灰色系统及模糊数学在环境保护中的应用

市政与环境工程系列·数学应用

王治祯　柏景方　编著

哈爾濱工業大學出版社

灰色系统及模糊数学在环境保护中的应用

王治祯　柏景方　编著

哈爾濱工業大學出版社

内容提要

全书共分11章50余节，详细介绍了灰色模型的建立，灰色系统的预测、决策、规划、最优控制、去余控制、灰色系统分析和模糊数学中的几种计算方法等基本知识，重点论述了灰色系统及模糊数学在环境保护中的应用。

本书可供从事环境保护工作的工程技术人员学习使用，也可供市政工程专业、环境工程专业的师生参考使用。

图书在版编目(CIP)数据

灰色系统及模糊数学在环境保护中的应用/王治祯编著.—哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2007.3

(市政与环境工程系列)

ISBN 978-7-5603-2474-6

Ⅰ.灰…　Ⅱ.王…　Ⅲ.①灰色系统-应用-环境保护-研究生-教材 ②模糊数学-应用-环境保护-研究生-教材　Ⅳ.X1

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第019032号

策划编辑　贾学斌
责任编辑　王桂芝　张　瑞
封面设计　卞秉利
出版发行　哈尔滨工业大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街10号　邮编150006
传　　真　0451-86414749
网　　址　http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷　黑龙江省地质测绘印制中心印刷厂
开　　本　787mm×1092mm　1/16　印张13.25　字数325千字
版　　次　2007年4月第1版　2007年4月第1次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5603-2474-6
定　　价　28.00元

前　言

在工业、农业、军事、法制、环保等领域和社会上存在许多不清晰、信息不完全的现象，如在法制系统中，一个案件在侦破之前是不清晰的；在军事系统中，敌方的情况开始时是不清晰的；在环保系统中，污染物在监测化验前是不清晰的。我们把不清晰、信息不完全的现象称为灰色现象。灰(色)是指信息不完全，灰色系统是指信息不完全的系统。我们常用"黑"表示信息缺乏、不清晰；"白"表示信息完全、清晰；"灰"则表示信息部分已知、部分未知，即信息不完全，处于朦胧状态。

灰色现象摆在人们面前，需要人们去认识、研究和解决，而科学的任务就是认识世界和改造世界。1982 年，我国著名控制论专家华中工学院(现为华中科技大学)教授邓聚龙同志在国际权威杂志 SYSTEMS & CONTROL LETTERS 上发表了题为 The Control Problems of Grey Systems(《灰色系统控制问题》)的论文，宣告了灰色系统理论的诞生。

之后，华中工学院掀起了一股"灰色理论"研究热潮，接着，相继有几百篇灰色理论方面的文章在华中工学院学报和中国地质大学学报等期刊杂志上发表，促进了灰色理论的快速发展。

在农业生产中，邓聚龙教授曾利用灰关联动态分析，对山西省农村经济发展态势作了初步的剖析，明确了优势在哪里，潜力在何处，哪些是主要因素、制约因素等，为加速发展山西省的农村经济提供了科学依据。

在现代化工业生产中，科研人员曾应用"灰色相平面"理论，成功地创建了多级高阶液压伺服系统，获得了满意的动态品质并得到广泛的应用。

在林业上，科研人员曾利用"灰色决策"理论的分析结果，对苏北沿海滩涂的开发及造林、育林进行了良性决策及规划。

不难看出，灰色系统理论以其横断面广、内涵丰富、渗透力强、方法实用、理论与实际并重等特点，为人类认识和解决灰色问题即信息不完善系统问题提供了科学方法和手段。可以这样说，灰色系统理论是数学这个大家族中的佼佼者。

随着工业的不断发展，我国环境问题越来越突出，随之而来的层出不穷的灰色难题摆在我们面前，等待我们去研究和解决，如：环境问题中的污染预测问题；环境治理投资效果分析问题；环境评估、决策问题等。

总之，无论是环境问题，还是林业、农业等问题，它们都是一个多因素、多层次、多目标的复杂系统。系统中既有很多已被人们认识清楚的白色信息，也有不少还未被人们发现的黑色信息，而更多的则是人们既知道一些，又不很清楚的灰色信息。灰色信息具有明显的模糊性、随机性和信息不完全，即灰色性，所以，环境问题、林业及农业等问题多是典型的灰色系统。

