



ZHENG (JIE) TI SILU DE
PEIYANG YU XUNLIAN

初中平面几何

证(解)题思路的培养与训练

三角形部分

SANJIAOXING BUFEN

规律发现总结与应用

迎中考迎奥赛的金钥匙

举一反三触类旁通

吕全善/编著

学会和掌握一套证解题方法
胜过做万题



大连出版社
DALIAN PUBLISHING HOUSE

责任编辑：王天华 刘晓媛

封面设计：张 金



ZHENG(JIE)TI SILU DE
PEIYANG YU XUNLIAN

ISBN 978-7-80684-518-9



9 787806 845189 >

定价：14.00 元

初中平面几何
证(解)题思路的培养与训练

三角形部分

吕全善 编著

大连出版社

© 吕全善 2007

图书在版编目(CIP)数据

初中平面几何证(解)题思路的培养与训练. 三角形
部分/吕全善编著. —大连:大连出版社, 2007. 5

ISBN 978-7-80684-518-9

I. 初... II. 吕... III. 几何课—初中—教学参考
资料 IV. G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 048859 号

责任编辑:王天华 刘晓媛
封面设计:张 金
版式设计:金东秀
责任校对:王恒田

出版发行者:大连出版社
地址:大连市西岗区长白街 10 号
邮编:116011
电话:(0411)83627430/83620941
传真:(0411)83610391
网址:<http://www.dl-press.com>
电子信箱:chs@dl.gov.cn

印刷者:大连天正华延彩色印刷有限公司
经销者:各地新华书店

幅面尺寸:140mm × 203mm
印 张:7.5
字 数:188 千字
印 数:1-5000

出版时间:2007 年 7 月第 1 版
印刷时间:2007 年 7 月第 1 次印刷
书 号:ISBN 978-7-80684-518-9
定 价:14.00 元

大连出版社

如有印装质量问题,请与我社营销部联系
购书热线电话:(0411)83627430/83620941
版权所有·侵权必究

前 言

为了帮助广大中学生学好平面几何和教师进一步教好几何,以适应培养建设人才的需要,作者根据多年教研成果与教学经验编写了本套丛书。本书的主要内容,作者曾先后在沈阳、抚顺、本溪、铁岭、盘锦、大连、北京等市做过学术讲演,特别是曾受天津市教育局的邀请为该市的几何骨干教师举办了为期近一周的培训班。作者在上述各地讲学时,均受到中学数学教师和学生的热烈欢迎和高度评价。

本套丛书基于内容较多和为学生学习方便起见,分三册出版:《三角形部分》;《图形的全等变换》;《四边形部分》。

本套丛书的重点是各章的例题思路探索与规律总结。在探索证(解)题途径方面创立了分析法图解、综合法图解和分析综合法图解,使学生易于接受和教师便于搞启发式教学。在应用三种图解的同时,发现和总结了很多规律,从而创立了一系列探索证(解)题的规则,如,“等代转化规则”、“只具部分全等条件须引辅助线构造全等三角形规则”、“条件集中法规则”、“相似三角形形成形规则”以及“分和”、“分差”、“截长”、“补短”等方法,使学者有章可循。

应用三种图解并根据所创立的一系列规则去探索证(解)题途径(被誉为吕氏图解教学法),证(解)题就自然水到渠成、迎刃而解。因而几何题中辅助线的引出,就再也不是某些“天才”头脑中固有的或从天上掉下来的不可思议的东西了。所以作者编著本套丛书的目的,是送给读者一支猎枪,而不只是一堆猎物。为了帮助读者进一步掌握规律和牢记规律,以提高证(解)题能力,还在

大部分范例后面作了规律总结。

本书还收集了近年来的相关中考题,有的作为例题加以分解剖析,有的作为习题,还有的作为中考题浏览编进相应章节中。

在本书各部分内容的最后部分都插进了相应的历届各省市乃至全国以及世界各国和国际数学奥林匹克竞赛题及其思路分解与解答。根据本书提供的解题规则与方法去解这些题,那么这些“世界级”的难题就再也不那么神奇奥秘和高不可攀了。

通过教学实践充分证明,本书对培养学生的分析能力、逻辑思维能力、证(解)题能力和归纳梳理以及探究精神,具有非常重要的作用。如果学生基本掌握了本书提供的证(解)题思路的方法,那么可以说对平面几何的学习,将会产生一个极大的飞跃。更重要的是对以后各科的学习,将会产生深远的影响。

