概率论与数理统计

GAI LV LUN YU SHU LI TONG JI

万淑香　陈元婕　编著

哈尔滨地图出版社

概率论与数理统计

GAILVLUN YU SHULI TONGJI

万淑香　陈元婕　编著

哈尔滨地图出版社

·哈尔滨·

图书在版编目（CIP）数据

概率论与数理统计/万淑香，陈元婕编著 .—哈尔滨：
哈尔滨地图出版社，2006.12

ISBN 7-80717-499-4

Ⅰ. 概… Ⅱ.①万…②陈… Ⅲ. ①概率论②数理
统计 Ⅳ.021

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2006）馆 153168 号

哈尔滨地图出版社出版、发行

（地址：哈尔滨市南岗区测绘路 2 号　邮编：150086）

鸡西汇通教育印务有限责任公司印刷

开本：787mm×1 092mm　1/16　印张：11.75　字数：270 千字

2006 年 12 月馆 1 版　2006 年 12 月第 1 次印刷

印数：1~1 000　　定价：25.00 元

前　言

《概率论与数理统计》教材是供高职高专院校机电一体化、机械与自动控制、数控、通信工程等工科类专业学生使用的一门工程数学教材，该教材是学生学习后继课程和将来从事理论、实践工作的必要基础，对培养学生各种能力有着非常重要的作用。

通过对《概率论与数理统计》教材的学习，可使学生获得该课程的基本概念、基本理论和基本数学思想方法，同时能够培养学生具有抽象概括能力，逻辑思维能力，空间想像能力；特别是能够培养学生具有运算能力和综合所学知识去分析问题和解决实际问题的能力。

1.教材内容符合“概率论与数理统计”课程的教学基本要求，保证其内容的系统性和先进性。

2.全书从工科教学的特点出发，在内容编写上突出知识的应用性和针对性，在理论上以必须够用为度，删减繁琐的理论推导和公式证明。

3.内容括接思路清晰，条理分明，难易适中，突出重点，分散难点。

4.每章配各习题。习题由浅入深，既有本章各节内容匹配的习题，又有综合性习题。

本书由鸡西大学万淑香、陈元婕编著，第1，2，6，7，8，9章由万淑香编写；第3，4，5章，附表由陈元婕编写。本书由鸡西大学的董永胜、池春姬主审，鸡西大学的金朝钧、崔永新同志对本书的编写提出了宝贵的意见，此书的出版得到了学校的领导、同事、出版社的朋友及同学们的大力支持和帮助，对此我们一并表示衷心的感谢！

由于我们的水平有限，书中难免存在一些统点和错误，敬请广大师生批评指正，并将意见及时反能给我们，所有的章见、建议请寄往：wsxfbw@163.com。

作　者

2006年12月

目　录

第 1 章　随机事件的概率计算

概率与数理统计是以研究随机现象的统计规律为对象的数学学科，它在工程技术各领域内有着广泛的应用，而随机事件的概率是研究概率与数理统计的基础内容.在这一章里我们将介绍随机事件的概念，给出随机事件概率的定义和概率的加法公式、乘法公式、全概率公式等.

1.1　随机事件及其运算

1.1.1　随机试验与样本空间

人们在自然界和社会实践中常遇到两种现象：一种是一定条件下必然发生的现象称为必然现象.例如：在地球上，一上抛的物体必落到地面上；地球围绕太阳转等.另一种是在一定条件下具有多种可能发生的结果，而这些结果事先都是不能确定的，这种现象称为随机现象(偶然现象).

例 1　一名射手对一个 10 环靶进行射击，其结果可能中 0，1，2，…，10 环；从一批产品中任意抽取一件产品，其结果可能是合格品也可能是不合格品；某厂一昼夜用电量 T 为不小于 T_0 和不大于 T_1.

它们均为随机现象.

对随机现象进行一次观察(或实验，或记录)称作随机试验，它具有三个特征：

(1) 试验在相同条件下可以重复进行.