这样的抽象系统没有物理原型，要探索这一过程的运行机制，采用传统的数学分析方法进行预测、分析、决策，显然是远远不够的，必须依靠严谨的数学逻辑描述，即系统的分析和研究。实践证明，灰色系统理论正是应用灰色理论及模糊论等方法，并结合生产、工作中的实际情况，解决了上述问题。

本书所介绍的分析方法，主要有灰色建模、灰色预测、灰色规划、灰色优化和灰色分析。这些分析方法基本上涵盖了灰色系统理论中的五大应用。为了能达到上述目的，全书以基本概念为序，对灰色理论中常用的若干主要方法都有所涉猎，以期勾画出一个大概轮廓。同时，着力对建模和预测进行了较详细的介绍，以便使读者对几种建模方法、预测方法直到实际应用，能有一个大致的了解和掌握。

由于灰色理论与模糊集合论及模糊数学同是解决灰色及模糊性问题的一门学科，所以在本书的第10、11章简要介绍了模糊集合论及与之相关的模糊数学的一些概念和应用。

模糊数学是现代数学的一个分支，而模糊集合论又是它的理论基础，所以二者都是运用数学方法来研究和解决模糊现象中的客观规律性及客观世界中一些模糊不清的问题，使模糊变为清晰。

在自然界和社会上，常出现一些过渡状态的、带有不确定性的事物，在这些不确定的事物中，一类是带有随机性的，可以通过试验统计，应用概率论解决；另一类事物是带有不确定性的，即模糊性。如“明年发大水的可能性很大”，“发大水”发多大的水不明确，“可能性很大”表示判断也不明确，应用概率论不易解决，需要寻求更好的解决方法，人们在不断探索研究过程中，便产生了模糊集合论和以它为基础理论的模糊数学。

模糊数学是应用数学工具，将事物模糊性用隶属度进行定量化处理，由其引申的处理方法有多种，如模糊聚类分析法、优先比法、综合评估法等。本书将扼要介绍模糊数学及灰色理论在环境保护上的应用。

灰色系统与模糊数学的区别在于各有各的研究领域，各有各的研究方法。灰色系统着重研究外延明确而内涵不明确的问题；模糊数学则是研究内涵明确而外延不明确的问题。例如：“这个人18岁左右”，外延是这个人，而不是别人，外延是明确的，“18岁左右”作为概念，内涵不明确，是灰色系统研究的问题。又如“年轻人”作为一个概念，内涵明确，多少岁的人算年轻人，外延不明确，也即界限不明确，那又如何去划分这个界限呢？这正是模糊数学研究的问题。那到底什么是外延呢？工程上解释是，工厂、企业向外延伸的部分称为外延，如设备的购置等。而内涵指着眼于工厂、企业内部而言，如内部职工的培训等。而在灰系统和模糊数学中，都对外延和内涵定义的十分含糊，综合说：我们把符合某个“概念”的那些对象的全体叫做“概念”的外延。如所有COD、BOD_5、SS、pH等，就是构成“污染物”这一概念的外延。它限定了“概念”的内涵，即限定了“污染物”这个概念的内涵。也即凡污染物所共有而非污染物所不具备的特性，便是“污染物”这一概念的本质属性。所以说，外延实际就是一个集合，而灰色系统正是通过这一灰集研究该集以外的“世界”。而模糊数学与之相反。

由于内涵与外延又都是用来刻画“概念”的两个方面，都属概念模糊，所以无法用经典

集合论来描述，进而引出模糊集合论及模糊数学这一学科。它把普通集合的二元论“是”与“非”中的“1”与“0”两种取值扩大到在“0”与“1”之间取值。也就是说，它把精确的领域扩展到模糊现象的领域，而模糊数学正是研究这一领域的最有力工具。虽然它从20世纪60年代诞生以来，历经近50年历程，但至今仍不失它的魅力，这也正是笔者编写此书的初衷。

自然，作为一门科学，无论是灰色系统理论，还是模糊数学，它们的理论基础都是严谨的、高深的，其内容也是多姿多彩的。但由于我们编写本书的目的是向环保工作者（也包括农、林业工作者）介绍灰色理论和模糊数学在环境保护中的应用，因此，无意去介绍它的定理、定义。这样一来，本书内容的广度和深度以及举例，无疑都是有限的。特别由于笔者水平有限，书中疏漏在所难免，恳请读者批评指正。最后感谢曾给予过指导的北京林业大学袁嘉祖教授，也感谢曾给予过帮助的付海江、胡金波同志，更感谢在百忙中为此书多次修改、审核和验算的王桂芝和贾学斌老师。

