

新课程标准高考备考系列丛书之二

2007年 高考数学复习 专题讲座

2

(理科)

2007年广东高考最权威的数学复习资料，
由大学教授、广州市高中数学教研员
和中学数学骨干教师联手打造，
供广州市第二轮高考复习使用。

广州市中学数学教学研究會 編
广州市高考数学试题研究組

廣東省出版集團
新世紀出版社

新课程标准高考备考系列丛书之二

2007 年高考数学复习专题讲座

(理科)

广州市中学数学教学研究会
广州市高考数学试题研究组 编

廣東省出版集團
新世紀出版社

责任编辑：熊 雁

封面设计：胡政咏

责任技编：王建慧

新课程标准高考备考系列丛书之二

2007 年高考数学复习专题讲座
(理科)

广州市中学数学教学研究会 编
广州市高考数学试题研究组

*

新世纪出版社出版发行

广州新华印务有限公司

(惠福西路走木街 30 号)

787 毫米×1092 毫米 16 开本 15 印张 300,000 字

2006 年 12 月第 1 版 2006 年 12 月第 1 次印刷

ISBN 7-5405-3269-6 / G·2254

定价：19.50 元

如有印、装质量问题，影响阅读，请与承印厂（电话 020-83333410）联系调换。

编者的话

2007 年高考,是广东、山东、海南、宁夏四省(区)实施新课程标准后的第一次高考,由于课程结构、课程内容与要求、乃至高考方案都有比较大的变化,因此,这一年的高考比以往更引人关注。相信每一位从事数学高考复习教学的人都非常关心,这一年高考的数学试题有何特点,对考试内容和要求应如何把握,选择怎样的复习资料能够使得复习更具有针对性,为了解答上述问题,广州市中学数学教学研究会特别组织编写了这套《新课程标准高考备考系列丛书》,供 2007 年高考数学科第二轮复习使用。

广州市中学数学教学研究会成立于 1961 年,于 1986 年在广州市民政局登记成为具有法人资格的专业学术团体,广州市全体中学数学教师均为其会员,其理事会成员由广州市中学数学教研员和广州市中学数学骨干教师组成,下辖初中、高一、高二、高三四个年级中心组和高考、中考两个数学试题研究组。在广州市教育局教研室的直接指导下,广州市中学数学教学研究会承担了组织开展广州中学各年级全市性数学教研活动的任务,在优化教学内容、改善教学方式、优质资源共享,特别是在高考、中考备考研究等方面取得了显著的成绩,为广州市中学数学教师的专业发展,为全面提高广州市的中学数学教学质量作出了重要的贡献。

本系列丛书包括《2007 年高考数学客观题过关训练》(文理兼用)、《2007 年高考数学复习专题讲座·理科》、《2007 年高考数学复习专题讲座·文科》三本书籍和《2007 年高考数学训练题精选·理科》、《2007 年高考数学训练题精选·文科》两本试卷集。无论是三本书籍还是两本试卷集均包含了 2007 年普通高等学校招生全国统一考试新课程标准数学科考试大纲及广东省考试说明中的必考内容与选考内容,体现了广州市高考数学试题研究组对 2007 年广东省高考数学命题特点的分析,反映了广州市高中数学教学的经验,是广州市数学高考复习备考优秀成果的结晶。

本系列丛书由王林全(华南师范大学数学科学学院教授)、谭国华(广州市教育局教研室主任助理兼中学数学科科长、高中数学教研员)担任主审,由周伟锋(广东省首批名教师、广州市中学数学教学研究会会长兼广州市高考数学试题研究组组长)担任丛书主编,由张先龙(广州市中学数学教学研究会副会长兼广州市高考数学试题研

究组副组长、广州市第二中学副校长)、陈镇民(广州市教育局教研室高中数学教研员)、曾辛金(广州市教育局教研室高中数学教研员、广州市中学数学教学研究会常务理事)、许世红(广州市教育局教研室高中数学教研员)、严运华(广州市番禺区教研室高中数学教研员、广州市中学数学教学研究会常务理事)担任丛书副主编。

《2007 年高考数学复习专题讲座·理科》一书共有二十六讲,每讲由五部分组成:

一、考点分析:主要说明本讲在中学数学中的地位,以及在高考中考查的主要方向,并指出本讲主要注意事项。

二、考题精讲:一般每讲列举 3 道解答题,第一道题为容易题,第二道题为中等题,第三道为中等偏难题。对每道题给出详细解答,并作适当的点评,点评的针对性强,富有启发性。