(2) 每次试验的可能结果不止一个，但所有可能结果事先是明确的.

(3) 每次试验之前无法确定出现的最终结果.

在随机试验中把那些可能发生也可能不发生的结果称为随机事件，常用 A，B，…或 A_1，A_2，…字母来表示. 特别地，试验每一结果称为基本事件.

例 2　一名射手对一个 10 环靶进行射击，设

A_i="击中 i 环"，i=0，1，2，…，10，

B="击中环数不超过 3 环"，

C="击中环数多于 5 环".

它们都是随机事件，其中 A_1，A_2，…，A_{10} 是基本事件，都是试验的直接结果.B，C 都不是试验的直接结果，它们都可以是由若干个基本事件组合面成的，称为复合事件.

随机试验中所有可能结果(基本事件)的集合称为样本空间，记为 Ω.集合中每一个元素称为一个样本点(或基本事件).

例 3　在例 2 中随机事件 B 的样本空间可表示为：

$$=\{A_0,\ A_1,\ A_2,\ A_3\},$$

随机事件 C 的样本空间可表示为：

$\Omega=\{A_6, A_7, A_8, A_9, A_{10}\}$.

例 4 在射击训练中若不规定射击次数，直到射中为止我们用

A_i="第 i 次射中"，$i=1, 2, 3, \cdots$

则这一事件的样本空间为 $\Omega=\{A_1, A_2, A_3, \cdots\}$.

例 5 一工厂一昼夜用电量 T 为一随机事件，我们设 T 不小于 T_0 和不大于 T_1，它的样本空间为

$$\Omega=\{T|T_0 \leq T \leq T_1\}.$$

由上面的例子可以看出，样本空间按基本事件的数目可分为有限空间(样本点数为有限个)和无限空间(样本点数为无限个)，无限空间又可分为无限可列空间(样本点数为无限可列个)和无限不可列空间(样本点数为无限不可列个)两种空间.

在一事件中当所包含的一样本点发生时，我们就称该事件发生.在随机试验中，称不可能发生的事件为不可能事件，记为 ϕ.称一定发生的事件为必然事件，记为 Ω.

1.1.2 事件的相互关系及其运算

1.事件的包含与等价 设随机事件 A 与 B，若 B 发生必导致 A 发生，则称 A 包含 B(或称 B 包含于 A)，记作 $A \supset B$ (或 $B \subset A$).若同时有 $A \supset B$ 及 $B \supset A$，则称 A 与 B 等价，记为 $A=B$.

对任一事件 A，有 $\phi \subset A \subset \Omega$.

2.事件的和(或并) 设随机事件 A 与 B，由 A 与 B 至少有一个发生构成的事件称为事件 A 与 B 的和(或并)事件，记为 $A+B$(或 $A \cup B$).

类似地，设有 n 个事件，$A_1, A_2, \cdots, A_n$，称由 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中至少有一个发生所构成的事件为这 n 个事件的和事件，记为 $A_1+A_2+\cdots+A_n$(或 $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$).

3.事件的积(或交) 设随机事件 A 与 B，由 A 与 B 同时发生所构成的事件称为 A 与 B 的积(或交)事件，记为 AB(或 $A \cap B$).

类似地，设有 n 个事件，$A_1, A_2, \cdots, A_n$，称由 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 同时发生所构成的事件为这 n 个事件的积事件，记为 $A_1A_2\cdots A_n$(或 $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$).

4.互斥事件与互逆事件 设随机事件 A 与 B，若 $AB=\phi$，即 A 与 B 在一次试验中不能同时发生，则称 A，B 是互斥的(或互不相容的).若 $A+B=\Omega$，$AB=\phi$，则称 A,B 是互逆的(或对立的).A 的逆事件记为 $\overline{A}$，它与 A 不能同时发生.

5.事件的差 设随机事件 A 与 B，由 A 发生而 B 不发生所构成的事件称为差事件，记为 $A-B$.

