21 世纪高等院校创新教材

高等数学学习与提高

熊德之 喻五一 杨建华 主编

科学出版社
www.sciencep.com

·21 世纪高等院校创新教材·

高等数学学习与提高

熊德之　喻五一　杨建华　主编

科学出版社

北　京

内 容 简 介

本书是为学习高等数学的读者和有志“考研”的朋友编写的. 内容包括：函数与极限、导数与微分、中值定理与导数的应用、不定积分、定积分及其应用、空间解析几何、多元函数微分法及其应用、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数、常微分方程和附录. 各章分基本要求、内容提要、疑难解析、例题精讲、综合练习等，其中例题精讲和综合练习两部分中又分 A，B 两类. 附录部分给出了第一学期期末试题和第二学期期末试题各 4 套，考研模拟测试题 3 套，以及近几年全国硕士研究生入学统一考试高等数学部分的试题.

本书可作为本科生学习高等数学的辅导教材和考研人员的复习参考书，也可供教师教学时参考.

图书在版编目（CIP）数据

高等数学学习与提高/熊德之，喻五一，杨建华主编.—北京：科学出版社，2007

（21 世纪高等院校创新教材）

ISBN 978-7-03-018872-4

I. 高… II. ①熊…②喻…③杨… III. 高等数学 - 高等学校 - 教材 IV. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 055259 号

责任编辑：王雨舸 / 责任校对：王望容

责任印制：高 嵘 / 封面设计：方葵 GONGZUOSHI

科 学 出 版 社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

武汉大学出版社印刷总厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2007 年 5 月第 一 版 开本：B5（720×1000）

2007 年 5 月第一次印刷 印张：27 3/4

印数：1—8 000 字数：546 000

定价：37.50 元

（如有印装质量问题，我社负责调换）

前　言

高等数学是高等学校中理工类各专业的一门重要基础课. 它不仅是众多后续课程的基础,而且在现代科学技术和经济建设中的应用越来越广泛. 在当代大学生的知识能力结构中,数学知识与能力已经成为不可少的部分. 但是,学习高等数学并熟练地运用它分析和解决问题不是一件容易的事. 它既需要读者有求知的渴望和坚韧的毅力,又需要读者有一套行之有效的学习方法,一本实用性强、参考价值大的高等数学辅导参考书也是必不可少的.

本书是为学习高等数学的读者和有志"考研"的朋友编写的. 它是根据教育部制定的《工科类本科数学基础课程基本要求》,并参照全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲编写而成. 内容包括:函数与极限,导数与微分,中值定理与导数的应用,不定积分,定积分及其应用,空间解析几何,多元函数微分法及其应用,重积分,曲线积分与曲面积分,无穷级数,常微分方程等十一章和附录部分. 各章分基本要求,内容提要,疑难解析,例题精讲,综合练习等五部分. "基本要求"简述大纲对教学的要求. "内容提要"系统归纳了各章的主要概念、公式与定理. "疑难解析"分析难点疑点,剖析常见错误. "例题精讲"是本书的主要部分,我们精选出了具有启发性、典型性和针对性的题目,通过对这些题目的分析和解答,为读者运用所学知识去独立解答数学问题搭上一座桥梁. "综合练习"是配套习题,读者通过练习,达到巩固所学知识,掌握解题方法的目的. 每章后附有综合练习的答案与提示. 其中例题精讲和综合练习两部分中又分为 A,B 两类,A 类为教学大纲所要求达到的内容,B 类是为加深提高,为考研作准备的内容. 附录部分是高等数学试题选编,并给出了解答. 其中有第一学期期末试题和第二学期期末试题各 4 套,考研模拟测试题 3 套,以及近几年全国硕士研究生入学统一考试高等数学部分的试题.

本书由熊德之、喻五一、杨建华主编,熊德之负责拟定编写大纲. 参与编写的人员:第一章和附录由熊德之编写,第二章和第三章由喻五一编写,第四章和第五章由宁小青编写,第六章和第七章由曾华编写,第八章和第九章由杨建华编写,第十章和第十一章由熊晓龙编写. 全书由熊德之、喻五一、杨建华统稿.

由于编者水平所限,加上时间紧迫,书中不足之处在所难免,恳请广大读者批评、指正.

编　者

2007 年元月

目　　录

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

第一章　函数与极限

一、基 本 要 求

1. 理解函数和复合函数的概念，了解反函数的概念，了解函数的性质（奇偶性、单调性、周期性和有界性）.