三、基础训练:一般为 2 道选择题,2 道填空题,3 道解答题,程度为容易题或中等题。

四、能力提升:一般为 2 道解答题,程度较难,主要供数学基础较好的学生选用。

五、参考答案:选择题与填空题都有简答或提示,解答题都有详细的解答。

《2007 年高考数学复习专题讲座·理科》一书由广州市教育局教研室高中数学教研员曾辛金担任主编。参加该书编写和审校的人员均为广州市中学数学骨干教师。

尽管参与本系列丛书编写和审校的人员均抱着非常认真的态度从事着编写与出版工作,但由于水平有限,或偶有疏忽,本系列丛书必定还存在一些不足之处,恳请广大教师和学生提出批评、建议,以便再版时修订。

编 者

2007 年 1 月

目 录

第一讲 集合与常用逻辑用语	1
第二讲 函数的图像和性质	7
第三讲 二次函数、二次方程与二次不等式	13
第四讲 指数函数、对数函数、幂函数	20
第五讲 函数与方程	25
第六讲 函数的综合问题	30
第七讲 三角函数的图像与性质	37
第八讲 三角恒等变换	43
第九讲 等差数列与等比数列	49
第十讲 数列的综合问题	55
第十一讲 不等式的解法	61
第十二讲 基本不等式与不等式的证明	67
第十三讲 平行与垂直	73
第十四讲 面积与体积	79
第十五讲 立体几何综合问题	85
第十六讲 空间向量及其应用	91
第十七讲 直线与圆的方程	100
第十八讲 圆锥曲线与方程	105
第十九讲 直线与圆锥曲线的位置关系	111
第二十讲 轨迹问题	117
第二十一讲 导数的综合问题	123
第二十二讲 古典概型与几何概型	129
第二十三讲 离散型随机变量的分布列、均值与方差	136
第二十四讲 推理与证明	145
第二十五讲 应用性问题(一)	150
第二十六讲 应用性问题(二)	157
参考答案	164

第一讲 集合与常用逻辑用语

一、考点分析

集合语言是现代数学的基本语言,使用集合语言可以简捷、准确地表达数学的一些内容.高考对集合考查有两种主要形式:一是直接考查集合的概念与运算,这类题型多为选择题或填空题;二是以集合为工具考查集合语言和集合思想的运用,集合问题多与函数、方程、不等式、解析几何等有关,故要注意知识的联系.

常用逻辑用语介绍了数理逻辑中的一些基本内容,需对数学概念有准确的记忆和深层次的理解.高考对常用逻辑用语的考查主要是命题之间的相互转化以及充要条件问题.

本讲主要注意事项:

1. 正确理解集合的意义,明确集合的元素及所具有的性质.
2. 注意集合中元素的三要素(确定性、互异性、无序性),特别是元素的互异性对解题的影响.
3. 空集 $\varnothing$ 是一个特殊的集合,它在解题中往往起到关键的作用,切不可疏忽.
4. 掌握集合的图形表示(即 Venn 图)、数轴表示等基本方法的运用.
5. 重视集合中的等价转化,如 $B \subseteq A \Leftrightarrow A \cup B = A \Leftrightarrow A \cap B = B$ 等.
6. 判断复合命题的真假时,一般利用真值表来判断.
7. 掌握充要条件的常用判定方法:
 - (1)定义法;
 - (2)等价法:即利用“ $A \Rightarrow B \Leftrightarrow \neg B \Rightarrow \neg A$ ”;“ $B \Rightarrow A \Leftrightarrow \neg A \Rightarrow \neg B$ ”;“ $A \Leftrightarrow B \Leftrightarrow \neg B \Leftrightarrow \neg A$ ”.对于条件或结论是不等关系的命题,一般运用等价法.
 - (3)利用集合间的包含关系判断:若 $A \subseteq B$,则 A 是 B 的充分条件或 B 是 A 的必要条件;若 $A = B$,则 A 是 B 的充要条件.
8. 正确理解“命题的否定”与“否命题”之间的联系与区别.一般含有全称量词命题的否定为特称量词命题,反之亦然.