本书既适于在校学生配合教材自学提高,以迎接中考与数学竞赛之用,又适于做教师的教学参考书。为了便于自学,书中附有习题解答或提示。无论解答或提示都着重于解题思路的探索与培养。

目 录

第一章 关于三角形的一些概念	(1)
基础知识导引和解读	(1)
例题的思路探索与规律总结	(3)
能力测试	(6)
答案与提示	(8)
第二章 三角形三条边的关系	(9)
基础知识导引和解读	(9)
例题的思路探索与规律总结	(10)
能力测试	(17)
答案与提示	(20)
奥赛题的思路探索举例与规律总结	(21)
第三章 三角形的内角和与外角和	(24)
基础知识导引和解读	(24)
例题的思路探索与规律总结	(26)
能力测试	(34)
答案与提示	(37)
奥赛题的思路探索举例与规律总结	(39)
奥赛题的浏览与练习	(41)
奥赛题的思路提示或答案	(42)

第四章 全等三角形及其判定	(43)
基础知识导引和解读	(43)
例题的思路探索与规律总结	(48)
能力测试	(78)
答案与提示	(86)
奥赛题的思路探索举例与规律总结	(89)
奥赛题的浏览与练习	(93)
奥赛题的思路提示或答案	(94)
第五章 角的平分线	(96)
基础知识导引和解读	(96)
例题的思路探索与规律总结	(98)
能力测试	(106)
答案与提示	(109)
奥赛题的思路探索举例与规律总结	(110)
奥赛题的浏览与练习	(111)
奥赛题的思路提示或答案	(112)
第六章 尺规作图	(114)
基础知识导引和解读	(114)
例题的思路探索与规律总结	(114)
能力测试	(119)
答案与提示	(119)
第七章 等腰三角形的性质	(124)
基础知识导引和解读	(124)
例题的思路探索与规律总结	(125)

能力测试	(139)
答案与提示	(143)
奥赛题的思路探索举例与规律总结	(145)
奥赛题的浏览与练习	(149)
奥赛题的思路提示或答案	(150)
第八章 等腰三角形的判定	(152)
基础知识导引和解读	(152)
例题的思路探索与规律总结	(153)
能力测试	(163)
答案与提示	(167)
奥赛题的思路探索举例与规律总结	(168)
奥赛题的浏览与练习	(170)
奥赛题的思路提示或答案	(171)
第九章 线段的垂直平分线	(174)
基础知识导引和解读	(174)
例题的思路探索与规律总结	(174)
能力测试	(180)
答案与提示	(183)
奥赛题的思路探索举例与规律总结	(185)
奥赛题的浏览与练习	(186)
奥赛题的思路提示或答案	(186)
第十章 勾股定理	(187)
基础知识导引和解读	(187)
例题的思路探索与规律总结	(188)

能力测试	(199)
答案与提示	(201)
奥赛题的思路探索举例与规律总结	(203)
第十一章 勾股定理的逆定理	(205)
基础知识导引和解读	(205)
例题的思路探索与规律总结	(206)
能力测试	(208)
答案与提示	(210)
小结与复习	(212)
一、关于内容方面	(212)
二、关于探索证(解)题思路的方法	(214)
附录	(218)
中考热点描述	(218)
近年来相关中考题集锦	(219)
答案与提示	(227)

第一章 关于三角形的一些概念

基础知识导引和解读

一、三角形的定义

由不在同一条直线上的三条线段首尾顺次相接所组成的图形叫做三角形. 组成三角形的线段叫做三角形的边, 相邻两边的公共端点叫做三角形的顶点, 相邻两边所组成的角叫做三角形的内角, 简称三角形的角, 角的一边与另一边的反向延长线所组成的角叫做三角形的外角.

注: 三角形的每一个内角都有与它相邻的两个外角, 这两个外角是对顶角, 所以相等, 在以后研究外角和时, 每对相等的外角中只取其中的一个.

二、三角形中的三条重要的线段

1. 三角形的角平分线 三角形一个角的平分线与这个角的对边相交, 这个角的顶点和交点之间的线段叫做三角形的角平分线.

