in I} f^{-1}(B_\alpha)$，$f^{-1}\left(\bigcap\limits_{\alpha \in I} B_\alpha\right) = \bigcap\limits_{\alpha \in I} f^{-1}(B_\alpha)$；

(4) $f\left(\bigcup\limits_{\alpha \in I} A_\alpha\right) = \bigcup\limits_{\alpha \in I} f(A_\alpha)$，$f\left(\bigcap\limits_{\alpha \in I} A_\alpha\right) \subset \bigcap\limits_{\alpha \in I} f(A_\alpha)$，当 f 为单射时，$f\left(\bigcap\limits_{\alpha \in I} A_\alpha\right) = \bigcap\limits_{\alpha \in I} f(A_\alpha)$；

(5) $f^{-1}(B^C) = (f^{-1}(B))^C$.

定义 1.7　设 A，B 是两个非空集合，如果存在一个 A 到 B 的双射 f，则称集合 A 与集合 B 对等，记为 $A \sim B$.

如果 A 和 B 是有限集，显然 $A \sim B$ 当且仅当 A 与 B 中有相同个数的元素. 约定空集 $\varnothing \sim \varnothing$. 对等是一种等价关系，即对任何集合 A，B，C 成立.

(1) 自反性：$A \sim A$；

(2) 对称性：如果 $A \sim B$，那么 $B \sim A$；

(3) 传递性：如果 $A \sim B$，$B \sim C$，那么 $A \sim C$.

例 1.1　如果记正奇数集合为 $\mathbf{N}_1$，正偶数集合为 $\mathbf{N}_2$，定义映射 $\varphi: \mathbf{N} \to \mathbf{N}_1$ 为 $\varphi(n) = 2n - 1$，显然 φ 是 $\mathbf{N}$ 到 $\mathbf{N}_1$ 的双射，所以 $\mathbf{N} \sim \mathbf{N}_1$. 可以定义 $\mathbf{N}_1$ 到 $\mathbf{N}_2$ 的双射为 $\varphi(n) = n + 1$，于是 $\mathbf{N}_1 \sim \mathbf{N}_2$. 利用传递性可见，$\mathbf{N} \sim \mathbf{N}_2$.

例 1.2　区间 (a, b) 对等于实数集 $\mathbf{R}$，即 $(a, b) \sim \mathbf{R}$. 实际上，我们可以定义双射 $f: (a, b) \to \mathbf{R}$ 为 $f(x) = \tan\left(\dfrac{x-a}{b-a}\pi - \dfrac{\pi}{2}\right)$.

例 1.1 和例 1.2 表明，一个无限集可以和它的一个真子集对等，而有限集不具备这个性质.

可用下面的 Bernstein 定理来判断两个集合对等.

定理 1.6 (Bernstein 定理)　设 A，B 是两个集合. 如果 A 对等于 B 的一个子集，并且 B 对等于 A 的一个子集，则 A 与 B 对等.

这一定理的证明参见《实变函数与泛函分析概要》(郑维行，王声望　1989).

3. 可数集合

定义 1.8　如果集合 A 与正整数集合 $\mathbf{N}$ 对等，那么称 A 是可数集或可列集. 如果 A 既不是有限集也不是可数集，则称 A 是不可数集.

为了方便，以后经常将有限集和可数集统称为至多可数集.

显然，集合 A 是可数集当且仅当 A 中的元素可以排成无限序列的形式

$$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots\}.$$

定理 1.7　任一无限集中含有可数子集.

证明　设 A 是无限集，则 $A\neq\varnothing$，于是可以选取一个元素 $a_1\in A$. 因 $A\setminus\{a_1\}$ 仍是无限集，可选取元素 $a_2\in A\setminus\{a_1\}$. 同样 $A\setminus\{a_1,a_2\}$ 也是无限集，又可以选取元素 $a_3\in A\setminus\{a_1,a_2\}$. 依此下去，构造出 A 的一个可数子集 $\{a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots\}$.

推论　可数集的每个无限子集也是可数集.

证明　设 A 是可数集，A_0 是 A 的无限子集. 根据定理 1.7 知，A_0 中含有可数子集与 A 对等. 显然 A_0 与 A 的子集 A_0 对等. 所以由 Bernstein 定理可知 A_0 与 A 对等，即 A_0 是可数集.

例 1.3　证明 $(a,b)\sim[a,b]\sim\mathbf{R}$.