2. 会建立简单实际问题中的函数关系式.

3. 理解极限的概念，了解极限的 ε-N，ε-δ 定义.

4. 掌握极限的有理运算法则，会用变量代换求某些简单复合函数的极限.

5. 了解极限的性质（唯一性、有界性、保号性）和两个存在准则（夹逼准则与单调有界准则），会用两个重要极限求极限.

6. 了解无穷小、无穷大、高阶无穷小和等价无穷小的概念，会用等价无穷小求极限.

7. 理解函数在一点连续和在一区间上连续的概念.

8. 了解函数间断点的概念，会判别间断点的类型.

9. 了解初等函数的连续性和闭区间上连续函数的介值定理与最大值、最小值定理.

二、内 容 提 要

（一）函数概念

函数的定义，函数的运算，求函数的定义域，求函数表达式.

（二）函数特性

有界性、单调性、奇偶性和周期性.

（三）极限定义

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N > 0$，当 $n > N$ 时，$|x_n - a| < \varepsilon$.

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$，当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，$|f(x) - A| < \varepsilon$.

一般，$\lim f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists$ 时刻，从该时刻以后，恒有 $|f(x) - A| < \varepsilon$.

（四）极限的性质

唯一性、有界性、保号性.

（五）极限的运算法则

(1) 设 $\lim f(x) = A, \lim g(x) = B$，则

$$\begin{cases}\lim(f(x)\pm g(x)) = A\pm B\\ \lim f(x)g(x) = AB\\ \lim f(x)/g(x) = A/B \quad (B\neq 0)\end{cases}$$

(2) $\lim f(x) = 0, g(x)$ 有界 $\Rightarrow \lim f(x)g(x) = 0$;

(3) 设$\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x) = a$ 且 $u = \varphi(x)\neq a\ (x\in \mathring{U}(x_0))$, 又$\lim\limits_{u\to a}f(u) = A$,则

$$\lim_{x\to x_0}f[\varphi(x)] = \lim_{u\to a}f(u) = A$$

(六) 无穷小与无穷大

(1) 无穷小与极限的关系:

$$\lim_{x\to x_0}f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A+\alpha(x) \quad (\lim_{x\to x_0}\alpha(x) = 0)$$

(2) 无穷小与无穷大的关系:在同一过程中,无穷大的倒数为无穷小,恒不为零的无穷小的倒数为无穷大;

(3) 无穷小的比较;

(4) 无穷小替换定理;

(5) 常用等价无穷小:$x\to 0$ 时,

$\sin x\sim x$, $\tan x\sim x$, $\arcsin x\sim x$, $\arctan x\sim x$,

$1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$, $\ln(1+x)\sim x$, $e^x-1\sim x$, $a^x-1\sim x\ln a$,

$(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x\ (\alpha\neq 0)$

(七) 两个准则和两个重要极限

准则 I 夹逼定理

准则 II 单调有界数列必有极限

两个重要极限:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

(八) 函数连续的概念

1. 等价定义.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y = 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0}f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0$$

$\exists\delta > 0$,当 $|x-x_0| < \delta$ 时,恒有 $|f(x)-f(x_0)| < \varepsilon$.

2. 左连续: $f(x_0-0) = f(x_0)$

右连续: $f(x_0+0) = f(x_0)$

(九) 间断点的类型

第一类间断点:x_0 为 $f(x)$ 的间断点,且 $f(x_0\pm 0)$ 都存在;

第二类间断点:不是第一类间断点的任何间断点.

（十）连续函数的运算

（1）四则运算；

（2）复合运算；

（3）初等函数在其定义区间内是连续的.

（十一）闭区间上连续函数的性质

有界性定理、最大值最小值定理、零点定理、介值定理.