王治祯　柏景方

2006年12月

目　录

第1章 灰色系统概言

1.1 概　　言

1.1.1 什么是灰色系统

当代社会既是物质的社会又是信息的社会，人们对信息的掌握大致可分为三类：一类是人们全部已知；另一类是一无所知；再一类是知道一些，但又不很清楚。例如，2005年吉林石化爆炸引发的松花江污染问题中，开始人们只知道它给松花江造成的污染是严重的，但严重到什么程度不十分清楚，后来通过不断取样化验，取得了完整的信息资料，人们才渐渐清楚污染的程度。又如，在农业生产中，某地区由于干旱少雨，将会造成这一地区农业减产，但到底减产到什么程度并不明确。在林业生产中，由于人们大量的无节制地砍伐树木，造成采育失衡，因此势必给一些地区带来生态破坏，这种破坏甚至影响到几代人，但若问影响的程度到底怎样？人们是不明确的。之所以如此，这是因为在许多问题及领域里，有许多与之关联的信息不明确。

在控制论中，人们一般把问题或领域称为系统，用颜色的深浅来形容系统信息的多少。比如，黑箱表示系统内部结构、参数、特征等一无所知；反之，一个系统内部若特征全部确知，则称为白，白表示信息充足；而介于白与黑之间，或说部分信息已知、部分信息未知的这类问题称之为灰，而含有灰信息的系统称之为**灰色系统**。环境保护、农业生产、林业生产等就是典型的灰色系统，在这庞大的灰色系统之下又包括许许多多灰色子系统。如，我们把环保监测系统称为灰色系统，那么一个待测的水样就是该系统下的一个子系统。之所以也把这个水样称之为灰色系统，是因为水样中的污染物成分、含量有些已被人们认识，而有些并不明确。因此，有理由这样认为，灰现象(信息)存在于各系统中。是否还可以这样认为：一切领域都含有灰色，而我们无时无刻不生活在灰色系统里？但需要指出的是，只有当我们用灰色理论去探讨某一系统时，才可把这一问题(或领域)称之为灰色系统(以下简称灰系统)。

这里也许有人会问：灰色和模糊以及灰色系统与模糊集合论有区别吗？回答是肯定的。灰色是指某系统信息不完全，而模糊是指某事物在属性上表现模糊。而且研究的领域也是不同的，它们的区别在于灰色系统理论(以下简称灰理论)着重研究外延明确而内涵不明确的问题，而模糊集合论则是研究外延不明确而内涵明确的问题。比如，天黑是一种自然现象，如果从灰理论研究的角度看待它，“天黑”是灰色的命题，因为它作为概念，人们是清楚的，不存在信息不完全问题。但究竟把几点钟定义为天黑呢？则不容易回答。对此，科学工作者用一个模糊集来描述，这个模糊集往往会定在5点左右。显见“5点左右”，外延是明确的，因为研究的是晚5点，而不是其他时刻。而“天黑”作为一个概念，内涵明确，外延不明确。如何回答这一问题，也正是模糊集合论所要关心和研究的内容。

总之，灰理论着重研究如何依据有限的灰色信息(灰元)去预测该系统的未来变化趋势

或决策等。

1.1.2 灰色系统的研究内容

灰理论从20世纪80年代初创立以来,不仅成功地应用于工程控制、经济管理、未来学等研究领域,而且在复杂多变的环境综合整治、规划、决策等方面都取得了可喜的成就。就其研究的内容来看,大致可分如下5个方面。

1.灰色系统模型的建立

根据灰理论并依据社会、生态、环境等系统的行为特征数据,找出因素间或因素本身的数学关系称为**灰系统建模**。其建立的模型称**灰色模型**(以下简称**灰模型**)。如,将某地区的生态结构视为灰系统,则用灰理论并依据该系统的投入与产出等序列数据建立动态模型,从而分析影响该地区生态结构发展的主要因素有哪些。

