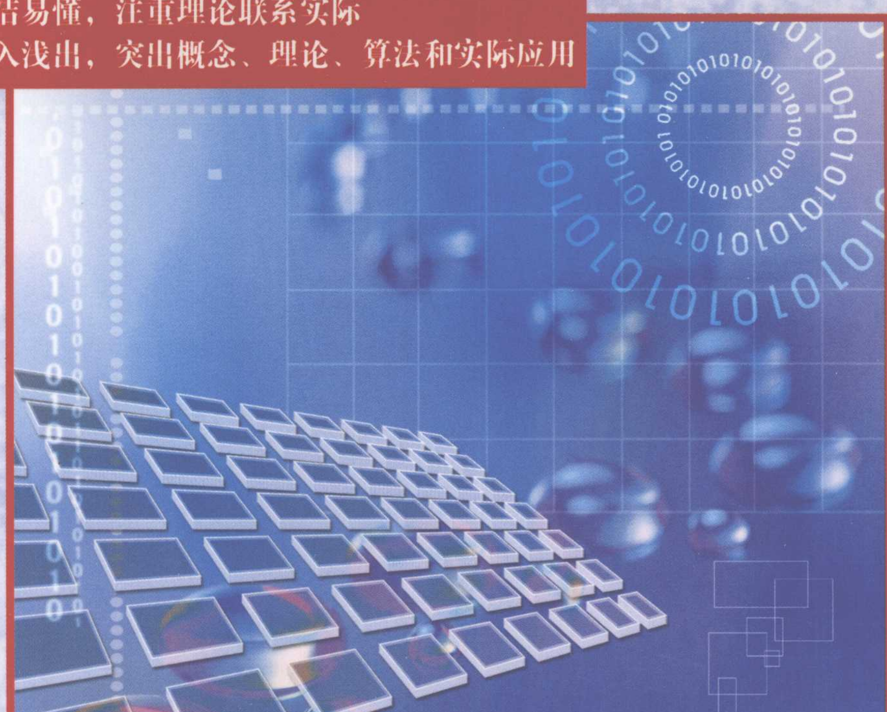
21世纪高等院校计算机教材

离散数学

李昆仑 刘大中 赵红 编著

简洁易懂，注重理论联系实际
深入浅出，突出概念、理论、算法和实际应用



体系严谨 注重实践

中国铁道出版社
CHINA RAILWAY PUBLISHING HOUSE

21世纪高等院校计算机教材

离散数学

李昆仑 刘大中 赵 红 编著

中国铁道出版社
CHINA RAILWAY PUBLISHING HOUSE

内 容 简 介

本书介绍了离散数学基础知识和应用方法。全书共分 4 篇。第 1 篇为数理逻辑，其中包括命题逻辑、一阶谓词逻辑。第 2 篇为集合论，其中包括集合的基本概念、二元关系、函数、自然数、基数、序数。第 3 篇为代数系统，其中包括代数系统的基本概念、几个重要的代数系统：半群、群、环、域、格与布尔代数。第 4 篇为图论，其中包括图的基本概念、图的连通性、欧拉图与汉密尔顿图、树、平面图、图的着色、图的矩阵表示等。为了使内容完整，同时也为了满足不同程度读者的需要，在本书的最后还增加了两个附录，内容分别是初等数论和计数原理。

本书配有大量的适合各种需求的例题和习题，其内容与计算机科学的理论与实践密切结合。本书适合作为高等学校计算机及相关专业的本科教材，也可供计算机专业的科技人员使用或参考。