三、疑难解析

1. 单调函数必存在反函数，不单调的函数是否一定没有反函数？

答 不是的. 函数 f 是否存在反函数，取决于 f 是否为 D 到 $f(D)$ 的一一映射. 如果是，则存在反函数，否则就不存在反函数. 函数 f 在 D 上单调只是 f 为一一映射的一个充分而非必要条件. 例如，函数

$$f(x)=\begin{cases}-x, & -1\leqslant x\leqslant 0\\ x+1, & 0<x\leqslant 1\end{cases}$$

在区间$[-1,1]$不单调（图 1-1(a)），但它存在反函数（图 1-1(b)）

$$f^{-1}(x)=\begin{cases}-x, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ x-1, & 1<x\leqslant 2\end{cases}$$

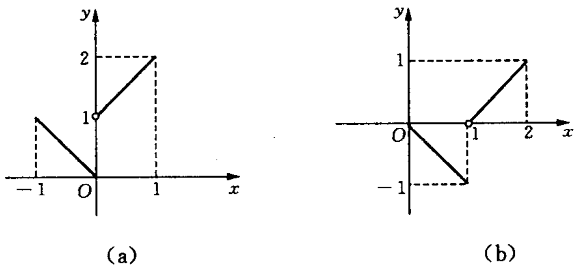

图 1-1

2. 如何理解类似 $f(x+2)$，$f(\sin x)$ 这样的函数记号？

答 $f(x+2)$，$f(\sin x)$ 都是表示复合函数的记号. 如果令 $u=x+2$，则 $f(x+2)$ 表示由 $f(u)$ 和 $u=x+2$ 复合而成的函数. 例如，若设 $f(x+2)=x^2-2x+4$，则

$$x^2-2x+4=(x+2)^2-6(x+2)+12=u^2-6u+12$$

即 $f(u)=u^2-6u+12$. 这就是说，$f(x+2)=x^2-2x+4$ 是由 $f(u)=u^2-6u+12$ 和 $u=x+2$ 复合而成的函数. 此时 $f(\sin x)=\sin^2x-6\sin x+12$.

3. 为什么在极限的定义中，ε 要任意给定？

答 以 $x\to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 的极限是 A 为例来说明. 因为 ε 是刻画函数 $f(x)$ 与常数 A 接近程度的量，只有 ε 的任意性（不论它多么小）才能表明 $f(x)$ 与 A 的无

限接近. 又"给定"是指在通过 ε 找 δ 的过程中, ε 是不变的常数, 因为只有 ε 暂时不变, 才能通过分析 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 找到正数 δ, 使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时, 恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 成立.

4. 在极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 的定义中, δ 与 ε 是什么关系?

答 因为 x 与 x_0 无限接近时, $f(x)$ 才能与 A 无限接近, 即只有 x 与 x_0 接近到一定程度, 才能保证 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 成立. δ 正是表达 x 与 x_0 接近程度的量. 一般来说, 当 ε 变化时, δ 也变化, 但 δ 不是由 ε 而唯一确定的. 因为 $\forall\varepsilon>0$, 找到了一个 $\delta>0$, 使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时, 恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$, 则对于所有小于 δ 的正数 δ_1, 当 $0<|x-x_0|<\delta_1$ 时, 仍然有 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 成立, 因此 δ 不是唯一的, 也不必要找到一个最大的 δ. 所以在利用定义证明极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 时, 常常将 $|f(x)-A|$ 适当放大, 以便于通过 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 较容易找到 δ, 这也是用定义证明极限时常用的技巧.

5. 如何掌握不同极限过程中极限的定义?

答 所谓极限过程, 指的是自变量的变化趋势. 一般有 7 种情形:

$$n\to\infty,\quad x\to x_0,\quad x\to x_0^-,\quad x\to x_0^+,\quad x\to\infty,\quad x\to-\infty,\quad x\to+\infty$$

虽然当自变量的变化过程不同的时候, 极限定义的表述略有差别, 但它们的本质是相同的. $\lim f(x)=A$, 即 $\forall\varepsilon>0$, 总存在一个时刻, 使得该时刻后, 恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 成立. 例如, $\forall\varepsilon>0$, 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$, 存在的时刻是指存在正整数 N, 当 $n>N$ 时, 恒有 $|x_n-A|<\varepsilon$; 极限 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$, 存在的时刻是指存在正数 X, 当 $|x|>X$ 时, 恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$; 极限 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$, 存在的时刻是指存在正数 δ, 当 $0<x-x_0<\delta$ 时, 恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$. 掌握了极限定义的实质, 在表述各种极限过程中的极限定义就不难了.

6. 求函数的极限时, 在什么情况下要讨论左右极限?

