研究生教学用书

专 业 课 系 列

基础拓扑学

Basic Topology

胡适耕 编著

BOOKS FOR GRADUATE STUDENTS

华中科技大学出版社

研究生教学用书
专 业 课 系 列

基础拓扑学

胡适耕 编著

华中科技大学出版社
中国·武汉

图书在版编目(CIP)数据

基础拓扑学/胡适耕　编著.—武汉:华中科技大学出版社,2007年8月
ISBN 978-7-5609-4114-1

Ⅰ.基…　Ⅱ.胡…　Ⅲ.拓扑　Ⅳ.O189

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第115704号

基础拓扑学　胡适耕　编著

责任编辑:谢燕群　封面设计:刘　卉
责任校对:朱　霞　责任监印:张正林

出版发行:华中科技大学出版社(中国・武汉)
武昌喻家山　邮编:430074　电话:(027)87557437

印　刷:华中科技大学印刷厂

开本:787mm×960mm　1/16　印张:15.25　字数:260 000
版次:2007年8月第1版　印次:2007年8月第1次印刷　定价:22.80元
ISBN 978-7-5609-4114-1/O・415

写在“研究生教学用书”出版15周年前岁

“接天莲叶无穷碧，映日荷花别样红.”今天，我国的教育正处在一个大发展的崭新时期，而高等教育即将跨人“大众化”的阶段，蓬蓬勃勃，生机无限.在高等教育中，研究生教育的发展尤为迅速.在盛夏已临，面对池塘中亭亭玉立的荷花，风来舞举的莲叶，我深深感到，我国研究生教育就似夏季映日的红莲，别样多姿.

党的十六大报告以空前的力度强调了“科教兴国”的发展战略，强调了教育的重大作用，强调了教育的基础性、全局性、先导性，强调了在社会主义建设中教育的优先发展的战略地位.从报告中，我们可以清楚看到，对高等教育而言，不仅赋予了重大的历史任务，而且更明确提出了要培养一大批拔尖创新人才.不言而喻，培养一大批拔尖创新人才的历史任务主要落在研究生教育肩上.“百年大计，教育为本；国家兴亡，人才为基.”国家之间的激烈竞争，在今天，归根结底，最关键的就是高级专门人才，特别是拔尖创新人才的竞争.由此观之，研究生教育的任务可谓重矣！重如泰山！

前事不忘，后事之师.历史经验已一而再、再而三地证明：一个国家的富强，一个民族的繁荣，最根本的是要依靠自己，要以“自力更生”为主.《国际歌》讲得十分深刻，世界上从来就没有什么救世主，只有依靠自己救自己.寄希望于别人，期美好于外力，只能是一种幼稚的幻想.内因是发展的决定性的因素.当然，我们决不应该也决不可能采取“闭关锁国”，自我封闭，固步自封的方式来谋求发展，重犯历史错误.外因始终是发展的必要条件.正因为如此，我们清醒看到了，“自助者人助”，只有“自信、自尊、自主、自强”，只有独立自主，自强不息，走以“自力更生”为主的发展道路，才有可能在向世界开放中，争取到更多的朋友，争取到更多的支持，充分利用好外部的各种有利条件，来扎扎实实地而又尽可能快地发展自己.这一切的关键就在于，我们要有数量与质量足够的高级专门人才，特别是拔尖创新人才.何况，在科技高速发展与高度发达，而知识经济已初见端倪的今天，更加如此.人才，