证明　在无限集 $(0,1)$ 中任取一个可数子集 $A=\{a_1,a_2,a_3,\cdots\}$，记 $B=(0,1)\setminus A$，作映射 $f:(0,1)\to[0,1]$ 为

$$f(a_1)=0,f(a_2)=1,f(a_n)=a_{n-2}(n\geqslant 3),$$
$$f(x)=x,\forall\, x\in B.$$

易见 f 为双射，故 $(0,1)\sim[0,1]$. 由例 1.2 易见 $(a,b)\sim[a,b]\sim\mathbf{R}$.

定理 1.8　可数个可数集的并集是可数集.

证明　设 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 是一列可数集，$A=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$，把各个 A_n 中的元素写出来，可以排列成一个无限阵列

$$\begin{array}{lccccccccc}
A_1: & a_{11} & \rightarrow & a_{12} & & a_{13} & \rightarrow & a_{14} & & \cdots \\
 & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & \\
A_2: & a_{21} & & a_{22} & & a_{23} & & a_{24} & & \cdots \\
 & \downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & \\
A_3: & a_{31} & & a_{32} & & a_{33} & & a_{34} & & \cdots \\
 & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & \\
A_4: & a_{41} & & a_{42} & & a_{43} & & a_{44} & & \cdots \\
 & \downarrow & & & & & & & & \\
 & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & &
\end{array}$$

将阵列中的元素按箭头所指示的顺序排成一个序列，并去掉重复的元素，

$$\{a_{11},a_{12},a_{21},a_{31},a_{22},a_{13},a_{14},a_{23},a_{32},a_{41},a_{51},a_{42},\cdots\},$$

这样就得到了并集 A，因此 A 是可数集.

定理 1.9　有理数集 $\mathbf{Q}$ 是可数集.

证明　每个正有理数 r 都可以表示成正整数的既约分数$\frac{m}{n}$形式. 记

$$A_n=\left\{\frac{1}{n},\frac{2}{n},\cdots,\frac{m}{n},\cdots\right\}\quad(n=1,2,3,\cdots),$$

则每个 A_n 都是可数集. 于是正有理数的集合 $\mathbf{Q}^+$ 可以表示为

$$\mathbf{Q}^+=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n,$$

由定理 1.8 可知，$\mathbf{Q}^+$ 是可数集. 同理负有理数的集合 $\mathbf{Q}^-$ 也是可数集合. 于是有理数集 $\mathbf{Q}=\mathbf{Q}^+\cup\{0\}\cup\mathbf{Q}^-$ 是可数集.

定理 1.10　区间$[0,1]$是不可数集.

证明　假设区间$[0,1]$是可数集,那么可将$[0,1]$中的所有元素排成无限序列的形式为

$$x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots$$

三等分闭区间$[0,1]$,显然$\left[0,\frac{1}{3}\right]$和$\left[\frac{2}{3},1\right]$中有一个区间不含有 x_1,不妨设其为$\left[0,\frac{1}{3}\right]$,将这个闭区间记为 I_1. 再将 I_1 三等分,$\left[0,\frac{1}{9}\right]$和$\left[\frac{2}{9},\frac{1}{3}\right]$中有一个区间不含有 x_2,将这个闭区间记为 I_2. 同样将 I_2 三等分,得到不含有 x_3 的闭区间 I_3. 依此下去,得到闭区间列$\{I_n\}$,满足

$$I_1\supset I_2\supset\cdots\supset I_n\supset,$$

并且 $x_n\notin I_n,n=1,2,3,\cdots$. 由于区间 I_n 的长度为$\frac{1}{3^n}\to 0$,所以根据区间套定理,存在 $\xi\in I_n\subset[0,1]$ $(n=1,2,3,\cdots)$. 然而 $x_n\notin I_n$,故 $\xi\neq x_n(n=1,2,3,\cdots)$,与 $\xi\in[0,1]$矛盾.

由例 1.3 可得下面推论.

推论　任何区间 I(开区间、闭区间、半开区间、无限区间)都是不可数集.

定理 1.11　如果集合 A 中的元素为直线上互不相交的开区间，那么 A 是至多可数集.

证明　设 $A=\{(\alpha_i,\beta_i)\mid i\in I\}$是直线上一族互不相交的开区间，在每个$(\alpha_i,\beta_i)$中取一个有理数 r_i，作映射 $\varphi:A\to\mathbf{Q}$ 为 $\varphi((\alpha_i,\beta_i))=r_i$，则 φ 是 A 到有理数集 $\mathbf{Q}$ 的子集$\{r_i\mid i\in I\}$的双射，故 A 对等于 $\mathbf{Q}$ 的一个子集$\{r_i\mid i\in I\}$. 因 $\mathbf{Q}$ 是可数集，它的任何子集都是至多可数集，从而 A 是至多可数集.