答 (1) 若 x_0 是分段函数的分段点, 且 x_0 的左右两侧函数的表达式不一样, 则求分段点 x_0 的极限时一定要先考察左、右极限是否存在, 再确定 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 是否存在. 但是, 并不是所有分段函数在分段点的极限都要求左、右极限. 当在分段点 x_0 的左右两侧函数表达式相同, 且 $x\to x_0$ 时, x_0 的左右两侧 $f(x)$ 的变化趋势也一样, 则不必求左、右极限, 可直接求 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$. 例如,

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\tan x}{x}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$$

(2) 一般来说, 求 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 时, 应先考察单侧极限的情况. 如果当 $x\to x_0$ 时, $f(x)$ 在 x_0 两侧变化趋势一致, 则不必分开讨论; 如果发现两侧变化趋势可能有差

此为试读, 需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

别，则应分别研究左、右极限. 例如，求$\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}}$，由于$\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$，$\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$，所以需要考察左、右极限. 这时$\lim\limits_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0$，$\lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty$，所以极限不存在. 类似的例子还有$\lim\limits_{x\to 0} \arctan \frac{1}{x}$，$\lim\limits_{x\to \infty} \mathrm{arccot} x$ 等.

7. 无穷大量与无界量有什么联系和区别?

答 若$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$，则根据无穷大的定义，$\forall M > 0$(不论$M$多么大)，$\exists \delta > 0$，当$0 < |x - x_0| < \delta$时，恒有$|f(x)| > M$. 这表明对于$x_0$的去心邻域里的一切点$x$，都必有$|f(x)| > M$.

若$f(x)$在x_0的去心邻域内无界，则对于无论多么大的正数M，都存在点x属于该邻域，使得$|f(x)| > M$. 这表明$\exists x_1 \in \mathring{U}(x_0, \delta)$，使得$|f(x_1)| > M$，但不是$\forall x \in \mathring{U}(x_0, \delta)$，使得$|f(x)| > M$.

对比上述定义可知，在自变量的同一变化过程中，无穷大量一定是无界量，但无界量未必是无穷大量. 例如，$x \to 0$时，$\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$是无界量，但不是无穷大量.

8. 利用等价无穷小代换求极限时，应该注意什么问题?

答 根据等价无穷小代换定理，用等价无穷小代换求极限时，是将分子和分母的整体分别代换成与它们各自等价的无穷小. 若将分子(或分母)中的和(或差)中的某项用与之等价的无穷小作代换，则不能保证代换后的新分子(或分母)与原来的分子(或分母)是等价无穷小. 例如，求极限$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$，若将$\tan x$，$\sin x$分别换成$x$，则分子为0，从而极限为0，显然0与$\tan x - \sin x$不等价，所以这个极限结果是错误的. 事实上，

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} \cdot \frac{1 - \cos x}{x^2/2} \cdot \frac{1}{2} = 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

这说明当$x \to 0$时，$\tan x - \sin x$与$\frac{1}{2}x^3$是等价的.

特别指出的是，若分子(或分母)为若干因子的乘积，则可对其中的一个或多个无穷小因子作等价无穷小代换，这时可保证所得的新的分子(或分母)的整体为原分子(或分母)的整体的等价无穷小. 还可以证明，求形如$\lim\limits_{u(x)\to 0}(1 + u(x))^{f(x)}$的极限时，$u(x)$可用其等价无穷小$v(x)$代换，变为求$\lim\limits_{v(x)\to 0}(1 + v(x))^{f(x)}$的结果.

9. 关于初等函数的连续性，结论为:“初等函数在其定义区间内都是连续的”，为什么不表述成“初等函数在其定义域内都是连续的”?

答 我们知道基本初等函数在其定义域内是连续的，但初等函数在其定义域的某些点上却不一定能定义连续性. 例如，初等函数$f(x) = \sqrt{\cos x - 1}$，它的定义

域 $D=\{x \mid x=2k\pi, k\in \mathbf{Z}\}$，$f(x)$ 在 D 中任一点的去心邻域都无定义，按连续的定义，就不能讨论 $f(x)$ 在这些点处的连续性，因此不能说 $f(x)$ 在这些点处连续.

但由连续函数的运算法则（四则运算法则和复合运算法则）可知，初等函数在其定义区间内是连续的. 以连续函数的复合运算法则为例，如果初等函数 $f[g(x)]$ 的定义域 $D_{f\cdot g}$ 内的某点 x_0 的某个邻域包含在 $D_{f\cdot g}$ 内：$U(x_0)\subset D_{f\cdot g}$（即 x_0 属于 $f[g(x)]$ 的某一定义区间），则 $f[g(x)]$ 在点 x_0 必定连续. 即初等函数 $f[g(x)]$ 在其定义区间内是连续的.