二、考题精讲

例1: 设集合 $A = \{-4, 2a-1, a^2\}$, $B = \{9, a-5, 1-a\}$, 已知 $A \cap B = \{9\}$, 求实数 a 的值.

解: $\because A \cap B = \{9\}$, $\therefore 9 \in A$.

若 $2a-1=9$, 则 $a=5$. 此时 $A = \{-4, 9, 25\}$, $B = \{9, 0, -4\}$, 与 $A \cap B = \{9\}$ 矛盾, 舍去.

若 $a^2=9$, 则 $a=\pm 3$.

当 $a=3$ 时, $A = \{-4, 5, 9\}$, $B = \{-2, -2, 9\}$, 与集合中元素的互异性矛盾, 舍去.

当 $a=-3$ 时, $A = \{-4, -7, 9\}$, $B = \{9, -8, 4\}$, 符合题意.

综上所述, $a=-3$.

点评: 本题主要考查集合元素的基本特征——确定性、互异性、无序性. 切入点是分类讨论思想, 由于集合中元素用字母表示, 检验结果必不可少.

例2: 记函数 $f(x) = \sqrt{2 - \frac{x+3}{x+1}}$ 的定义域为 A , $g(x) = \lg[(x-a-1)(2a-x)]$ ($a < 1$) 的定义域为 B .

(I) 求 A ;

(II) 若 $B \subseteq A$, 求实数 a 的取值范围.

解: (I) 由 $2 - \frac{x+3}{x+1} \geq 0$, 得 $\frac{x-1}{x+1} \geq 0$,

$\therefore x < -1$ 或 $x \geq 1$, 即 $A = (-\infty, -1) \cup [1, +\infty)$.

(II) 由 $(x-a-1)(2a-x) > 0$, 得 $(x-a-1)(x-2a) < 0$.

$\because a < 1$, $\therefore a+1 > 2a$. $\therefore B = (2a, a+1)$.

$\because B \subseteq A$, $\therefore 2a \geq 1$ 或 $a+1 \leq -1$, 即 $a \geq \frac{1}{2}$ 或 $a \leq -2$.

而 $a < 1$, $\therefore \frac{1}{2} \leq a < 1$ 或 $a \leq -2$.

故当 $B \subseteq A$ 时, 实数 a 的取值范围是 $(-\infty, -2] \cup [\frac{1}{2}, 1)$.

点评: 本题主要考查集合与函数的基本概念和运算. 本题中 $B \subseteq A \Leftrightarrow A \cup B = A \Leftrightarrow A \cap B = B$, 这些等价关系在解题中经常用到, 另外还要注意 $B \subseteq A$ 隐含着 $B = \emptyset$ 的情形.

本题若去掉 $a < 1$ 的条件则需对实数 a 进行讨论, 请同学们自己试一试.

例 3: 已知 $c > 0$, 设

P : 函数 $y = c^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减.

Q : 不等式 $x + |x - 2c| > 1$ 的解集为 $\mathbf{R}$.

如果 P 和 Q 有且仅有一个正确, 求 c 的取值范围.

解: 函数 $y = c^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减 $\Leftrightarrow 0 < c < 1$.

不等式 $x + |x - 2c| > 1$ 的解集为 $\mathbf{R} \Leftrightarrow$ 函数 $y = x + |x - 2c|$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒大于 1.

$$\therefore x + |x - 2c| = \begin{cases} 2x - 2c, & x \geq 2c, \\ 2c, & x < 2c. \end{cases}$$

$\therefore$ 函数 $y = x + |x - 2c|$ 在 $\mathbf{R}$ 上的最小值为 $2c$, $\therefore 2c > 1$, 即 $c > \frac{1}{2}$.

如果 P 正确, 且 Q 不正确, 则 $0 < c \leq \frac{1}{2}$.

如果 P 不正确, 且 Q 正确, 则 $c \geq 1$.

所以 c 的取值范围为 $(0, \frac{1}{2}] \cup [1, +\infty)$.

点评: 本题主要考查了常用逻辑用语与函数的相关知识, 涉及到命题的判断、指数函数、绝对值概念, 这些都是中学数学的重点内容. 题目表述新颖, 能在强化函数与不等式结合的基础上, 寻求新的知识交汇点, 融入了数学课程改革的新思想, 值得好好品味.