除此之外,应用灰模型等知识还可以对灰系统进行经济技术分析、投资效果分析,以及发展趋势、经济发展动态分析等,所有这些分析都离不开灰色模型。

2.灰色系统预测

用灰模型可以解决一向认为不能解决的连续微分方程的建模问题并进行预测等。为什么能做到这点呢?因为灰理论认为,客观系统虽然表现复杂,数据离乱,但总是潜藏着某种内在规律,而且这种规律是有序的。因此,只要将众多的原始数据进行某种处理后,便可出现明显的指数规律。而灰理论在建模时正是采用了累加处理方法,使之变成有序数列,然后再进行建模并进行预测的。

如,有如下4个监测数据(单位:mg/L),即

$$x^{(0)}(1) = 2.63$$
$$x^{(0)}(2) = 4.14$$
$$x^{(0)}(3) = 2.20$$
$$x^{(0)}(4) = 3.12$$

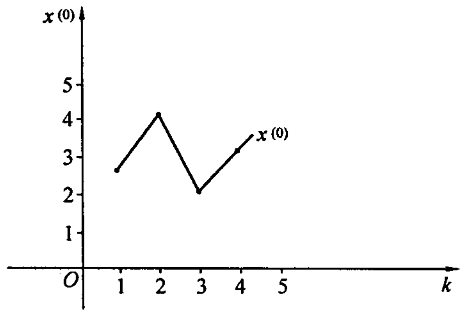

图1.1

依据该组数据作图,如图1.1所示。

显见,数据零散,无规律可言。但如将上述原始数据作累加生成处理,即

$$x^{(1)}(1) = x^{(0)}(1) = 2.63$$
$$x^{(1)}(2) = x^{(0)}(1) + x^{(0)}(2) = 2.63 + 4.14 = 6.77$$
$$x^{(1)}(3) = x^{(0)}(1) + x^{(0)}(2) + x^{(0)}(3) = 6.77 + 2.20 = 8.97$$
$$x^{(1)}(4) = x^{(0)}(1) + x^{(0)}(2) + x^{(0)}(3) + x^{(0)}(4) = 8.97 + 3.12 = 12.09$$

再将生成后的有序数列重新作图,如图1.2所示。

由图1.2看出,无规律的原始数列经累加生成处理后,得到了无摆动的递增的有规律性的图形。可见,对灰系统完全可以将其原始数列经累加生成后建立灰模型。

既然灰理论可以将原始数据经累加处理后建立灰模型,那么建模的常用数据有哪些呢?一般说来,有下面几种:① 科学试验数据;② 化验数据;③ 经验数据;④ 决策数据。

根据上述数据建立灰模型,可以有助于我们掌握灰系统的发展趋势,找出规律,利于预测、决策等,这就是建模的目的。

目前，灰预测从其功用和特征方面可分为 5 类，即

(1) 数列预测：即指对某个灰系统发展变化的大小与时间所作的预测。

(2) 灾变预测：即指对灰系统异常值的预测，或说是对给定灰数发生时刻的预测。如，根据每年降雨量的大小(多少)，预测旱、灾年的发生时间。又如，根据江河每年流量的多少，预测丰、枯水期发生的时间；根据各年取暖期平均气压值的多少，预测大气污染等。

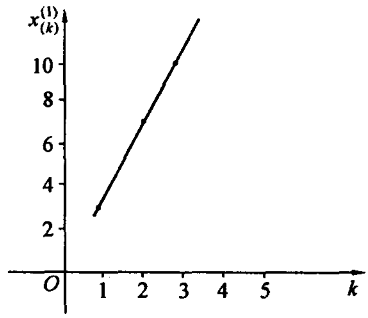

图 1.2

(3) 季节灾变预测：即指发生在某一年中某个季节，或某一个特定区内的预测。

(4) 拓扑预测：即指整体预测，它是用灰模型 GM(1,1) 预测未来发展变化的整个波形，也称波形预测。

(5) 系统预测：指对系统中多个变量一起进行预测，主要用来预测变量之间发展变化的关系。

3. 灰色系统分析

所谓灰色系统分析是指对某一个系统发展态势的分析、主次因素的分析等。如，将某地区的农业经济结构视为灰系统，则利用灰理论中的关联度分析法可分析影响该地区农业经济结构发展的主要因素有哪些，这就是灰系统分析。

应用灰模型还可对灰系统进行经济技术分析、投资分析以及发展趋势分析和发展动态分析等，所有这些分析统称为**灰色系统分析**。

4. 灰色决策

选定一个合适的对策去对付某一个事件的发生，以便取得最佳效果称决策。如某企业拟用有限的资金对本企业的污水进行治理，经考查有多种方案，然而，如何在满足现有资金和达到有效治理情况下，选择最佳方案呢?这就是决策要解决的问题。若采用的是灰理论去解决，那么这个决策就称为**灰色决策**。