10. 函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续时，则它具有几个重要性质. 如果 $f(x)$ 是在开区间 (a,b) 连续，或是在无穷区间 $[a,+\infty)$ 连续，这些性质还能成立吗？

答 一般来说不一定成立. 例如，函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 连续，但它在该区间上无最大值和最小值，也无界，且不一致连续. 又如，函数 $f(x)=x$ 在 $[a,+\infty)$ 连续，但它在该区间上无最大值，也无界.

对于无穷区间，有时通过适当加强条件，可以使某些性质成立. 例如，设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在，则 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上有界. 又如，$f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 连续，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在且与 $f(a)$ 异号，则 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 内必存在零点.

四、例题精讲

A 类

例 1.1 判定 $f(x)=\sqrt{\log_2^2 x-2\log_2 x\log_{\frac{1}{2}}x+\log_{\frac{1}{2}}{}^2 x}$ 与 $g(x)=\log_2 x-\log_{\frac{1}{2}}x$ 是否相同.

解 $f(x)=\sqrt{(\log_2 x-\log_{\frac{1}{2}}x)^2}=\begin{cases}\log_{\frac{1}{2}}x-\log_2 x, & 0<x\leqslant 1\\ \log_2 x-\log_{\frac{1}{2}}x, & x>1\end{cases}$

由于两函数的定义域都是 $(0,+\infty)$，但对应法则不同，故 $f(x)$ 与 $g(x)$ 不相同.

例 1.2 求下列函数的反函数.

(1) $y=1+\ln(x+2)$ (2) $y=\dfrac{2^x-1}{2^x+1}$ (3) $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$

解 (1) $x+2=\mathrm{e}^{y-1}$，所以 $x=\mathrm{e}^{y-1}-2$，反函数为 $y=\mathrm{e}^{x-1}-2$.

(2) $2^x=\dfrac{1+y}{1-y}$，$x=\log_2\dfrac{1+y}{1-y}$，反函数为 $y=\log_2\dfrac{1+x}{1-x}$.

(3) $x+\sqrt{1+x^2}=\mathrm{e}^y$，$\mathrm{e}^{-y}=\dfrac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}=-x+\sqrt{1+x^2}$

所以，$x=\dfrac{(\mathrm{e}^y-\mathrm{e}^{-y})}{2}$，反函数为 $y=\dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}=\mathrm{sh}x$.

例 1.3 设 $f(x)$ 满足 $af(x)+bf\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{c}{x}$（$a,b,c$ 均为常数），且 $|a|\neq|b|$，证明：$f(x)$ 为奇函数.

证 由条件知 $$af(-x)+bf\left(\frac{-1}{x}\right)=\frac{-c}{x}$$

$$af\left(\frac{1}{x}\right)+bf(x)=cx,\quad af\left(-\frac{1}{x}\right)+bf(-x)=-cx$$

于是，

$$a[f(x)+f(-x)]+b\left[f\left(\frac{1}{x}\right)+f\left(-\frac{1}{x}\right)\right]=0$$

$$a\left[f\left(\frac{1}{x}\right)+f\left(-\frac{1}{x}\right)\right]+b[f(x)+f(-x)]=0$$

故 $$\frac{b}{a}[f(x)+f(-x)]=\frac{a}{b}[f(x)+f(-x)]$$

由于 $|a|\neq|b|$，得 $f(x)+f(-x)=0$. 故 $f(x)$ 为奇函数.

例 1.4 证明：定义在对称区间 $(-l,l)$ 上的任何函数 $f(x)$ 都可表示为一个奇函数与一个偶函数之和，并且表示法是唯一的.

证 令

$$F_1(x)=\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)],\quad F_2(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]$$

因为 $F_1(-x)=-F_1(x)$，$F_2(-x)=F_2(x)$，所以 $F_1(x)$ 为奇函数，$F_2(x)$ 为偶函数，且 $f(x)=F_1(x)+F_2(x)$.

下证表示法是唯一的.

设 $G_1(x)$ 是奇函数，$G_2(x)$ 是偶函数，且 $f(x)=G_1(x)+G_2(x)$. 因此有

$$f(-x)=G_1(-x)+G_2(-x)=-G_1(x)+G_2(x)$$

由以上两式即得

$$G_1(x)=\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]=F_1(x),\quad G_2(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]=F_2(x)$$

所以表示法唯一.