三、基础训练

1. 已知集合 $A = \{0, 2, 3\}$, $B = \{x \mid x = ab, a, b \in A\}$, 则集合 B 子集个数是 ().
(A) 4 (B) 8
(C) 16 (D) 15
2. 给出如下四个命题: ① $\forall n \in \mathbf{N}$, 若 $\sqrt{n} \in \mathbf{N}$, 则 n 是完全平方数; ② $\forall a, b \in \mathbf{R}$, 若 $a^2 = ab$, 则 $a = b$; ③ $\forall x, q \in \mathbf{R}$, 若关于 x 的方程 $x^2 + x - q = 0$ 有实根, 则 $q > 0$; ④ $\forall x, y \in \mathbf{R}$, 若 $x = 0$ 或 $y = 0$, 则 $xy = 0$.

其中为真命题的是 ().

- (A) ①④ (B) ①③

(C) ②④

(D) ②③

3. 设集合 $M = \left\{x \mid 0 \leq x \leq \frac{3}{4}\right\}$, $N = \left\{x \mid \frac{2}{3} \leq x \leq 1\right\}$, 如果把 $b-a$ 叫做集合 $\{x \mid a \leq x \leq b\}$ 的“长度”, 那么集合 $M \cap N$ 的“长度”是_____.
4. 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的减函数, 且 $f(0) = 3$, $f(3) = -1$, 设 $P = \{x \mid -1 < f(x+t) < 3\}$, $Q = \{x \mid f(x) < -1\}$, 若“ $x \in P$ ”是“ $x \in Q$ ”的充分不必要条件, 则实数 t 的取值范围_____.
5. 已知方程 $x^2 + px + q = 0$ 的两个不相等实根为 α, β , 集合 $A = \{\alpha, \beta\}$, $B = \{2, 4, 5, 6\}$, $C = \{1, 2, 3, 4\}$, $A \cap C = A$, $A \cap B = \emptyset$, 求 p, q 的值.

6. 设 p : 方程 $x^2 + mx + 1 = 0$ 有两个不等的负根, q : 方程 $4x^2 + 4(m-2)x + 1 = 0$ 无实根. 若“ $p \vee q$ ”为真, “ $p \wedge q$ ”为假, 求 m 的取值范围.

7. 已知 $a > 0$ 且 $a \neq 1$, 设

P : 函数 $y = \log_a(x+1)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减;

Q : 曲线 $y = x^2 + (2a-3)x + 1$ 与 x 轴交于不同的两点.

如果 P 和 Q 有且仅有一个正确, 求 a 的取值范围.

四、能力提高

8. 已知 $a > 0$, 函数 $f(x) = ax - bx^2$.

(I) 当 $b > 0$ 时, 若对任意 $x \in \mathbf{R}$ 都有 $f(x) \leq 1$, 证明 $a \leq 2\sqrt{b}$;

(II) 当 $b > 1$ 时, 证明: 对任意 $x \in [0, 1]$, $|f(x)| \leq 1$ 的必要条件是 $b-1 \leq a \leq 2\sqrt{b}$.

9. 设 a, b 是两个实数,

$$A = \{(x, y) \mid x = n, y = na + b, n \text{ 是整数}\},$$

$$B = \{(x, y) \mid x = m, y = 3m^2 + 15, m \text{ 是整数}\},$$

$$C = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 144\},$$

是平面 xOy 内的点集合, 讨论是否存在实数 a 和 b 使得: ① $A \cap B \neq \emptyset$ ($\emptyset$ 表示空集), ② $(a, b) \in C$ 同时成立.

第二讲 函数的图像和性质

一、考点分析

函数的图像是函数性质的综合反映,要会运用函数的图像理解和研究函数的性质. 高考对函数图像的考查主要是作图、识图、图像变换以及利用函数的图像研究函数性质、分析解决有关问题的能力. 高考对函数性质的考查主要是函数的定义域、值域、单调性、奇偶性、周期性、对称性等,多以选择题与填空题为主,属于必考内容之一,并且低难度和高难度的试题都有可能出现.

本讲主要注意事项:

1. 会用描点法作函数的图像,并且注意结合函数的周期性、奇偶性等性质,利用平移、对称、翻折、伸缩等基本的图像变换简化图像的作法.
2. 画函数的图像或研究函数的性质时,一定要注意定义域的限制.
3. 判断函数 $y = f(x)$ 的奇偶性时,注意观察函数的定义域是否关于原点对称. 同时注意“函数的定义域关于原点对称”与“奇函数的图像关于原点对称”的内涵是不同的.
4. 会“画图”,还要会“识图”,能根据函数的图像研究函数的定义域、值域、单调性、奇偶性、周期性等性质.
5. 注意对抽象函数 $y = f(x)$ 的对称性与周期性的识别,如 $f(a+x) = f(a-x)$ 和 $f(x+a) = f(x-a)$ 在形式上相近,有时难以区分,可以对比学习!