高级专门人才，拔尖创新人才，是我们一切事业发展的基础.基础不牢，地动山摇；基础坚牢，大厦凌霄；基础不固，木凋树枯；基础深固，硕茂葱绿！

“工欲善其事，必先利其器.”自古凡事皆然，教育也不例外.教学用书是“传道授业解惑”培育人才的基本条件之一.“巧妇难为无米之炊”.特别是在今天，学科的交叉及其发展越来越多及越快，人才的知识基础及其要求越来越广及越高，因此，我一贯赞成与支持出版“研究生教学用书”，供研究生自己主动地选用.早在1990年，本套用书中的第一本即《机械工程测试·信息·信号分析》出版时，我就为此书写了个“代序”，其中提出：一个研究生应该博览群书，博采百家，思路开阔，有所创见.但这不等于他在一切方面均能如此，有所不为才能有所为.如果一个研究生的主要兴趣与工作不在某一特定方面，他也可选择一本有关这一特定方面的书作为了解与学习这方面知识的参考；如果一个研究生的主要兴趣与工作在这一特定方面，他更应选择一本有关的书作为主要的学习用书，寻觅主要学习线索，并缘此展开，博览群书.这就是我赞成要为研究生编写系列的“研究生教学用书”的原因.今天，我仍然如此来看.

还应提及一点，在教育界有人讲，要教学生“做中学”，这有道理；但须补充一句，“学中做”.既要在实践中学习，又要在学习中实践，学习与实践紧密结合，方为全面；重要的是，结合的关键在于引导学生思考，学生积极主动思考.当然，学生的层次不同，结合的方式与程度就应不同，思考的深度也应不同.对研究生特别是对博士研究生，就必须是而且也应该是“研中学，学中研”，在研究这一实践中，开动脑筋，努力学习，在学习这一过程中，开动脑筋，努力研究；甚至可以讲，研与学通过思考就是一回事情了.正因为如此，“研究生教学用书”就大有英雄用武之地，供学习之用，供研究之用，供思考之用.

在此，还应进一步讲明一点.作为一个研究生，来读“研究生教学用书”中的某书或其他有关的书，有的书要精读，有的书可泛读.记住了书上的知识，明白了书上的知识，当然重要；如果能照着用，当然更重要.因为知识是基础.有知识不一定有力量，没有知识就一定没有力量，千万千万不要轻视知识.对研究生特别是博士研究生而言，最为重要的还不是知识本身这个形而下，而是以知识作为基础，努力通过某

种实践，同时深入独立思考而体悟到的形而上，即《老子》所讲的不可道的“常道”，即思维能力的提高，即精神境界的升华.《周易·系辞》讲了:“形而上谓之道，形而下谓之器.”我们的研究生要有器，要有具体的知识，要读书，这是基础；但更要有“道”，更要一般，要体悟出的形而上.《庄子·天道》讲得多么好:“书不过语.语之所贵者意也，意有所随.意之所随者，不可以言传也.”这个“意”，就是孔子所讲的“一以贯之”的“一”，就是“道”，就是形而上.它比语、比书，重要多了.要能体悟出形而上，一定要有足够数量的知识作为必不可缺的基础，一定要在读书去获得知识时，整体地读，重点地读，反复地读；整体地想，重点地想，反复地想.如同韩愈在《进学解》中所讲的那样，能“提其要”，“钩其玄”，以达到南宋张孝祥所讲的“悠然心会，妙处难与君说”的体悟，化知识为己之素质，为“活水源头”.这样，就可驾驭知识，发展知识，创新知识，而不是为知识所驾驭，为知识所奴役，成为计算机的存储装置.

这套“研究生教学用书”从第一本于1990年问世以来，到明年，就经历了不平凡的15个春秋.从研究生教育开始以来，我校历届领导都十分关心研究生教育，高度重视研究生教学用书建设，亲自抓研究生教学用书建设；饮水思源，实难忘怀！“逝者如斯夫，不舍昼夜.”截至今天，“研究生教学用书”的出版已成了规模，蓬勃发展.目前已出版了用书69种，有的书发行了数万册，有22种分别获得了国家级、省部级教材奖、图书奖，有数种已为教育部列入向全国推荐的研究生教材，有20种一印再印，久销不衰.采用此书的一些兄弟院校教师纷纷来信，称赞此书为研究生培养与学科建设做出了贡献.我们深深感激这些鼓励，“衷心藏之，何日忘之?!”没有读者与专家的关爱，就没有我们“研究生教学用书”的发展.