每个三角形都有三条角平分线, 它们相交于一点(以后证明), 这点叫做三角形的内心. 任意三角形的三条角平分线都在三角形的内部, 所以其交点(内心)也在三角形的内部.

2. 三角形的中线 在三角形中连结一个顶点和它对边中点的线段叫做三角形的中线.

每个三角形都有三条中线, 它们相交于一点(以后证明), 这点叫做三角形的重心. 任意三角形的三条中线都在三角形的内部,

所以其交点(重心)也在三角形的内部.

3. 三角形的高 从三角形的一个顶点向它的对边画垂线,顶点和垂足之间的线段,叫做三角形的高线,简称三角形的高.

每个三角形都有三条高,它们(或其延长线)相交于一点(以后证明),这点叫做三角形的垂心. 锐角三角形的三条高都在三角形内部,其交点(垂心)也在三角形的内部;直角三角形的高,有一条在三角形内部,另两条是直角边,其交点(垂心)是直角三角形的直角顶点;钝角三角形的三条高(如图1-1所示),有一条在三角形的内部(图中的 CF),另两条在三角形的外部(图中的 AD 、 BE),其延长线的交点(垂心)在三角形的外部(图中的点 P).

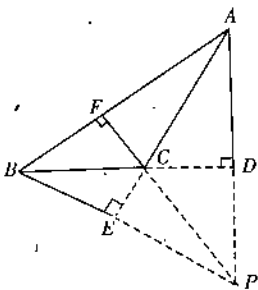


图 1-1

【规律总结】 三角形的角平分线、中线和高等都是线段,它们既不是射线,更不是直线. 特别是三角形的角平分线与一般的角平分线,学生容易产生混淆,它们的区别在于前者是一条线段,而后者是一条射线.

在同一个三角形中,大边上的角平分线、中线和高分别短于小边上的角平分线、中线和高分. 请你动手画一个比较一下好吗?

练习:试动手画出锐角三角形、直角三角形和钝角三角形的三条角平分线、三条中线和三条高,看它们是否分别相交于一点,如果没有相交于一点,找一找误差的原因是什么?

三、三角形的稳定性

一个三角形的三条边的长度若确定了,则它的形状便固定了. 而四边形的四条边的长度若确定了,则它的形状是不固定的,因而说三角形具有稳定性,四边形不具有稳定性.

三角形的稳定性在日常生活和生产中都有重要的应用.

四、三角形的面积

在小学时我们学过三角形的面积等于底和这个底上的高的积的一半,写成公式为: $S_{\triangle} = \frac{1}{2}ah$.

例题的思路探索与规律总结

【例1-1】如图1-2, $\triangle ABC$, 在 BC 边上顺次取 D 、 E 、 F 三点, 再连结 AD 、 AE 、 AF , 则图中共有多少个不同的三角形.

【思路探索】我们可把 BC 边上的每一条不同的线段看做是一个三角形的底边, 点 A 是这个底边所对应的三角形的顶点, 所以 BC 边上有多少条不同的线段, 与点 A 便可构成多少个不同的三角形.

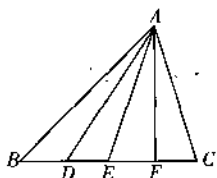


图 1-2

解: BC 边上不同的线段有 BD 、 BE 、 BF 、 BC (B 牵头的 4 个)、 DE 、 DF 、 DC (D 牵头的 3 个)、 EF 、 EC (E 牵头的 2 个)、 FC (F 牵头的 1 个). (以上的数法是: 按字母顺序从左至右不回头, 每抓住一个不完不放松).

所以不同的线段共有 $4 + 3 + 2 + 1 = 10$ 条, 因而便有 10 个不同的三角形. 请你把这 10 个三角形的名称写出来.

【规律总结】线段 BC 上共有 4 条基本线段 (BD 、 DE 、 EF 、 FC), 因而有 $4 + 3 + 2 + 1 = 10$ 条不同的线段. 如果某条线段上共有 n 条基本线段, 它可构成多少条不同的线段呢? 如果以这些不同的线段为底边, 如上图那样它们共同对应一个顶点, 它们可以组成多少个不同的三角形呢? 其答案是: $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ 条 (或个) 不同的线段 (或三角形).

【例1-2】下列两个图形中各有多少个三角形.

【思路探索与解】(1) 图1-3(1)中共5个点: A 、 B 、 C 、 D 、 O , 可

任取三点组成一个三角形,再去掉三点共线(在一条直线上)的即可.