图书在版编目（CIP）数据

离散数学 / 李昆仑，刘大中，赵红编著. .—北京：中国铁道出版社，2007.2

21 世纪高等院校计算机教材

ISBN 978-7-113-07743-3

Ⅰ. 离… Ⅱ. ①李…②刘…③赵… Ⅲ. 离散数学—高等学校—教材 Ⅳ. O158

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 023533 号

书　　名：**离散数学**

作　　者：李昆仑　刘大中　赵　红

出版发行：中国铁道出版社（100054，北京市宣武区右安门西街 8 号）

策划编辑：严晓舟　秦绪好

责任编辑：陈　宏　徐盼欣

封面制作：白　雪

印　　刷：北京市兴顺印刷厂

开　　本：787×1092　1/16　**印张**：16.5　**字数**：386 千

版　　本：2007 年 5 月第 1 版　　2007 年 5 月第 1 次印刷

印　　数：1～5 000 册

书　　号：ISBN 978-7-113-07743-3/TP・2108

定　　价：22.00 元

21 世纪高等院校计算机教材

编写委员会

前 言

离散数学是现代数学的一个重要分支，是计算机科学与技术的理论基础，也是计算机科学与技术专业的核心课程。通过学习这一课程能够达到两个主要目的：一是为后继课如数据结构、编译系统、操作系统、数据库原理和人工智能等提供必要的数学基础，二是培养和提高学生的抽象思维和逻辑推理能力。本教材编写参考了 ACM 和 IEEE/CS 最新推出的 Computing Curricula 2004，以及教育部高等教育司组织评审通过的《中国计算机科学与技术学科教程 2002》中制定的关于“离散数学”的知识结构和体系等要求。全书共 10 章，主要包括命题逻辑、一阶谓词逻辑、集合的基本概念、二元关系、函数、自然数、基数、序数、代数系统的基本概念、几个重要的代数系统：半群、群、环、域、格与布尔代数、图的基本概念、图的连通性、欧拉图与汉密尔顿图、树、平面图、图的着色、图的矩阵表示等内容，另外为了使本书的内容完整，同时也为了满足不同程度读者的需要，在本书的最后还增加了两个附录，内容分别是初等数论和计数原理。本书体系结构严谨，选材精炼，讲解详实，例题丰富，注重与计算机科学技术的实际问题相结合，并选配了大量难度适当的习题，适合教学使用。

本书是编者结合多年教学实践，在参阅大量国内外教材的基础上编写的。指导思想是力求突出重点、在概念和原理的讲述上准确通俗、简明扼要、规范统一、深入浅出、图文并茂、便于自学。

在本书的编写过程中，得到了刘振鹏教授和李凯教授的大力帮助和指导，他们提供了大量的资料，在此对他们的无私帮助表示衷心的感谢！

本书的第 1 章和第 2 章由刘大中负责，参加编写的有卢素魁、许百成、朱亮和李继民；第 3 章至第 5 章和附录 B 由赵红负责，参加编写的有杨文柱、王兵、田会英、杨刚和侯志彬；第 6 章至第 10 章和附录 A 由李昆仑负责，参加编写的有孟俊霞、张欣、常铁原、马颖丽、赵爱民和王琳。

本书适合作为计算机等有关专业的教材，也可作为自学教材及参考资料，还可供从事计算机及相关专业的科技工作者使用。

由于作者水平有限，书中不足之处在所难免，恳请读者不吝指正。

编 者

2007 年 3 月

目　录

第 1 篇　数理逻辑

第2篇 集 合 论

第 3 篇 代数系统

第4篇 图 论

第 1 篇 数 理 逻 辑

逻辑学（Logic）是研究人类推理过程的科学，数理逻辑（Mathematical Logic）则是用数学的方法来研究逻辑问题的一个数学分支，它把逻辑学所涉及的“概念、判断、推理”符号化和形式化，所以数理逻辑又称符号逻辑.

莱布尼兹（Leibniz）在 17 世纪提出了逻辑数学化的思想. 1930 年 Godel 完全性定理的证明完善了数理逻辑基础. 现代数理逻辑包括公理集合论、证明论、模型论和递归论四个分支. 本篇讲述数理逻辑中最基本的命题逻辑和谓词逻辑，其与计算机科学密切相关. 首先讨论判断（即命题），对推理规律进行学习，即从命题演算开始，然后深入命题的内部从而引入谓词，讨论谓词逻辑.

第 1 章 命 题 逻 辑

1-1 命题与联结词

1-1-1 命题

什么是命题？直观地讲，能判断真假的陈述句称为**命题**. 对于给定句子判断是否为命题，首先要看其是否为陈述句，其次判断它是否有唯一的真值. 如果命题陈述的事情发生了或者与人们公认的客观事实相符就判断为真，称其为**真命题**，并说此命题的真值为真；否则称其为**假命题**，并说此命题的真值为假. 一个命题要么为真，要么为假，二者必居其一. 由于命题只有两种真值，所以称这种逻辑为**二值逻辑**. 真值只有“真”、“假”两种，记作 True 和 False，分别用符号 T 和 F 表示.

【例 1.1】下面的语句是命题：

（1）7 是素数.

（2）对于每一个正整数 m，存在一个大于 m 的素数.

（3）雪是黑的.

（4）1+1=10.

（5）21 世纪末，人类能够证实别的星球存在生物.