例 1.5 狄利克雷(Dirichlet)函数 $D(x)=\begin{cases}1, & x\in Q,\\ 0, & x\in Q^C.\end{cases}$ 证明：$D(x)$ 是周期函数，但没有最小正周期.

证 因为“有理数＋有理数”仍为有理数，“有理数＋无理数”仍为无理数，设 r 为有理数，则 $D(x+r)=D(x)$，故任一有理数 r 均为 $D(x)$ 的周期. 由于不存在最小的正的有理数，故 $D(x)$ 没有最小正周期.

另外，“无理数＋有理数”为无理数，“无理数＋无理数”可能为有理数也可能为无理数，故无理数不是 $D(x)$ 的周期.

例 1.6 求函数 $f(x)$ 的表达式.

(1) 设 $f(x)=ax^2+bx+2$,且 $f(x+1)-f(x)=2x-1$;

(2) 设 $y=\frac{1}{2x}f(t-x)$,且 $y\Big|_{x=1}=\frac{t^2}{2}-t+5$.

解 (1) 由 $f(x+1)-f(x)=2x-1$,得

$$a(x+1)^2+b(x+1)+2-(ax^2+bx+2)=2x-1$$

即
$$2ax+a+b=2x-1$$

比较方程两边系数,得 $a=1,b=-2$,所以

$$f(x)=x^2-2x+2$$

(2) 由题设知$\frac{t^2}{2}-t+5=\frac{1}{2}f(t-1)$,即

$$f(t-1)=t^2-2t+10=(t-1)^2+9$$

所以
$$f(x)=x^2+9$$

例 1.7 求复合函数 $f[\varphi(x)]$ 的表达式.

(1) 设 $f(x)=\begin{cases}e^x, & x>1,\\ 2x & x\leqslant 1,\end{cases}\varphi(x)=\begin{cases}\sin x, & x>0,\\ x^2, & x\leqslant 0;\end{cases}$

(2) 设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1,\end{cases}\varphi(x)=\begin{cases}2-x^2, & |x|\leqslant 1,\\ 2, & |x|>1.\end{cases}$

解 (1)
$$f[\varphi(x)]=\begin{cases}e^{\varphi(x)}, & \varphi(x)>1\\ 2\varphi(x), & \varphi(x)\leqslant 1\end{cases}$$

由于当 $x<-1$ 时,$\varphi(x)>1$;当 $x\geqslant -1$ 时,$\varphi(x)\leqslant 1$. 所以

$$f[\varphi(x)]=\begin{cases}e^{x^2}, & x<-1\\ 2x^2, & -1\leqslant x\leqslant 0\\ 2\sin x, & x>0\end{cases}$$

(2)
$$f[\varphi(x)]=\begin{cases}1, & |\varphi(x)|\leqslant 1\\ 0, & |\varphi(x)|>1\end{cases}$$

仅当 $|x|=1$ 时,$\varphi(x)=1$;当 $|x|\neq 1$ 时,$\varphi(x)>1$. 所以

$$f[\varphi(x)]=\begin{cases}1, & |x|=1\\ 0, & |x|\neq 1\end{cases}$$

例 1.8 试求常数 a,b,使极限$\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-ax+b}{x^2-4}=-\frac{1}{4}$.

解 因为分母$\lim\limits_{x\to 2}(x^2-4)=0$,而分式极限存在,故必有$\lim\limits_{x\to 2}(x^2-ax+b)=0$,即 $4-2a+b=0$,得 $b=2a-4$. 于是

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-ax+b}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-ax+2a-4}{x^2-4}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4-a(x-2)}{(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to 2}\frac{x+2-a}{x+2}=\frac{4-a}{4}$$

由题设有$\frac{4-a}{4}=\frac{1}{4}$，得 $a=5$，且得 $b=6$.

例 1.9 求$\lim\limits_{n\to\infty}(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})$，其中 $|x|<1$.

分析 求此极限的难点在于当 $n\to\infty$ 时，乘积因子也为无穷多个. 考虑用公式将式子作适当变形，目的是使 $n\to\infty$ 时，乘积因子变为有限个.

解 因为

$$
\begin{aligned}
&(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})\\
&=\frac{1-x^2}{1-x}\cdot\frac{1-x^4}{1-x^2}\cdot\frac{1-x^8}{1-x^4}\cdot\cdots\cdot\frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x^{2^n}}=\frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x}
\end{aligned}
$$

故

$$
\text{原式}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x}=\frac{1}{1-x}
$$

例 1.10 求$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{5}{8}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}\right)$.