6.完备事件组 (样本空间的划分) 若 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$，在一次试验中既不能同时发生，但又必有一个发生，即 $A_iA_j=\phi$ ，$i \neq j, i,j=1,2,\cdots,n$.

$$A_1+A_2+\cdots+A_n=\Omega$$

则称事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为完备事件组或称为样本空间的划分.

事件的包含关系与运算可借助文氏图进行直观表示.

7.和事件与积事件的关系 借助直观图我们可以验证如下关系式成立：设 A，B 为两

个随机事件，则有

(1) $\overline{A+B}=\overline{A}\,\overline{B}$；　(2) $\overline{AB}=\overline{A}+\overline{B}$；

(3) $A=AB+A\overline{B}$；　(4) $A+B=A+\overline{A}B$；

(5) $A-B=A\overline{B}$.

例 6 设事件 A，B，C 分别表示一学生的高等数学、线性代数、概率三门课程成绩及格，试用 A，B，C 表示下列事件：

(1) 该生三门课程都及格；

(2) 该生至少有一门课程及格；

(3) 该生恰有一门课程不及格；

(4) 该生至多有一门课程不及格.

解 (1) ABC；　(2) $A+B+C$；　(3) $\overline{A}BC+A\overline{B}C+AB\overline{C}$；

(4) $\overline{A}BC+A\overline{B}C+AB\overline{C}+ABC$.

例 7 设有一电路是由开关 A，B，C，D 及电源、指示灯 E 构成，如图 1.1.1 所示，同时 A，B，C，D 表示相应开关是断开的事件，字母 E 表示指示灯亮的事件，试用 A，B，C，D 表示 E 与 $\overline{E}$.

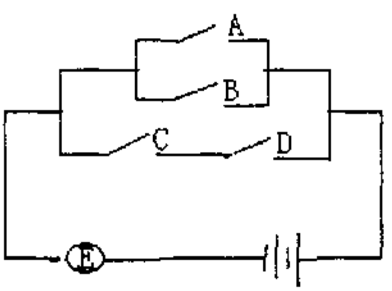

图 1.1.1

解 $E=\overline{A}+\overline{B}+\overline{CD}$　　$\overline{E}=AB(C+D)$

1.2 随机事件的概率

1.2.1 随机事件的频率与概率

在一次随机试验中有多种可能发生的结果(事件)，但究竟发生哪一种结果事先是无法知道的，但我们希望知道某些结果发生的可能性的大小，并能将其用一个数来表示，为此

我们引进事件频率的概念.

定义 1.2.1 设事件 A 在 n 次重复试验中发生 n_A 次，称比值

$$f_N(A)=\frac{n_A}{n}$$

为事件 A 在 n 次试验中发生的频率，其中 n_A 称为 A 在 n 次试验中发生的频数.

由频率的定义容易验证频率具有如下性质：

(1) $0\le f_n(A)\le 1$；

(2) $f_n(\Omega)=1$，$f_n(\phi)=0$；

(3) 当 A 与 B 互斥时，$f_n(A+B)=f_n(A)+f_n(B)$.

同学们自己验证一下性质(3).

例 1 掷一硬币，规定带有国徽的一面为正面，重复掷 n 次，设事件 A={正面朝上}，下面再考察事件 A 的频率.

表 1.2.1

试验者	n	n_A	$f_n(A)$
德莫根	2 048	1 061	0.518 1
蒲 丰	4 040	2 048	0.506 9
皮尔逊	12 000	6 019	0.501 6
皮尔逊	24 000	12 012	0.500 5

由例 1 我们可以看出，在大量的重复试验中，事件的频率具有一定的稳定性，它必然稳定在某一个数的附近，这种稳定性是随机事件本身所固有的一种属性，它从数量上描述了随机事件发生的可能性的大小.

定义 1.2.2 在一定条件下，进行大量的重复试验，称随机事件 A 的频率的稳定值 p 为随机事件 A 的概率，记为 $P(A)=p$.