1.2　度量空间

在集合 $\mathbf{R}^n$ 中，可以定义任意两个元素

$$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbf{R}^n,y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in\mathbf{R}^n$$

的距离为

$$d(x,y)=[(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2]^{\frac{1}{2}}.$$

这样的距离称为 Euclid 距离.

在这一节中，我们在任意非空集合中定义距离，也即度量，并讨论由此引出的一些概念和性质.

1. 度量空间的概念

定义 1.9 设 X 是非空集合,如果映射

$$d(\cdot,\cdot):X\times X\to\mathbf{R}$$

满足下列条件(称为度量公理)：

(1) 正定性:$d(x,y)\geqslant 0,\forall x,y\in X$,且 $d(x,y)=0\Leftrightarrow x=y$;

(2) 对称性:$d(y,x)=d(x,y),\forall x,y\in X$;

(3) 三角不等式:$d(x,y)\leqslant d(x,z)+d(z,y),\forall x,y,z\in X$.

则称 $d(\cdot,\cdot)$是 X 上的距离或度量函数,非负实数 $d(x,y)$称为两点 $x,y\in X$之间的距离. 定义了距离的集合称为度量空间或距离空间,记为(X,d). 如果不需要特别指明度量,简记为 X.

如果 X_1 是度量空间(X,d)的非空子集，显然 $d(\cdot,\cdot)$也是 X_1 上的度量函数,这时称(X_1,d)是(X,d)的子空间.

显然，在任意的非空集合 X 中都可以定义度量，例如

$$d(x,x)=0,\forall x\in X;\ d(x,y)=1,\forall x,y\in X,x\neq y.$$

容易验证这样定义的映射 $d(\cdot,\cdot):X\times X\to\mathbf{R}$ 满足度量公理，并且称这个度量空间为离散度量空间.

命题 1.1 $\mathbf{R}^n$ 中的 Euclid 距离满足度量公理.

证明 显然只需证明 $\mathbf{R}^n$ 中的 Euclid 距离满足三角不等式. 为此，我们首先证明 Cauchy 不等式

$$\left(\sum_{k=1}^n a_kb_k\right)^2\leqslant\left(\sum_{k=1}^n a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^n b_k^2\right),$$

其中 $a_k,b_k\in\mathbf{R}(k=1,2,3,\cdots,n)$.

事实上,$\forall\lambda\in\mathbf{R}$,

$$0\leqslant\sum_{k=1}^n(a_k+\lambda b_k)^2=\sum_{k=1}^n a_k^2+2\lambda\sum_{k=1}^n a_kb_k+\sum_{k=1}^n b_k^2,$$

所以 Cauchy 不等式成立.

由 Cauchy 不等式可得

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^2&=\sum_{k=1}^{n}a_k^2+2\sum_{k=1}^{n}a_kb_k+\sum_{k=1}^{n}b_k^2\\&\leqslant\sum_{k=1}^{n}a_k^2+2\Big(\sum_{k=1}^{n}a_k^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\sum_{k=1}^{n}b_k^2\Big)^{\frac{1}{2}}+\sum_{k=1}^{n}b_k^2\\&=\Big[\Big(\sum_{k=1}^{n}a_k^2\Big)^{\frac{1}{2}}+\Big(\sum_{k=1}^{n}b_k^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big]^2.\end{aligned}$$

在 $\mathbf{R}^n$ 中取

$$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n),y=(y_1,y_2,\cdots,y_n),z=(z_1,z_2,\cdots,z_n),$$

令

$$a_k=x_k-z_k,b_k=z_k-y_k\quad(k=1,2,3,\cdots,n),$$

即得三角不等式.

在 $\mathbf{R}^n$ 中可以定义其他的度量，如 $\forall x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbf{R}^n,y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in\mathbf{R}^n$,定义 $d_1(x,y)=\sum\limits_{k=1}^{n}|x_k-y_k|$ 或 $d_2(x,y)=\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}|x_k-y_k|$. 以后我们提到空间 $\mathbf{R}^n$，除非特别声明，都是指赋予 Euclid 距离的度量空间.

有了度量的概念，我们就可以在度量空间中引入点列收敛的概念.