唐代大文豪李白讲得十分正确:“人非尧舜，谁能尽善?”我始终认为，金无足赤，物无足纯，人无完人，文无完文，书无完书.“完”全了，就没有发展了，也就“完”蛋了.江泽民同志在党的十六大报告中讲得多么深刻:“实践没有止境，创新也没有止境.”他又指出，坚持“三个代表”重要思想的关键是与时俱进.这套“研究生教学用书”更不会例外.这套书如何?某本书如何?这样的或那样的错误、不妥、疏忽或不足，必然会有.但是，我们又必须积极、及时、认真而不断地加以改进，与时俱进，奋发前进.我们衷心希望与真挚感谢读者与专家不吝指教，及时批

评．当局者迷，兼听则明；"嘤其鸣矣，求其友声．"这就是我们肺腑之言．当然，在这里，还应该深深感谢"研究生教学用书"的作者、审阅者、组织者(华中科技大学研究生院的有关领导和工作人员)与出版者(华中科技大学出版社的编辑、校对及其全体同志)；深深感谢对"研究生教学用书"的一切关心者与支持者，没有他们，就决不会有今天的"研究生教学用书"．

我们真挚祝愿，在我们举国上下，万众一心，在"三个代表"重要思想的指引下，努力全面建设小康社会，加速推进社会主义现代化，为实现中华民族伟大复兴，"芙蓉国里尽朝晖"这一壮丽事业中，让我们共同努力，为培养数以千万计高级专门人才、特别是一大批拔尖创新人才，完成历史赋予研究生教育的重大任务而做出应有的贡献．

谨为之序．

中国科学院院士

华中科技大学学术委员会主任

杨叔子

2003年7月于喻园

前　言

本书作者的两本书:《实变函数》与《泛函分析》,分别于1999年与2001年在高等教育出版社出版.使用这两本书作为教材的同行所传递的颇为乐观的信息,使作者明确意识到,像实变函数与泛函分析这样主要提供理论训练的课程,仍然受到大学生(至少是部分大学生)的欢迎.在高兴之余,不免思量:是将已酝酿多年的一部拓扑学教材贡献给读者的时候了,这样就将终于完成预定中的"三部曲".我始终相信,正是"实变函数"、"泛函分析"与"拓扑学"这三门互有联系的课程,以最典范的方式为大学生提供数学思维与数学方法的训练.想成为数学家的大学生,很难抗拒这些优美课程的诱惑.

早在20世纪80年代初,在拓扑学界老前辈方嘉琳教授的建议与指点下学习拓扑学之时,本人就与拓扑学结下了某种缘份.可惜这种缘份不深,终究没有在该领域扎下根来,至今引以为憾.我的研究兴趣与思维模式更偏向于分析方面,始终没有形成拓扑学所需要的那种几何风格.诚如大多数拓扑学著作所强调的,拓扑学毕竟是一个几何分支!我意识到,很难抑制自己从分析背景出发去讲述拓扑学;而对于想成为拓扑学家的读者而言,这未免过于偏狭与片面.但对于仅打算从拓扑学中吸取若干有价值的思想并熟悉某些常用结果的读者(他们显然占绝大多数),循分析的途径走向拓扑学也许是更可取的.在现今大学数学课程体系中,分析方面的课程毕竟占有最大的份量.由此说来,对于本书所用方法的选择,似乎能聊以自宽.