由定义 1.1.2 所定义的概率称为统计概率，它有两个方面的含义：一方面它可反映出在大量的重复试验中事件发生的频繁程度；另一方面反映了在一次试验中事件发生的可能性的大小，当概率越大时事件发生得越频繁，即发生的可能性越大.

由频率的性质我们也可以得出概率的两个性质：

(1) $0\le P(A)\le 1$；

(2) $P(\Omega)=1$，$P(\phi)=0$.

例 2 为求某批产品的合格率，现对从中抽取的 1 000 件产品进行检查，结果有 932

件合格，则这批产品的合格品概率可认为是 $p=\frac{932}{1\ 000}=0.932$.

1.2.2　古典概率

用概率的统计定义去计算一个随机事件的概率，需要进行大量的重复试验得到其近似值.但在工程技术中常遇到这样的随机现象：每次试验结果(基本事件)只有有限个(称为有限性)，而每个结果(基本事件)发生的可能性是相等的(称为等可能性)，这种随机试验称为古典概型随机试验，简称为古典概型.

在古典概型中我们引进古典概率定义：

定义 1.2.3　在古典概型中，若试验的基本事件总和为 n，而有利于事件 A 的基本事件为 m 个，则比值

$$P(A)=\frac{m}{n} \tag{1.2.1}$$

称为事件 A 的概率.

易验证，在古典概型下对任一事件 A，仍有 $0\le P(A)\le 1$；$P(\Omega)=1$，$P(\phi)=0$.

对于古典概率的计算只需运用定义 1.2.3 中的(1.2.1)式，依据乘法原理或者加法原理，借助排列组合这个工具直接计算其概率.

例 3　有一箱产品共 30 件，其中合格品 26 件，不合格品 4 件，试求：

(1) 一次抽取一件，抽得不合格品的概率；

(2) 一次抽取 5 件，抽取的 5 件中恰有 2 件不合格品的概率.

解　(1)设 A={取到不合格品}，这时基本事件的总数为 $n=30$ 个，而有利于 A 的基本事件数是 $m=4$ 个，则所求的概率为

$$P(\mathrm{A})=\frac{4}{30}\approx 0.133\ 3.$$

(2)设 B={被抽取的 5 件中恰有 2 件不合格}，这时基本事件的总数为 $n=C_{30}^5$，有利于事件 B 发生的基本事件数为 $m=C_4^2C_{26}^3$，则所求概率为

$$P(B)=\frac{C_4^2C_{26}^3}{C_{30}^5}\approx 0.109\ 47.$$

例 4　一盒中装有 10 个零件，其中 7 个正品，3 个次品：

(1) 不放回地每次从中任取一个，共取 3 次，求取到 3 个次品的概率.

(2) 每次从中随机地取一个，有放回地取 3 次，求取到 3 个次品的概率.

解　(1)设 A={取到 3 个次品}

由于是不放回抽取 3 次，因此基本事件的总数为 $n=10\cdot 9\cdot 8=720$，而有利于 A 的基本事件数为 $m=3\cdot 2\cdot 1=6$，所以

$$P(A)=\frac{6}{720}=0.008\,3.$$

(2)设 B={取到 3 个次品}

由于是有放回地抽取 3 次，每次都有 10 种抽法，因此基本事件总数为 $n=10\cdot10\cdot10=10^3$，而有利于 B 的基本事件数为 $m=3\cdot3\cdot3=3^3$，所以

$$P(B)=\frac{3^3}{10^3}=0.027.$$

注意：本题(1)也解为：基本事件总数 $n=C_{10}^3$，利于 A 的基本事件数 $m=C_3^3$，所以

$$P(A)=\frac{C_3^3}{C_{10}^3}=\frac{1}{120}=0.008\ 3.$$

同学们想一想为什么？

例 5 一个袋中装有 10 个球，其中红球 7 个，白球 3 个，现在无放回抽取，一次抽取一个，求第 $k(1\le k\le10)$ 次抽到的是白球的概率.