其中，（1），（2）是真命题；（3）是假命题；（4）是命题，在二进制中为真，在十进制中为假，要根据上下文确定其真假；（5）也是命题，虽然现在不知其真假，但到 21 世纪末必有确定结论.

【例 1.2】下面的语句不是命题：

（1）x>5.

（2）全体立正！

（3）今天天气多好啊！

（4）请买两张火车票.

（5）明天踢球吗？

（6）我正在说谎.

其中，（1）不是命题，不能确定其真假，x 是变元；（2），（4）是祈使句；（3）是感叹句；（5）是疑问句；（6）是悖论.

感叹句、疑问句、祈使句等都不能作为命题.

为使讨论更具一般性，对命题符号化．通常用英文字母表示一个确定的命题.

例如，P：离散数学是计算机专业的一门必修课.

这时 P 称为命题常量，其值为真.

当然也可用英文字母如 Q 表示不同的命题，这时称 Q 为命题变元，即一个二值（T 或 F）变元．命题变元不是命题.

命题分为原子命题和复合命题．**原子命题**是不能分解为更简单的陈述句．**复合命题**是由联结词、标点符号和原子命题复合构成的命题.

例如，P：张三学习努力．Q：李四工作积极.

P 和 Q 是两个原子命题．那么“张三学习努力而且李四工作积极”就是一个复合命题，它是通过联结词“而且”把两个原子命题联结起来而形成的．下面介绍命题之间的联结词，看其如何构成复合命题.

1-1-2 联结词

定义 1.1（否定联结词） 设 P 为一命题，P 的否定是一个新的命题，记作$\neg P$．$\neg P$ 为 T 当且仅当 P 为 F．联结词“$\neg$”表示命题的否定，称为**否定联结词**或**否定词**，读作“非”或“not”.

P 和$\neg P$ 的关系如表 1-1 所示，表 1-1 叫做否定联结词“$\neg$”的真值表．联结词“$\neg$”也可看作一元逻辑运算.

自然语言中的“不”、“无”、“没有”等词在命题逻辑中相当于“非”.

例如，P：我是一名大学生.

$\neg P$：我不是一名大学生.

表 1-1

P	$\neg P$
T	F
F	T

定义 1.2（合取联结词） 设 P，Q 为两个命题，则 P，Q 的合取为复合命题，记作 $P\wedge Q$ 当且仅当 P，Q 同时为 T 时，$P\wedge Q$ 为 T.

“$\wedge$”是二元逻辑运算符，读作“与”或“and”．联结词“$\wedge$”的定义如真值表 1-2 所示.

表 1-2

P	Q	$P\wedge Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

自然语言中的“和”、“以及”、“并且”、“而且”、“不仅…而且…”等都有“与”的意义.

例如，P：张三学习努力．Q：张三关心集体.

则 $P\wedge Q$：张三不仅学习努力而且关心集体.

【例 1.3】 P：今天下雪．Q：明天下雪.

$P\wedge Q$：今明两天都下雪.

$P\wedge Q$：这两天都下雪.

【例 1.4】 P：地球是行星．Q：雪是白的.

$P\wedge Q$：地球是行星且雪是白的.

定义 1.3（析取联结词）　设 P，Q 为两个命题，则 P，Q 的析取为复合命题，记作 $P\vee Q$．当且仅当 P，Q 同时为 F 时，$P\vee Q$ 为 F，否则 $P\vee Q$ 的真值为 T．联结词“$\vee$”称为合取词，读作“或”或“or”.

“$\vee$”是二元逻辑运算符．联结词“$\vee$”的定义如真值表 1-3 所示.

表 1-3

P	Q	$P\vee Q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

例如，P：今天下雨．Q：明天下雨.

$P\vee Q$：今天下雨或者明天下雨.

$P\vee Q$：今天或明天下雨.

汉语中有“可兼或”和“排斥或”．析取对应汉语中的“可兼或”．并非所有的“或”都可用“$\vee$”表示．例如，我今天 12 点去北京或去上海．该语句中的“或”称为“排斥或”，因为事实上一个人不会同一时刻既去北京，又去上海.

P：我今天 12 点去北京．Q：我今天 12 点去上海.

在 P 和 Q 都为 T 时，原命题为假．与析取联结词定义不符.

析取“$\vee$”指的是“可兼或”．例如，张三是 100 米或 400 米赛跑的冠军.

P：张三是 100 米赛跑的冠军.

Q：张三是 400 米赛跑的冠军.

$P\vee Q$：张三是 100 米或 400 米赛跑的冠军.