今日之拓扑学已如此庞大,一个初级课程无疑只能涉及其中一些很基本的内容.即使对基本内容及其表述形式的选择,亦极具多样性,根本无法与其他作者完全求同.这就有必要对本书可能不同于它书之处稍作说明.首先,如前所述,本书是为那些只希望对拓扑学的主要思想与基本结果有所了解的人写的,因此它不涉及任何只有拓扑学家才感兴趣的专门课题.其次,本人一向认为,无论学习拓扑学或任何其他数学学科,真正重要的事情是领悟支配该学科的思想脉络.要把握一门学科的思想脉络,研读大量具体材料固然是一条可靠的途径,但即使通过对较少但很典型的材料的恰当分析,同样可以达到目的.鉴于此,本书并不追求材料的完备与论证的详尽,但处处强调隐藏在抽象概念与命题后面的那些具有实质意义的思想,这些思想多半植根于很初等的事实中,因而往往极其自然而且简单.本书也特别强调那些在处理抽象结构时普遍运用的概念框架与理论模式,它们对于所有理论数学学科都有借鉴意义,因而应成为数学理论思维训练

中最重要的一项内容.

将对于思想性的强调置于细节处理及技巧训练之上，是作者在拙著《实变函数》与《泛函分析》中所追求的，至今并无悔意，因而自然为本书所沿袭. 如果作为一种风格能为读者所接受，我将备感欣慰. 当然，任何作法有其利时必有其弊. 本书在不惜笔墨阐述概念背景及支配结论的思想时，不免会挤去一些逻辑证明的篇幅，致使对一些证明所用的技巧未作充分的解释. 对此可以说，某些过于生僻的技巧本来就不必太予重视；而对于一些常用方法，则只有通过适当练习来掌握. 本书有意配备了较多的习题(共 300 道)，建议读者务必完成其中一部分. 书末有关于习题的详细提示，这主要是为采用本书作为教材的教师提供参考. 读者在解题时倘能尽量不用书末的提示，必能收到更好的效果. 如果你的解法与书末提示并不一致而又无可挑剔，你应当感到高兴. 实际上，大部分习题是容易的，学得较好的学生无需任何提示.

从作者的经验看来，本书对于高年级大学生与硕士生都是有益的. 至于对阅读内容的选择，则应依各人的具体需要而定. 若将本书用作教材，则对内容有几种组合方式可供考虑. 第1 章通常可由学生自己阅读. 若选择第2 章与第3 章(适当删去少数内容)及4. 1 节，则需50 学时左右；若加上第4 章余下的内容，则需60 学时；讲完全部内容，约需 72 学时. 对于个别内容的增删及次序的调整，使用本书的教师是最权威的.

作　者

2005 年7 月于武汉

记号与约定

A^c：集 A 的补.

A°：集 A 的内部.

$\overline{A}$：集 A 的闭包.

A'：集 A 的导集.

$|A|$：集 A 的基数.

$\mathscr{A}' = \{A^c : A \in \mathscr{A}\}$.

$\mathscr{A}^\# = \bigcup \{A : A \in \mathscr{A}\}$.

$\mathscr{A}^*$：集族 $\mathscr{A}$ 中集的有限交之全体.

$B_r(x)$：以 x 为心以 r 为半径的开球.

$\overline{B}_r(x)$：以 x 为心以 r 为半径的闭球.

$\mathbf{C}$：复数集.

$C(X,Y)$：从 X 到 Y 的连续映射之全体；$C(X) = C(X,\mathbf{R})$.

$C_0(X)$：X 上有紧支集的连续实函数之全体.

$\mathrm{c} = |\mathbf{R}|$：连续统基数.

χ_A：集 A 的特征函数.

$D(F)$：映射 F 的定义域.

$d(A,B)$：集 A 与 B 之间的距离；$d(x,B) = d(\{x\},B)$.

$\mathrm{diam}\, A$：集 A 的直径.

Δ 或 Δ_X：集 $X \times X$ 的对角线.

∂A：集 A 的边界；∂：边界算子.

$\mathrm{Gr}F$：映射 F 的图像.

$H_p(X)$：X 的 p 阶同调群.

$H^p(X)$：X 的 p 阶上同调群.

I 或 1_X：X 上的单位映射.

$\mathrm{Im}F$：映射 F 的像.

$i : A \subset X$：A 到 X 的包含映射.