解 设 A={第 k 次抽到白球}，把 10 个球看成是有区别的，将它们编成号码：1，2，…，10 若将抽出的 10 个球依次排成一排，则全部的可能排法为 10！种，即基本事件的总数为 10！又第 k 次抽到白球(即排列在第 k 个位置上的是白球)只能在 3 个白球中取一个，共有 3 种取法，另外 9 次抽取应有 9！种抽取法，因此有利于事件 A 的基本事件数 $m=3\cdot9!$ 所以

$$P(A)=\frac{3\cdot9!}{10!}=0.30.$$

本题又可另解为：把 3 个白球看成一样的，7 个红球看成一样的，抽出的球仍依次放在 10 个位置上，将 3 个白球放在 10 个位置中的任意 3 个位置上的总排法即基本事件总数 $n=C_{10}^3$，而第 k 次抽到白球即有利于事件 A 的基本事件数 $m=C_{10-1}^{3-1}=C_9^2$，所以

$$P(A)=\frac{C_9^2}{C_{10}^3}=\frac{3}{10}=0.3.$$

同学们可结合这个例题解释一下生活中常用的抽签方法是合理的、公平的.

1.3 概率的加法与乘法运算

1.3.1 概率的加法公式

1.互斥事件的概率加法公式 对于两个互斥事件的和事件的概率可用下面公式来计算:

定理 1.3.1 若事件 A 与 B 互斥，则

$$P(A+B)=P(A)+P(B).$$

证明 仅对古典概型给出证明.设在给定的试验下基本事件的总数为 n，而有利于事件 A，B 的基本事件数分别为 n_A，n_B，因而有利于 $A+B$ 的基本事件数为 n_A+n_B；由定义 1.2.3 有

$$P(A+B)=\frac{n_A+n_B}{n}=\frac{n_A}{n}+\frac{n_B}{n}=P(A)+P(B).$$

推论 1 当 A_1，A_2，…，A_n 两两互斥时，则有

$$P(A_1+A_2+\cdots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n) \tag{1.3.1}$$

(1.3.1)式称为概率的可加性.由上面三个性质可得出如下关系式:

推论 2 $P(A)=1-P(\overline{A})$.

推论 3 对任意事件 A，B 有 $P(A-B)=P(A)-P(AB)$.

特别地，当 $A\supset B$ 时，有 $AB=B$，故

$$P(A-B)=P(A)-P(B) .$$

此时，$P(A-B)\geq 0$，故有 $P(A)\geq P(B)$.

例 1 一箱装有 20 只电子管，其中有 17 只正品，3 只次品，现从中任取 4 只，求含有次品的概率.

解 设 A_i={4 只中含有 i 只次品} (i=1，2，3)；

设 A={含有次品}，

则 $A=A_1+A_2+A_3$，

且 A_1，A_2，A_3 互斥的，所以

$$\begin{aligned}P(A)&=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)\\&=\frac{C_3^1C_{17}^3}{C_{20}^4}+\frac{C_3^2C_{17}^2}{C_{20}^4}+\frac{C_3^3C_{17}^1}{C_{20}^4}\\&=0.421\,1+0.084\,2+0.004\\&=0.508\,8.\end{aligned}$$

本例应用 $P(A)=1-P(\overline{A})$ 可得出另一种解法，同学们想一想应怎样做.

2.任意事件的概率加法公式 对于两个任意事件的和事件的概率可用下面的公式来计

算：

定理 1.3.2 若 A，B 为两任意事件，则

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB) \tag{1.3.2}$$

证明 由于 $A+B=A\overline{B}+B$ 及 $A\overline{B}=A-B$，

且 $A\overline{B}$ 与 B 互斥，所以

$$\begin{aligned}P(A+B)&=P(A\overline{B})+P(B)\\&=P(A)-P(AB)+P(B).\end{aligned}$$

即定理得证.

(1.3.2)式称为概率的加法公式.

由式(1.3.2)不难推出 n 个事件的加法公式，同学们自己推导一下.