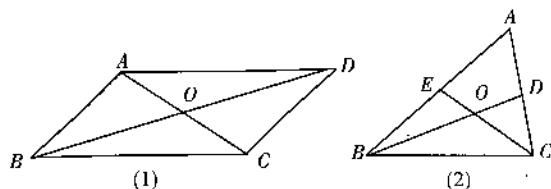


图 1-3

方法是:按字母的顺序,从左至右不回头,每抓牵头字母不不完不放松,这样才会做到既不重复又不遗漏.

$\therefore$ 有 $\triangle ABC$ 、 $\triangle ABD$ 、 $\triangle ABO$ (以上 AB 牵头)、 $\triangle ACD$ 、 $\triangle ACO$ (以上 AC 牵头)、 $\triangle ADO$ (AD 牵头)、 $\triangle BCD$ 、 $\triangle BCO$ (以上 BC 牵头)、 $\triangle BDO$ 、 $\triangle CDO$. 以上共组成 10 个,去掉 2 个三点共线的,便有 8 个三角形. 此题还有其他解法,留给读者研究.

(2) 图 1-3(2) 中的三角形的个数数法当然也可用(1)中的解法来数,但由于三点共线的字母较多,且有两点 A 、 O 不连线的,所以按(1)中方法做较麻烦,所以根据本题图形特点,可采用按三角形大小的顺序与字母的顺序结合起来数较方便.

$\therefore$ 有 $\triangle ABC$ 、 $\triangle ABD$ 、 $\triangle ACE$ 、 $\triangle BCD$ 、 $\triangle BCE$ 、 $\triangle BCO$ 、 $\triangle BEO$ 、 $\triangle CDO$, 计 8 个三角形.

【规律总结】数三角形的个数,一定要找到合适的方法,按一定的顺序有规律地去数,才会做到既不重又不漏,切勿盲目乱数.

【例 1-3】如图 1-4,在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ABD = \angle DBC$, $BF = FD$, 连结 CF 并延长与 AB 交于 E , $AG \perp CE$

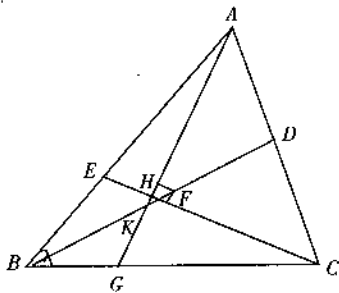


图 1-4

于 H , 与 BD 交于 K , 与 BC 交于 G , 下列判断正确的有 _____ 项.

- (1) BD 是 $\triangle BCE$ 的角平分线;
- (2) CE 是 $\triangle BCD$ 的 BD 边上的中线;
- (3) AG 是 $\triangle AEC$ 的 EC 边上的高.

解: (1) $\because \angle ABD = \angle DBC$, 根据三角形角平分线的定义知, BF 是 $\triangle BCE$ 的角平分线, 而不是 BD ;

(2) $\because BF = FD$, 根据三角形中线的定义知, CF 是 $\triangle BCD$ 的 BD 边上的中线, 而不是 CE ;

(3) $\because AG \perp CE$ 于 H , H 为垂足, 根据三角形高的定义知, AH 是 $\triangle AEC$ 的 EC 边上的高, 而不是 AG .

$\therefore$ 正确的有 0 项.

【例 1-4】如图 1-5, AD 、 AE 分别为 $\triangle ABC$ 的中线和高, 且 $AB = 7$, $AC = 5$. 则 (1) $\triangle ABD$ 与 $\triangle ADC$ 的周长之差为 _____;

(2) $S_{\triangle ABD}$ 与 $S_{\triangle ADC}$ 的大小关系为 _____ ($S_{\triangle ABD}$ 与 $S_{\triangle ADC}$ 分别表示 $\triangle ABD$ 与 $\triangle ADC$ 的面积)

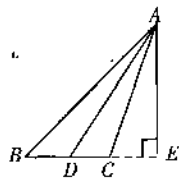


图 1-5

解: (1) $\triangle ABD$ 的周长 - $\triangle ADC$ 的周长 =

$$(AB + AD + BD) - (AD + AC + DC) = AB + BD - AC - DC$$

又 $\because BD = DC$, $\therefore$ 上式 = $AB - AC = 7 - 5 = 2$

$\therefore \triangle ABD$ 与 $\triangle ADC$ 的周长之差为 2.

$$(2) \because S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2}BD \cdot AE, S_{\triangle ADC} = \frac{1}{2}DC \cdot AE$$

$$\text{又 } \because BD = DC, \therefore \frac{1}{2}BD \cdot AE = \frac{1}{2}DC \cdot AE, \therefore S_{\triangle ABD} = S_{\triangle ADC}.$$

$\therefore S_{\triangle ABD}$ 与 $S_{\triangle ADC}$ 的大小关系是相等的.