分析 求此极限的难点在于 $n\to\infty$ 时，和式的项数也有无穷多个，同样将原表达式作适当变形，目的是使 $n\to\infty$ 时，和式成为有限项.

解 由于$\frac{2n-1}{2^n}=\frac{2n+1}{2^{n-1}}-\frac{2n+3}{2^n}$，故

$$
\begin{aligned}
\text{原式}&=\lim_{n\to\infty}\left[\left(3-\frac{5}{2}\right)+\left(\frac{5}{2}-\frac{7}{4}\right)+\left(\frac{7}{4}-\frac{9}{16}\right)+\cdots+\left(\frac{2n+1}{2^{n-1}}-\frac{2n+3}{2^n}\right)\right]\\
&=\lim_{n\to\infty}\left(3-\frac{2n+3}{2^n}\right)=3
\end{aligned}
$$

例 1.11 计算$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)}{(n+1)+2(n+2)+\cdots+n(n+n)}$.

解

$$
\begin{aligned}
\text{原式}&=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)}{n(1+2+\cdots+n)+(1^2+2^2+\cdots+n^2)}\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3\cdot\dfrac{1-(1/2)^{n+1}}{1-1/2}}{n\cdot\dfrac{n(n+1)}{2}+\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}}\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{2\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]}{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)}\\
&=\frac{12}{5}
\end{aligned}
$$

例 1.12 利用极限存在准则证明：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n}{n!}=0$ (2) $\lim\limits_{x\to0^+}x\left[\dfrac{1}{x}\right]=1$

证 (1) 因为

$$0<\frac{2^n}{n!}=\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\cdots\cdot\frac{2}{n}\leqslant\frac{4}{n}$$

且$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4}{n}=0$,故由夹逼准则,有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{n!}=0$$

(2) 由于 $x-1\leqslant[x]\leqslant x$,知$\dfrac{1}{x}-1\leqslant\left[\dfrac{1}{x}\right]\leqslant\dfrac{1}{x}$. 当 $x>0$ 时,有

$$x\left(\frac{1}{x}-1\right)\leqslant x\left[\frac{1}{x}\right]\leqslant x\cdot\frac{1}{x}=1$$

因为$\lim\limits_{x\to0^+}x\left(\dfrac{1}{x}-1\right)=\lim\limits_{x\to0^+}(1-x)=1$,故由夹逼准则,得

$$\lim_{x\to0^+}x\left[\frac{1}{x}\right]=1$$

例 1.13 利用极限存在准则证明下列数列极限存在,并求其极限.

(1) $\sqrt{2},\sqrt{2+\sqrt{2}},\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}},\cdots$

(2) $\sqrt{2},\sqrt{2\sqrt{2}},\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}},\cdots$

解 (1) 设 $x_1=\sqrt{2},x_2=\sqrt{2+\sqrt{2}},\cdots$,则 $x_n=\sqrt{2+x_{n-1}}$. 显然$\{x_n\}$单调增.

因为 $x_1=\sqrt{2}<2$,设 $x_k<2$,则 $x_{k+1}=\sqrt{2+x_k}<\sqrt{2+2}<2$. 所以,由归纳法可知 $x_n<2$,即$\{x_n\}$有上界 2. 根据单调有界准则知,$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在.

设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,则由 $x_n=\sqrt{2+x_{n-1}}$ 得 $a=\sqrt{2+a}$,从而得 $a=-1$(舍去),$a=2$. 故

$$\lim_{n\to\infty}x_n=2$$

(2) 设 $x_1=\sqrt{2}=2^{\frac{1}{2}}$,则

$$x_2=\sqrt{2\sqrt{2}}=2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}},\cdots,x_n=\sqrt{2x_{n-1}}=2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}}$$

显然,数列$\{x_n\}$单调增.

由于$\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}=1-\dfrac{1}{2^n}$,则 $x_n=2^{1-\frac{1}{2^n}}<2$,即$\{x_n\}$有上界 2. 由单调有界准则知,$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在.

设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,则由 $x_n=\sqrt{2x_{n-1}}$ 得 $a=\sqrt{2a}$,从而得 $a=0$ 或 $a=2$,由于 $x_n>1$,故

$$\lim_{n\to\infty}x_n=2$$

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com