5. 灰色控制

灰色控制指用 GM(1,1) 模型构成的预测控制。如，确认某条江河已发生严重污染，如何减少排污量以达到减轻污染的目的，这就是控制问题。若所用方法是灰理论方法，则称为**灰色控制**，灰色控制所采用的方法主要是五步建模法。

1.2　有关名词概念

1.2.1　灰数

一个信息不完全的数称为**灰数**，记为“⊗”。如，某种污染物质量浓度为 0.55 mg/L 左右，则可记为 ⊗ = 0.55 mg/L 或 ⊗ (0.55)。又如，某值域在 0.45 ~ 0.55 之间，则可记为 ⊗ = [0.45,0.55]。

一般说来，“⊗” 意指一般的灰数；“⊗ (a)” 意指以 a 为白化值的灰数；“$\otimes_{ij}$” 意指第 ij 个灰数；“⊗ (i,j)” 与“$\otimes_{ij}$” 的意义相同；“$a(\otimes_{ij})$” 意指第 ij 个 a 元素是灰数。

1.2.2　灰元

信息不完全或者内涵难以穷尽的元素，称为**灰元**。

1.2.3　灰关系

信息不完全或机制不明确的关系，称为**灰关系**。具有灰关系的因素是灰因素，灰因素之间的量化作用，称为灰关联。如，大气污染与逆温的关系；江河污染的程度与污染物排量和江水流量的关系等。

1.2.4　灰色系统

含灰数、灰元或灰关系的系统，称信息不完全系统。如按灰色理论去研究它，则就可称此系统为**灰色系统**。灰系统可分为本征性灰系统和非本征性灰系统两类。一般说来，把运行机制不明确，行为轨迹难以控制，又缺乏物理原型的灰系统，称为本征性灰系统；把与之相反的灰系统称为非本征性灰系统。生态、农业、林业、经济等可称为本征性灰系统；工程技术等可认为是非本征性灰系统，这种系统可用某种准则去构造它的模型。

1.2.5　灰数的等权处理

等权处理是对原始数据的处理方法，一般有 4 种。至于采用哪种方法，视情况而定。

(1) 均值法：用数列均值去除对应数列的每一个数据，得到的新数列称均值化数列。

(2) 初值化：用原始数列的第一个数去除其余各数，得到的新数列称初值化数列。

(3) 累加生成：由于灰系统对一切随机量都可看作是在一定范围内变化的灰色量，因此，为适合灰色系统建模需要，进而提出"生成"概念，"生成"即指对原始数列作累加(或累减)处理。累加生成一般可简写为 AGO。若记 $x^{(0)}$ 为原始数列，$x^{(r)}$ 为 r 次累加生成后数列，即

$$x^{(0)} = \{x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), \cdots, x^{(0)}(n)\}$$
$$x^{(r)} = \{x^{(r)}(1), x^{(r)}(2), \cdots, x^{(r)}(n)\}$$

则 r 次 AGO 算式可写为

$$x^{(r)}(k) = x^{(r-1)}(1) + x^{(r-1)}(2) + \cdots + x^{(r-1)}(k) = \sum_{m=1}^{k} x^{(r-1)}(m) \xlongequal{\text{或}} x^{(r)}(k+1) + x^{(r-1)}(k)$$

一般常用的是一次累加。

例如，有原始数列 $x^{(0)} = (2.5, 2.7, 2.8, 3.0)$，作一次累加(AGO)，根据

$$x^{(1)}(k) = \sum_{m=1}^{k} x^{(0)}(m)$$

故

$k = 1$ 时　$x^{(1)}(1) = \sum_{m=1}^{1} x^{(0)}(m) = x^{(0)}(1) = 2.5$

$k = 2$ 时　$x^{(1)}(2) = \sum_{m=1}^{2} x^{(0)}(m) = x^{(1)}(1) + x^{(0)}(2) = 2.5 + 2.7 = 5.2$