定义 1.10　设 $\{x_n|n\in\mathbf{N}\}$ 是度量空间 (X,d) 中的一个点列, $x_0\in X$. 如果 $d(x_n,x_0)\to0(n\to\infty)$，则称点列 $\{x_n\}$ 收敛于 x_0，也称 x_0 是点列 $\{x_n\}$ 的极限，记为 $x_n\to x_0(n\to\infty)$ 或 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$.

定理 1.12　度量空间 (X,d) 中的极限具有唯一性.

证明　设 (X,d) 中的点列 $\{x_n\}$ 收敛于 x_0 和 y_0，则 $\forall\varepsilon>0$，存在 $N\in\mathbf{N}$，使得当 $n>N$ 时，

$$d(x_n,x_0)<\varepsilon,d(x_n,y_0)<\varepsilon.$$

于是根据三角不等式，可知当 $n>N$ 时，

$$d(x_0,y_0)\leqslant d(x_0,x_n)+d(x_n,y_0)<2\varepsilon.$$

由于 ε 是任意的，所以 $d(x_0,y_0)=0$，于是 $x_0=y_0$.

容易证明下面定理.

定理 1.13　设度量空间 (X,d) 中点列 $\{x_n\}$ 收敛于 x_0，则 $\{x_n\}$ 的任意子列 $\{x_{n_k}\}$ 也收敛于 x_0.

命题 1.2　在度量空间 $\mathbf{R}^n$ 中，点列 $x_m=(x_1^{(m)},x_2^{(m)},\cdots,x_n^{(m)})(m\in\mathbf{N})$ 收敛于 $x_0=(x_1^{(0)},x_2^{(0)},\cdots,x_n^{(0)})$，当且仅当 $m\to\infty$ 时, $x_k^{(m)}\to x_k^{(0)}(k=1,2,3,\cdots,n)$.

证明　如果 $x_m=(x_1^{(m)},x_2^{(m)},\cdots,x_n^{(m)})(m\in\mathbf{N})$ 收敛于 $x_0=(x_1^{(0)},x_2^{(0)},\cdots,x_n^{(0)})$，则 $\forall\varepsilon>0$，存在 $N\in\mathbf{N}$，使得当 $m>N$ 时，

$$\begin{aligned}|x_k^{(m)}-x_k^{(0)}|&\leqslant[(x_1^{(m)}-x_1^{(0)})^2+(x_2^{(m)}-x_2^{(0)})^2+\cdots+(x_n^{(m)}-x_n^{(0)})^2]^{\frac{1}{2}}\\&=d(x_m,x_0)<\varepsilon\quad(k=1,2,3,\cdots,n).\end{aligned}$$

所以当 $m\to\infty$ 时，$x_k^{(m)}\to x_k^{(0)}(k=1,2,3,\cdots,n)$.

反之，如果 $m\to\infty$时，$x_k^{(m)}\to x_k^{(0)}(k=1,2,3,\cdots,n)$，则$\forall\varepsilon>0$，存在$N\in\mathbf{N}$，使得当 $m>N$ 时，

$$|x_k^{(m)}-x_k^{(0)}|<\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}\quad(k=1,2,3,\cdots,n).$$

所以

$$d(x_m,x_0)=[(x_1^{(m)}-x_1^{(0)})^2+(x_2^{(m)}-x_2^{(0)})^2+\cdots+(x_n^{(m)}-x_n^{(0)})^2]^{\frac{1}{2}}<\varepsilon,$$

于是$\{x_m\}$收敛于 x_0.

设 $f:X\to\mathbf{R}$ 是度量空间(X,d)上的函数. 如果$x_0\in X$，并且对 X 中任意收敛于 x_0 的点列$\{x_n|n\in\mathbf{N}\}$，都有 $f(x_n)\to f(x_0)$，则称 f 在 x_0 处连续. 如果 f 在 X 的每一点连续，则称 f 在 X 上连续.

2. 度量空间中的点集

设 $x_0\in X,\delta>0$，度量空间(X,d) 中的集合

$$B(x_0,\delta)=\{x\in X|d(x,x_0)<\delta\}$$

叫做以 x_0 为球心 δ 为半径的开球，也称为 x_0 的 δ 邻域. 如果度量空间 X 中的子集M 能被包含在一个开球中，则称 M 为有界集，否则称为无界集. 设 A 是 X 的非空子集，如果存在 x_0 的邻域 $B(x_0,\delta)\subset A$，则称 x_0 是 A 的内点，A 的全体内点的集合称为A 的内部，记为 $\mathring{A}$. 如果存在 x_0 的邻域 $B(x_0,\delta)$，使得 $B(x_0,\delta)\cap A=\varnothing$，则称 x_0 是 A 的外点. 如果$\forall\delta>0$，有