例 2 某车间有两台机床，一天内第一台机床停车概率为 0.132，第二台机床停车概率为 0.087，两台机床同时停车概率为 0.021，求一天内至少有一台机床停车的概率是多少?

解 设 A={第一台机床停车}，B={第二台机床停车}，由概率加法公式有

$$\begin{aligned}P(A+B)&=P(A)+P(B)-P(AB)\\&=0.132+0.087-0.021\\&=0.198.\end{aligned}$$

1.3.2 条件概率与概率的乘法公式

在实际问题中我们经常要求在“已知事件 B 发生”的条件下事件 A 发生的概率，这个概率就称为 A 的条件概率，可记为 $P(A\mid B)$，具体的可定义为：

定义 1.3.1 若对任意事件 A，B，且 $P(B)>0$，则

$$P(A\mid B)=\frac{P(AB)}{P(B)} \tag{1.3.3}$$

称为在事件 B 发生的条件下事件 A 发生的条件概率.

例 3 在一盒中装有 15 个乒乓球，其中 9 个新球，6 个旧球，第一次比赛从盒中任取 3 个球用完后放回盒中，第二次比赛时，再从盒中任取 3 个球，求第二次取出的都是新球的概率.

解 设 A_i={第一次取出的 3 个球中有 i 个新球} (i=0，1，2，3)，

B={第二次取出的 3 个球都是新球}，

则

$$P(B\mid A_0)=\frac{C_9^3}{C_{15}^3}=\frac{12}{65},\qquad P(B\mid A_1)=\frac{C_8^3}{C_{15}^3}=\frac{8}{65},$$

$$P(B\mid A_2)=\frac{C_7^3}{C_{15}^3}=\frac{25}{65},\qquad P(B\mid A_3)=\frac{C_6^3}{C_{15}^3}=\frac{4}{91}.$$

同学们想一想本例题如何用条件概率中的(1.3.3)式来求解.

由条件概率的(1.3.3)式可得概率的乘法公式：

$$P(AB)=P(A)P(B\mid A)=P(B)P(A\mid B).$$

它可推广为:对于 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，当 $P(A_1,A_2,\cdots,A_{n-1})>0$ 时，有

$$P(A_1,A_2,\cdots,A_n)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)P(A_3\mid A_1A_2)\cdots P(A_n\mid A_1,A_2,\cdots,A_{n-1}).$$

例 4　一盒内装有 8 个白球，5 个红球，无放回地抽取 3 次，每次取出一球，求第 3 次才取到红球的概率.

解　设 $A_i=\{$第 i 次取红球$\}$（$i=1,2,3.$），则

$$P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3)=P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2\mid\overline{A}_1)P(A_3\mid\overline{A}_1\overline{A}_2)=\frac{8}{13}\times\frac{7}{12}\times\frac{5}{11}=0.163\ 2.$$

独立事件乘积的概率在概率计算中占有重要的地位.

例 5　一盒内装有 15 只电子元件，其中有 3 只次品，其余为合格品，现从中任取 2 只，每次取出一只，并且采取放回抽取法，求在第一次取得次品的条件下第二次也取得次品的概率及第二次取得次品的概率.

解　设 A=$\{$第一次取得次品$\}$，　B=$\{$第二次取得次品$\}$，

则有　$P(B\mid A)=\dfrac{3}{15}$，　$P(B)=\dfrac{3}{15}$.

在例 5 中有 $P(B\mid A)=P(B)$，这说明事件 B 发生的概率不受事件 A 的影响，我们说事件 A 与事件 B 是独立的，具体地可定义为：

定义 1.3.2　对于事件 A 与 B，若 $P(B)>0$ 时，有

$$P(B\mid A)=P(B)$$

成立，则称事件 A 对事件 B 独立.

对于两个独立事件 A，B，有

$$P(AB)=P(B\mid A)P(A)=P(A)P(B),$$

即　$$P(AB)=P(A)P(B).$$

这是我们今后常用的两个独立事件乘法计算公式.