在 P 和 Q 都为 T 时，$P\vee Q$ 为 T，与析取联结词定义一致.

定义 1.4（条件联结词）　设 P，Q 为两个命题，则 P，Q 的条件命题为一复合命题，记作 $P\rightarrow Q$，读作“如果 P 则 Q”或“若 P 则 Q”．当且仅当 P 的真值为 T，Q 的真值为 F 时，$P\rightarrow Q$ 的真值为 F，否则 $P\rightarrow Q$ 的真值为 T．我们称 P 为**前件**，Q 为**后件**.

“$\rightarrow$”是二元逻辑运算符．联结词“$\rightarrow$”的定义如真值表 1-4 所示.

表 1-4

P	Q	$P \to Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

有些教材中，“$P \to Q$”亦称为 P 蕴含 Q，而本书在条件命题中避免使用“蕴含”一词，因为以后将另外定义“逻辑蕴含”这个概念．$P \to Q$ 的逻辑关系表示 Q 是 P 的必要条件，P 是 Q 的充分条件．

在自然语言里，“只要 P，就 Q”，“因为 P，所以 Q”，“P 仅当 Q”，“只有 Q 才 P”，“除非 Q 才 P”，“除非 Q，否则非 P”等，都表示 Q 是 P 的必要条件．上述各种叙述方式都应符号化为 $P \to Q$．

【例 1.5】P：张三学习努力．Q：张三学习好．

$P \to Q$：如果张三学习努力，那么张三学习好．

【例 1.6】P：雪是黑的．Q：太阳从西方出来．

$P \to Q$：如果雪是黑的，那么太阳从西方出来．

条件联结词对应自然语言中“如果…则…”．自然语言中对“如果…则…”语句，当前提为假时，结论不管真假，其语句意义往往无法判断．从条件联结词定义可以看到，只要前提为假，不管结论真假，该复合命题真值取 T．

定义 1.5（双条件联结词） 设 P，Q 为两个命题，则 P，Q 的双条件复合命题记作 $P \leftrightarrow Q$，读作“P 当且仅当 Q”．当 P 和 Q 的真值相同时，$P \leftrightarrow Q$ 的真值为 T，否则 $P \leftrightarrow Q$ 的真值为 F．

“$\leftrightarrow$”是二元逻辑运算符．联结词“$\leftrightarrow$”的定义如真值表 1-5 所示．

表 1-5

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

【例 1.7】P：张三上课认真听讲．Q：张三学习好．

$P \leftrightarrow Q$：张三上课认真听讲当且仅当张三学习好．

【例 1.8】P：$\triangle ABC$ 为等边三角形．Q：$\triangle ABC$ 三个角相等．

$P \leftrightarrow Q$：$\triangle ABC$ 为等边三角形的充分必要条件为 $\triangle ABC$ 三个角相等．

以上定义了五种最基本、最常用、也是最重要的联结词 $\neg$，$\wedge$，$\vee$，$\to$，$\leftrightarrow$，将它们组成一个集合 $\{\neg, \wedge, \vee, \to, \leftrightarrow\}$，称为一个联结词集．

需要说明的是：

（1）虽然日常语言的一些关联词与命题逻辑的联结词有对应关系，但由于自然语言的歧义性，使得其间不完全一致．如“张三和李四是大学生”中“和”表示两个命题的逻辑“与”，而“王红和王华是姐妹”中的“和”就不表示逻辑“与”．再如，“他今天做了二十或三十道题”，这里的“或”字只表示题的近似数目，不能用联结词“$\vee$”表达．

（2）命题联结词联结的可以是两个不相关的命题，它只关心形式而不关心内容．比如条件复合命题："如果 2+2=4，则张三学习好．"中，两个原子命题"2+2=4"与"张三学习好"没有因果关系，这个条件复合命题的真值取决于其内部两个原子命题的真值．