二、考题精讲

例 1: 证明函数 $f(x) = -x^3 + 1$ 是 $\mathbf{R}$ 上的减函数.

证明 1: 设 $x_1, x_2 \in (-\infty, +\infty)$, 且 $x_1 < x_2$,

$$\text{则 } f(x_1) - f(x_2) = (-x_1^3 + 1) - (-x_2^3 + 1) = x_2^3 - x_1^3$$

$$= (x_2 - x_1)(x_2^2 + x_2x_1 + x_1^2)$$

$$= (x_2 - x_1) \left[\left(x_2 + \frac{1}{2}x_1 \right)^2 + \frac{3}{4}x_1^2 \right].$$

由 $x_1 < x_2$, 则 $x_2 - x_1 > 0$, 得 $f(x_1) - f(x_2) > 0$, 所以 $f(x_1) > f(x_2)$.

故 $f(x) = -x^3 + 1$ 在 $\mathbf{R}$ 上是减函数.

证明 2: $f'(x) = -3x^2$,

当 $x \in (-\infty, 0)$ 时, $f'(x) = -3x^2 < 0 \Rightarrow f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减,

当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $f'(x) = -3x^2 < 0 \Rightarrow f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减,

而 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续,

所以 $f(x) = -x^3 + 1$ 在 $\mathbf{R}$ 上是减函数.

点评: 根据定义证明函数的单调性分三个步骤: ①设变量, ②作差, ③判断符号.

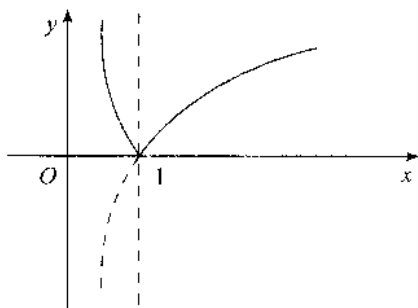
也常用导数的知识证明函数的单调性问题.

例 2: 作出下列函数的图像.

(I) $y = |\log_2 x|$

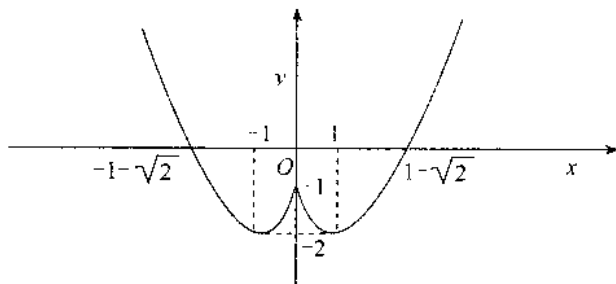
(II) $y = x^2 - 2|x| - 1$

解: (I) $y = |\log_2 x| = \begin{cases} \log_2 x, & x \geq 1, \\ -\log_2 x, & x < 1. \end{cases}$ 其图像如图所示.



(II) $y = x^2 - 2|x| - 1 = \begin{cases} x^2 - 2x - 1, & x \geq 0, \\ x^2 + 2x - 1, & x < 0. \end{cases}$

即 $y = \begin{cases} (x-1)^2 - 2, & x \geq 0, \\ (x+1)^2 - 2, & x < 0. \end{cases}$ 其图像如图所示.



点评: 本题主要考查 $y = |f(x)|$ 和 $y = f(|x|)$ 两种类型的函数图像的作法. 也可以根据对称性作出图像:

(1) 将 $y = f(x)$ 的图像在 x 轴下方的部分以 x 轴为对称轴翻折到 x 轴上方, 其余部分不变, 即得到 $y = |f(x)|$ 的图像;

(2) 将 $y = f(x)$ 的图像 ($x \geq 0$) 的部分作出, 再利用偶函数的图像关于 y 轴的对称性, 作出 $x < 0$ 时的图像, 即得到 $y = f(|x|)$ 的图像.