J：通常记$[0,1]$或任一区间.

LCH＝局部紧 Hausdorff 空间.

$\mathbf{N}$：自然数集.

$\mathscr{N}_x$：点 x 的邻域系；$\mathscr{N}_A$：集 A 的邻域系.

P, P_i：通常记投影.

$\pi_1(X)$：空间 X 的基本群.

$\mathbf{Q}$：有理数集；$\mathbf{Q}^n$：$\mathbf{R}^n$ 中的有理点集.

$\mathbf{R}$：实数集；$\mathbf{R}_+ = [0, \infty)$.

$R(F)$：映射 F 的值域.

S^n：n 维球面.

supp f：函数 f 的支集.

τ：通常记拓扑；τ_X：X 上的某个拓扑.

X, Y, Z：通常记拓扑空间(或度量空间、一致空间).

X_∞：空间 X 的一点紧化.

$\mathbf{Z}$：整数集；$\mathbf{Z}_+$：非负整数集.

$\omega = |\mathbf{N}|$：无限可数基数.

2^X：集 X 的子集之全体.

$\triangleq$：定义为.

$\equiv$：恒等于.

$\cong$：同胚或同构；$\simeq$：同伦等价.

$\subset\subset$：强包含.

$\square$：证完.

几 点 说 明

1. 引证 1.1A 表示第1章第1节中A段；1.1(1)表示第1章第1节中式(1)；定理1.1.1(i)表示定理1.1.1之(i)款；[1;p.1]表示参考文献[1]中第1页. 余类推. 对于原文中的"1.1.1 定义"，引用时写作"定义 1.1.1"；定理、命题等仿此.

2. 指标用法 不致误解时，出现于记号 $\sum$，$\prod$，$\bigcup$，$\bigcap$ 下的指标予以省略. 未加说明时，指标 n 为自然数. 和式 $\sum_{i=1}^{n} a_i$ 依情况可写成：

$$\sum_{i=1}^{n} a_i, \quad \sum\nolimits_1^n a_i, \quad \sum_i a_i, \quad \sum\nolimits_i a_i \text{ 或} \sum a_i.$$

$\prod X_i$，$\bigcup A_i$ 等仿此. $\bigcup_1^n A_i$ 总可看作 $\bigcup_1^\infty A_i$（只需令 $A_i = \varnothing, i > n$）；$\bigcap A_i$ 仿此. 给定 $x \in \prod X_i$ 与 $F: D \to \prod X_i$，自动认定 $x = (x_i)$，$F = (F_i)$，其中 $x_i \in X_i$，$F_i: D \to X_i$. 特别，写出 $x \in \mathbf{R}^n$，总意味着 $x = (x_i) = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$.

3. 映射 $F: X \to Y$ 表示从 X 到 Y 的映射；$\varphi(\cdot, y)$ 表示映射 $x \to \varphi(x, y)$，其中·代替自变量 x. (F_i) 表示 $F_i (i \in I)$ 的对角线映射，$\prod F_i$ 表示 F_i 的积映射.

4. 极限 $\lim\limits_n x_n$ 记 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$，$\lim\limits_t x_t$ 记网 $\{x_t\}$ 的极限，$\lim\limits_{t,s} x_{ts}$ 记二重网 $\{x_{ts}\}$ 的极限. $\rightrightarrows$ 记一致收敛.

5. 不等式 $A \leqslant B \Leftrightarrow \forall\, a \in A, \forall\, b \in B: a \leqslant b$；$A < B$，$A \leqslant b$ 等仿此. $f(A) \leqslant f(B) \Leftrightarrow \forall\, a \in A, \forall\, b \in B: f(a) \leqslant f(b)$；$f(A) < f(B)$，$f(A) \leqslant \beta$ 等仿此. $f(A) = \beta \Leftrightarrow \forall\, a \in A: f(a) = \beta$.