$k=3$ 时　$x^{(1)}(3)=\sum_{m=1}^{3}x^{(0)}(m)=x^{(1)}(2)+x^{(0)}(3)=5.2+2.8=8$

$k=4$ 时　$x^{(1)}(4)=\sum_{m=1}^{4}x^{(0)}(m)=x^{(1)}(3)+x^{(0)}(4)=8+3.0=11$

即
$$x^{(1)}(k)=(2.5,5.2,8,11)$$
或写成
$$\mathrm{AGO}x^{(0)}=x^{(1)}=(2.5,5.2,8,11)$$

(4) 累减生成：累减生成是累加生成的逆运算，可理解为 $x^{(0)}$ 作 r 次累加(AGO)得 $x^{(r)}$，将 $x^{(r)}$ 作 r 次累减得 $x^{(0)}$，其所用符号为 IAGO。因此，可由累加公式得出累减算式，即由

$$x^{(r)}(k)=x^{(r)}(k-1)+x^{(r-1)}(k)$$

得累减算式

$$x^{(r-1)}(k)=x^{(r)}(k)-x^{(r)}(k-1)$$

则一次累减为

$$x^{(0)}(k)=x^{(1)}(k)-x^{(1)}(k-1)$$

二次累减为

$$x^{(1)}(k)=x^{(2)}(k)-x^{(2)}(k-1)$$

二次累减一般不常用，而一次累减只在求还原值时用到。如，求 GM(1, N) 模型的还原值时要用到一次累减。例如 $x^{(1)}=(2.5,5.2,8,11)$，试对 $x^{(1)}$ 作一次累减生成，即由 $x^{(0)}(k)=x^{(1)}(k)-x^{(1)}(k-1)$ 得

$k=1$ 时　$x^{(0)}(1)=x^{(1)}(1)-x^{(1)}(0)=2.5-0=2.5$

$k=2$ 时　$x^{(0)}(2)=x^{(1)}(2)-x^{(1)}(1)=5.2-2.5=2.7$

$k=3$ 时　$x^{(0)}(3)=x^{(1)}(3)-x^{(1)}(2)=8-5.2=2.8$

$k=4$ 时　$x^{(0)}(4)=x^{(1)}(4)-x^{(1)}(3)=11-8=3.0$

即
$$x^{(0)}(k)=(2.5,2.7,2.8,3.0)$$

显见，累减是累加的逆生成。

1.2.6　灰关联系数

灰关联系数是作为灰关联程度的一种衡量尺度，其算式为

$$\xi_i(k)=\frac{\min\min|x_0(k)-x_i(k)|+0.5\max\max|x_0(k)-x_i(k)|}{|x_0(k)-x_i(k)|+0.5\max\max|x_0(k)-x_i(k)|}$$

式中　$x_0(k)$—— 参数数列；

$x_i(k)$—— 比较数列；

$\xi_i(k)$—— 关联系数，其值称 x_i 对 x_0 在 k 时刻的关联系数；

0.5—— 分辨系数，一般在 0 ~ 1 之间；

min min —— 二级最小；

max max —— 二级最大。

1.2.7　关联度

关联系数的平均值即**关联度**。因为关联系数很多，信息过于分散，不便于比较，为此有必要将各个时刻的关联系数集中为一个值，而求平均值便是这种信息集中处理的一个方法，即

$$\gamma_i = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{n}\xi_i(k)$$

或记为

$$\gamma_i = \gamma_{0i} = \gamma(x_0, x_i) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\gamma[x_0(k), x_i(k)]$$

式中　γ_i——x_i 对 x_0 的灰关联度，或称为序列关联度、平均关联度、线关联度；

x_0—— 参考数列；

x_i—— 比较数列。

γ_i 值越接近 1，说明相关性越好。

1.2.8　白化权函数

令 $f(x)$ 为 x 的单调函数，x 为灰量（大、中、小）或区间值，且 $f(x)\in[0,1]$，则称 $f(x)$ 为灰量的白化权函数。就其某一个灰系统的白化权函数生成看，一般有 3 种形式，如图 1.3 所示。对任意 x_i，则相应的白化权函数为