例 3: 函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 对任意 $x, y \in \mathbf{R}$, 有 $f(x+y) = f(x) + f(y)$, 且当 $x > 0$ 时, $f(x) < 0$, $f(1) = -2$.

(I) 证明 $f(x)$ 是奇函数;

(II) 证明 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是减函数;

(III) 求 $f(x)$ 在区间 $[-3, 3]$ 上的最大值和最小值.

(I) 证明: 函数 $f(x)$ 的定义域 $\mathbf{R}$ 关于原点对称, 由 $f(x+y) = f(x) + f(y)$, 得 $f[x + (-x)] = f(x) + f(-x)$, $\therefore f(x) + f(-x) = f(0)$. 又 $f(0+0) = f(0) + f(0)$, $\therefore f(0) = 0$, 从而有 $f(x) + f(-x) = 0$, $\therefore f(-x) = -f(x)$. 由于 $x \in \mathbf{R}$, $\therefore f(x)$ 是奇函数.

(II) 证明: 任取 $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, 且 $x_1 < x_2$. 则 $f(x_1) - f(x_2) = f(x_1) - f[x_1 + (x_2 - x_1)] = f(x_1) - [f(x_1) + f(x_2 - x_1)] = -f(x_2 - x_1)$.

$\because x_1 < x_2, \therefore x_2 - x_1 > 0, \therefore f(x_2 - x_1) < 0, \therefore -f(x_2 - x_1) > 0$, 即 $f(x_1) > f(x_2)$, 从而 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是减函数.

(III) 解: 由于 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是减函数, 故 $f(x)$ 在 $[-3, 3]$ 上的最大值是 $f(-3)$, 最小值是 $f(3)$.

由 $f(1) = -2$, 得

$$f(3) = f(1+2) = f(1) + f(2) = f(1) + f(1+1) = f(1) + f(1) + f(1) = -6,$$

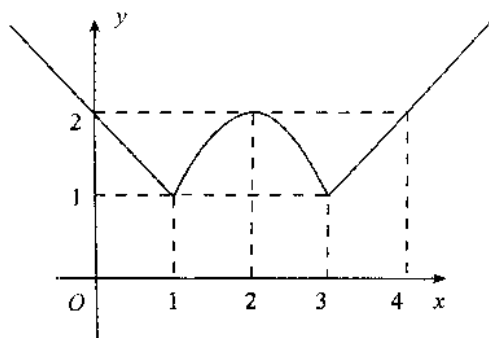
$$f(-3) = -f(3) = 6. \text{ 从而 } f(x) \text{ 在区间 } [-3, 3] \text{ 上的最大值是 } 6, \text{ 最小值是 } -6.$$

点评: 本题主要考查抽象函数的奇偶性、单调性以及限定区间上的最值问题. 判断函数的奇偶性首先要判断函数的定义域是否关于原点对称, 同时注意利用函数的单调性求函数的最值是求最值的一种基本方法.

三、基础训练

1. (2006 年湖南卷) 函数 $y = \sqrt{\log_2 x - 2}$ 的定义域是().
(A) $(3, +\infty)$ (B) $[3, +\infty)$
(C) $(4, +\infty)$ (D) $[4, +\infty)$
2. 函数 $y = \log_{\frac{1}{2}}(2x^2 - 3x + 1)$ 的递减区间为().
(A) $(\frac{3}{4}, +\infty)$ (B) $(-\infty, \frac{3}{4}]$
(C) $(1, +\infty)$ (D) $(-\infty, \frac{1}{2}]$
3. 已知函数 $f(x) = 2^{x+1} - 1$, 则其值域为 _____.
4. 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 且 $y = f(x)$ 的图像关于直线 $x = \frac{1}{2}$ 对称, 则 $f(1) =$ _____.
5. 若直线 $y = 2a^{-1}$ 与函数 $y = |a^x - 1|$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 的图像有两个公共点, 求 a 的取值范围.

6. 如图, 函数的图像是由两条射线及抛物线的一部分组成, 求函数的解析式.



7. 设 $f(x)$ 为定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 对任意 $x \in \mathbf{R}$, 都有 $f(x+2) = f(x)$, 且当 $0 < x < 1$ 时, $f(x) = \frac{2^x}{4^x + 1}$.

(I) 求 $f(0)$ 、 $f(1)$ 的值;

(II) 当 $-1 < x < 0$ 时, 求 $f(x)$ 的解析式.