练　习　1-1

1．下列句子中，哪些是命题？哪些不是命题？如果是命题，指出它的真值．

（1）3 是素数．

（2）北京是中国的首都．

（3）这个语句是假的．

（4）1+1=10．

（5）$x>0$．

（6）5+2=8．

（7）我喜欢踢足球．

（8）地球外的星球上也有人．

（9）明年国庆节是晴天．

（10）把门关上．

（11）请勿随地吐痰！

（12）他要出去吗？

（13）今天天气真好啊！

2．指出下列各复合命题中的原子命题及联结词．

（1）因为天气冷，所以他穿了羽绒服．

（2）李强学过英语或德语．

（3）中国获得了 2008 年奥运会和 2010 年世博会的主办权．

（4）如果角 A 和角 B 是对顶角，则角 A 等于角 B．

（5）太阳从东边升起当且仅当鸟会飞．

（6）如果你不看足球，那么我也不看足球．

（7）我既不看电影也不看电视，我学习．

（8）除非天下大雨，否则他不乘班车上学．

（9）3+3=6 的充要条件是 $\sqrt{2}$ 是无理数．

3．设命题 P：天刮风；Q：天下雨；R：我将出去．符号化下述语句：

（1）除非天刮风或下雨，否则我将不出去．

（2）如果天刮风并且下雨，我将出去．

（3）如果天不刮风或不下雨，我将不出去．

1-2　命题公式及其赋值

1-2-1　命题公式

日常的命题可以符号化，但一串符号必须满足一些限制才代表命题．下面给出合式公式

限制性构造方法.

定义 1.6　命题演算的合式公式（WFF=Well Formed Formulas）：

（1）单个命题变元本身是一个合式公式.

（2）如果 A 是合式公式，那么$(\neg A)$是合式公式.

（3）如果 A 和 B 是合式公式，那么$(A\wedge B)$，$(A\vee B)$，$(A\rightarrow B)$和$(A\leftrightarrow B)$都是合式公式.

（4）当且仅当能够有限次地应用（1），（2），（3）所得到的包含命题变元、联结词和括号的符号串是合式公式.

例如，P，Q，R 都是命题变元，则$((P\vee Q)\wedge R)$，$((\neg P)\wedge(Q\wedge R))$，$(((P\rightarrow Q)\wedge(Q\vee R))\rightarrow((\neg P)\rightarrow R))$均是合式公式，而$(PQ\rightarrow R)$，$(Q\rightarrow(R\rightarrow P)$等不是合式公式.

为简洁起见，对命题公式约定如下：

（1）否定联结词“$\neg$”只作用于邻接后的原子命题变元.

（2）最外层括号可以省略.

（3）规定联结词的优先级由高到低依次为$\neg$，$\wedge$，$\vee$，$\rightarrow$，$\leftrightarrow$.

按此优先级别，如果去掉括号不改变原公式运算次序，则可以省掉这些括号.

如$((\neg P)\wedge(Q\wedge R))$可以写为：$\neg P\wedge(Q\wedge R)$.

合式公式也称为**命题公式**或**命题形式**，简称为**公式**，通常用大写英文字母表示. 在命题公式中，由于有命题变元出现，真值是不确定的，命题公式不是命题. 但是，如果命题公式中的所有命题变元都解释为具体的命题时，命题公式就成了真值确定的命题. 比如，对于命题公式：$\neg P\wedge Q$，我们不能确定其值. 但是，若 P：雪是白的；Q：2+2=4；则$\neg P\wedge Q$就是一个命题.

定义 1.7　如果公式 A 含有命题变元 P_1，P_2，…，P_n，记为 $A(P_1, P_2, \cdots, P_n)$，并把联结词看作真值运算符，那么公式 A 可以看作是 P_1，P_2，…，P_n 的真值函数. 给 P_1，P_2，…，P_n 各指派一个真值（T/F），称为对公式 A 的一个**赋值**或**解释**. 若指派的赋值使 A 的真值为 T，则称这个赋值为 A 的**成真赋值**，若使 A 的真值为 F，则称这个赋值为 A 的**成假赋值**.

例如，给公式$(P\wedge Q\rightarrow R)$赋值 FTT 是指 P=F，Q=T，R=T，它是该公式的成真赋值；赋值 TTF 是指 P=T，Q=T，R=F，它是该公式的成假赋值.

为方便起见，用 1 对应 T，0 对应 F. 那么公式$(P\wedge Q\rightarrow R)$的成真赋值为 011，成假赋值为 110.

1-2-2　命题公式的真值表

定义 1.8　在命题公式 A 中，对 A 的全部命题变元（分量）赋值，就确定了 A 的一个真值，把分量赋值的各种组合汇列成表，称该表为命题公式 A 的**真值表**.

构造真值表的具体步骤如下：

（1）找出公式中所含的全体命题变项 P_1，P_2，…，P_n（若无下角标就按字典顺序排列），列出 2^n 个赋值.

（2）运算按先括号内后括号外，同一括号层运算符优先级高的先运算，同级别的运算符按从左到右顺序进行.

【例 1.9】 构造命题公式$\neg P\vee R$的真值表.