$$f(x_i) = \frac{1}{x_m - x_0}(x_i - x_0)$$

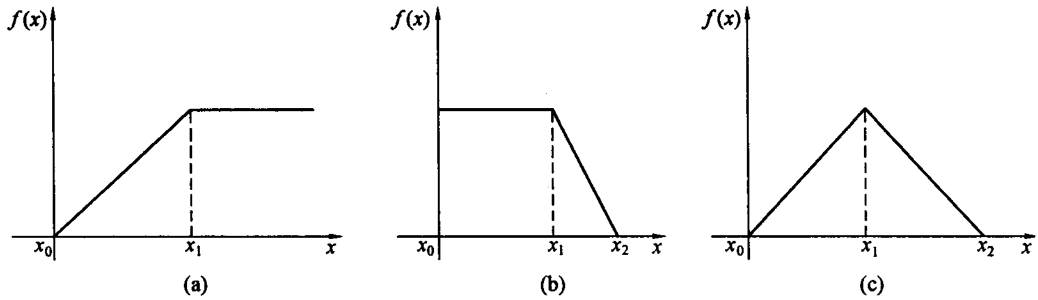

图 1.3

1.2.9　灰色统计

以灰数的白化权函数生成为基础，按某种灰数所描述的类别进行归纳整理，称灰色统计。它实际上也是一种白数灰化处理，或白数的灰化归纳（类），步骤如下：

(1) 给出决策量白化值 d_{ij}，按不同的 i,j 列出下述矩阵

$$\boldsymbol{D} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1^* & 2^* & 3^* \end{array} \\ \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \\ \mathrm{III} \end{array}$$

其中，$1^*, 2^*, 3^*, \cdots, N_a$ 为决策方案；Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，…，N_b 为决策群体。

(2) 给出决策灰量（类），即给出决策与灰数的白化权函数。

(3) 求决策系数 n_{jk}，即

$$n_{jk} = \sum_{j=1}^{N_0} f_k(d_{ij}) N_i$$

式中　N_i——第 i 个决策群体决策人数；

$f_k(d_{ij})$——第 i 个决策群体对第 j 个决策方案所提的决策量白化权数，其中 $k = 1, 2, 3, \cdots, N_c$（决策群类）；$j = 1^*, 2^*, 3^*, \cdots, N_a$；$i = \text{I}, \text{II}, \text{III}, \cdots, N_b$；

n_{jk}——第 j 个决策方案属于第 k 个灰类的系数。

(4) 求决策权 γ_{jk}，即

$$\gamma_{jk} = \frac{n_{jk}}{n_j}$$

式中，$n_j = \sum_{i=1}^{Nc} n_{jk}$。

(5) 确定决策行向量，即

$$\gamma_j = (\gamma_{j1}, \gamma_{j2}, \cdots, \gamma_{jN})$$

式中　γ_j——第 j 个决策方案在不同决策类下的权。

(6) 判断灰类。

经灰色统计、相关系数大小等运算后，确定出最优解和最佳实施方案，称为**判断灰类**。

1.2.10　灰色聚类

建立在灰数的白化函数生成基础上的方法还有灰色聚类，**灰色聚类**是将聚类对象按不同聚类指标所拥有的白化数进行几个灰类归纳，以判断该聚类对象属于哪一类。可按如下几步进行：

(1) 给出聚类白化数 d_{ij}；$j \in \{1^*, 2^*, \cdots\}$ 聚类指标；$i \in \{\text{I}, \text{II}, \cdots\}$ 聚类对称；d_{ij} 表示 i 类聚类对象对第 j 个聚类指标的白化数。

(2) 确定灰类白化函数；

(3) 求标定的聚类权数 n_{kj} 的值；

$$n_{kj} = \frac{\lambda_{kj}}{\sum_{i=1}^{n} \lambda_{ij}} \qquad (j = 1, 2, \cdots, m)$$

(4) 求聚类系数 δ_{ij} 的值；

$$\delta_{ij} = \sum_{k=1}^{n} f_{kj}(d_{ik}) n_{kj}$$

(5) 构造聚类向量；

(6) 聚类分析。

其中 λ_{ij} 表示标定的最大效益值；$f_{kj}(d_{ik})$ 为 d_{ik} 下的白化函数。$k \in \{1^*, 2^*, \cdots, n^*\}$ 为聚类指标，$j \in \{1, 2, \cdots, m\}$ 为灰数 $\otimes_j$。

若给定 $f_{kj}(x)$ 为图 1.4 中的任一图形，便可求出 n_{kj} 值。

【例 1.1】　某地区有 4 个县，共有 3 种作业方式，即种植业 1^*，养殖业 2^*，工副业 3^*，其中有"高"效益、"中"效益、"低"效益 3 种灰类。试按给定的 $\boldsymbol{D}$ 中值进行区划，即哪个县属于哪种效益。

【解】　第 1 步，给出聚类白化数 d_{ij}。