$$B(x_0,\delta)\cap(A\backslash\{x_0\})\neq\varnothing,$$

则称 x_0 是 A 的聚点，A 的全体聚点的集合记为 A'，称为 A 的导集. 如果集合 A 的每一点都是它的内点，即 $A=\mathring{A}$，则称 A 为开集. 如果 $A'\subset A$，则称 A 为闭集. 记 $\bar{A}=A\cup A'$，称为 A 的闭包. 如果 $x_0\in A$ 但 x_0 不是 A 的聚点，则称 x_0 是 A 的孤立点. 如果$\forall\delta>0$，有

$$B(x_0,\delta)\cap A\neq\varnothing,\quad B(x_0,\delta)\cap A^C\neq\varnothing,$$

则称 x_0 是 A 的边界点，A 的全体边界点的集合记为∂A.

易证开集的余集是闭集，闭集的余集是开集. 开球是开集，空集$\varnothing$以及 X 本身既是开集也是闭集.

定理 1.14 开集和闭集具有下列性质：

(1) 任意多个开集的并集是开集，有限个开集的交集是开集；

(2) 任意多个闭集的交集是闭集，有限个闭集的并集是闭集.

注 任意多个开集的交集不一定是开集，任意多个闭集的并集不一定是闭集. 例如设 $G_n=\left(-\frac{1}{n},1+\frac{1}{n}\right)(n\in\mathbf{N})$，则 G_n 是开集. 但是

$$G=\bigcap_{n=1}^{\infty}G_n=\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{n},1+\frac{1}{n}\right)=[0,1],$$

G 为闭集. 再如设 $F_n=\left[\frac{1}{n},1-\frac{1}{n}\right](n\in\mathbf{N})$,则 F_n 是闭集. 但是

$$F=\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n},1-\frac{1}{n}\right]=(0,1),$$

F 是开集.

定理 1.15　设 F 是度量空间 X 中的子集，则 F 是闭集当且仅当对 F 中的任意点列 $\{x_n\mid n\in\mathbf{N}\}$,如果 $n\to\infty$ 时，$x_n\to x_0\in X$，那么 $x_0\in F$.

证明　如果 F 是闭集，那么 $F'\subset F$. 如果 F 中的点列 $x_n\to x_0$,不妨设 $x_n\neq x_0$ $(\forall n\in\mathbf{N})$,于是 $\forall\delta>0$，存在 $N\in\mathbf{N}$，当 $n>N$ 时，$d(x_n,x_0)<\delta$，所以

$$B(x_0,\delta)\cap(F\backslash\{x_0\})\neq\varnothing,$$

故 $x_0\in F'\subset F$.

反之，如果 $x_0\in F'$，那么 $\forall n\in\mathbf{N}$，

$$B\left(x_0,\frac{1}{n}\right)\cap(F\backslash\{x_0\})\neq\varnothing.$$

取

$$x_n\in B\left(x_0,\frac{1}{n}\right)\cap(F\backslash\{x_0\}),$$

于是 $d(x_n,x_0)<\frac{1}{n}$，所以 $x_n\to x_0$. 由定理的条件可知 $x_0\in F$,因此 $F'\subset F$,即 F 是闭集.

设 $x_0\in X$,A 是度量空间(X,d)中的子集，称 $\inf\limits_{x\in A}d(x_0,x)$ 为点 x_0 到集合 A 的距离，记为 $d(x_0,A)$.

定理 1.16　设 $x_0\in X$,F 是度量空间(X,d)中的闭子集. 如果 $x_0\notin F$,则 x_0 到 F 的距离 $d(x_0,F)>0$.

证明　如果 $d(x_0,F)=\inf\limits_{x\in F}d(x_0,x)=0$,由下确界的定义，$\forall n\in\mathbf{N}$,存在 $x_n\in F$,使得 $d(x_0,x_n)<\frac{1}{n}$,于是 $x_n\to x_0(n\to\infty)$. 因为 F 是闭子集，所以根据定理 1.15可知 $x_0\in F$,矛盾.

1.3　Lebesgue 可测集

1. 直线 R 上的点集

在 $\mathbf{R}$ 中,Euclid 距离由绝对值来表示，即 $\forall x,y\in\mathbf{R}$,$d(x,y)=|x-y|$. 这时对 $x_0\in\mathbf{R}$ 和 $\delta>0$,x_0 的 δ 邻域为