【规律总结】通过对 (2) 的证明可总结得出: 等底同高的两个三角形面积相等, 据此也不难推出: 同底等高或等底等高的三角

形面积都相等. 请记住这些结论对今后做题会有直接或间接应用.

能力测试

一、判断题

1. 三角形的中线、高线是线段, 它的角平分线是射线; ()
2. 三角形的高线中, 至少有一条在三角形的内部; ()
3. 三角形的三条角平分线、三条中线都在三角形的内部; ()
4. 钝角三角形的三条高线只有一条在三角形的外部; ()
5. 三角形的高线是顶点到对边的距离; ()
6. 直角三角形只有一条高线. ()

二、选择题

1. 如图 1-6, 其中三角形的个数是

A. 4

B. 6

C. 7

D. 8

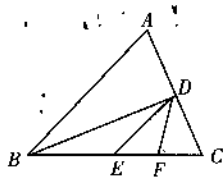


图 1-6

2. 三角形的三条高一定在

A. 三角形内部

B. 三角形的外部

C. 三角形的内部或外部

D. 三角形的内部、外部或边上

3. 如图 1-7, 已知 $\triangle ABC$, 过点 A 作直线 $MA \parallel BC$, P 为直线 MA 上异于 A 的任意一点, 则 $S_{\triangle PBC}$ 与 $S_{\triangle ABC}$ 的大小关系为

A. $S_{\triangle PBC} > S_{\triangle ABC}$

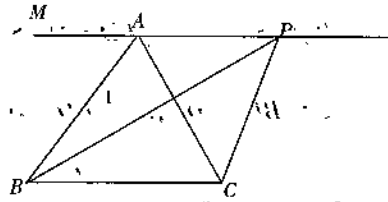


图 1-7

B. $S_{\triangle PBC} < S_{\triangle ABC}$

C. $S_{\triangle PBC} = S_{\triangle ABC}$

D. 无法确定

三、填空题

1. 如图 1-8.

(1) AD 平分 $\angle BAC$, 交 BC 于 D ,
则 AD 叫做 _____, $\angle$ _____ = $\angle$ _____
_____ = $\frac{1}{2} \angle$ _____;

(2) $AE \perp BC$, E 为垂足, 则
 $\triangle ABC$ 的高是 _____, _____ =
_____ = 90° ;

(3) F 为 AC 的中点, 则 _____ = _____, BF 是 _____.

2. (1) 锐角三角形的三条高都在 _____; (2) 直角三角形的三条高有两条在 _____; (3) 钝角三角形的三条高只有一条在 _____.

3. 如图 1-9, D, E 为 BC 边上的三等分点, 设 $S_{\triangle ABC} = a$, 则 $S_{\triangle ABD}$ = _____, $S_{\triangle ABE}$ = _____.

4. 如图 1-10, 在 $\triangle ABC$ 中, 点 D, E 分别为 BC, AD 的中点, G, F 为 BE 的三等分点, 设 $S_{\triangle ABC} = b$, 则 $S_{\triangle HCN}$ = _____, $S_{\triangle CEF}$ = _____.

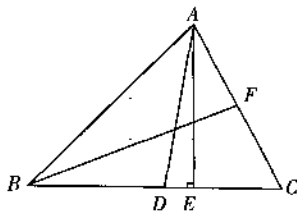


图 1-8

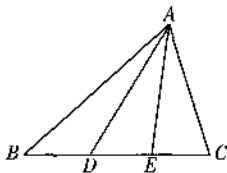


图 1-9

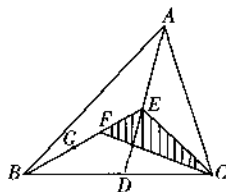


图 1-10