6. 常数 当记号 const 出现在式子中时，它表示某个常数，其具体数值难以确定或不必明确写出.

7. 术语 有限稠集指其元素有限的稠集；可数稠集、有限覆盖、可数覆盖、可数拓扑基、无限拓扑基等仿此. 开覆盖指由开集作成的覆盖；闭覆盖、紧覆盖、开邻域、闭邻域、紧邻域、闭邻域基、紧邻域基、连通邻域基等仿此.

8. 其他约定 $a \vee b = \max\{a, b\}$，$a \wedge b = \min\{a, b\}$. 若 $\mathscr{A}, \mathscr{B} \subset 2^X$，则 $\mathscr{A} \vdash \mathscr{B} \Leftrightarrow \forall\, B \in \mathscr{B}, \exists\, A \in \mathscr{A}: A \subset B$；$\mathscr{A} \prec \mathscr{B} \Leftrightarrow \forall\, A \in \mathscr{A}, \exists\, B \in \mathscr{B}: A \subset B$；$\mathscr{A} = \varnothing \Rightarrow \mathscr{A}^{\#} = \varnothing$，$\bigcap \mathscr{A} = X$.

9. 习题 所有证明题均只陈述要证结论，而省去"求证"之类的词；对习题中出现的记号 X, Y, τ 等一般不作解释，其意义顺题意作自然理解.

目　　录

第1章 绪　　论

顾名思义，绪论是为主体内容作准备的，这就决定了本章的取材. 不过，还需作点进一步的说明. 从逻辑上看，拓扑学属于现代数学中最基本的部分，它所用到的预备知识似乎不多. 但还是需要某些必不可少的基本知识. 首先，拓扑结构就其本性而言是某种公理系统，因而不可避免地要直接运用集论的概念、语言与方法. 这个序章之设，首先就在于概述有关集论的基本知识. 我们将仅限于介绍本书所必需的那部分内容，而不触及较深入的集论问题，如序数理论等. 其次，本章要就构建抽象数学结构的一般方法作一简要说明. 拓扑空间无疑是一种典型的抽象数学结构，在进入它之前，对于其构建思路预先有一初步印象是有益的. 而且，这些知识似乎也应成为你的一般数学素养的一部分. 序结构与代数系统并非本书的对象，但为处理拓扑问题所必需，自然应作最低限度的介绍.

本章涉及的概念与术语很多，而实质性的结论则偏少，大概不会很有吸引力. 急于进入正题的读者，未必有耐心细读它. 况且，本章中大概有不少内容是你所熟知的. 如果是这样，你完全可以跳过本章而直接进入其后各章的学习，直至你感到必需查询某个概念或记号时，再回过头来参阅本章的有关部分.

1.1 集与映射

在现代数学中，集与映射概念已通行到这样的程度，有关的知识是学习几乎所有数学课程的必备常识；对于直接建立在集论基础上的拓扑学，则尤其如此. 本节的内容是标准的，其表述方式则考虑到本书的特殊需要.

A. 集及其运算

集（或称集合）的直观意义似乎极其浅显，但未必有很多人知道，集是难以严格定义的基本数学概念之一. 本书只能满足于一个朴素的描述：具有一定性质的对象之全体构成集，其中的对象就称为该集的**元**（或元素）. 通常以大写字母 A, B, X, Y 等表示集，以小写字母 a, b, x, y 等表示集的元. 若 a 是集 A 的元，则说 a 属于 A，记作 $a \in A$，而以 $a \overline{\in} A$ 表示 a 不属于 A. 不含任何元的集称为空集，记

作$\varnothing$. 仅含一个元 a 的集称为单元素集或**单点集**[①],记作 $\{a\}$. 注意,$\{a\} \neq a$! 约定以专用字母表示一些最常用的集,如字母 $\mathbf{N}, \mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{C}$ 分别记自然数集、整数集、有理数集、实数集与复数集. 表示较简单的集可用枚举法,例如,自然数集就是 $\mathbf{N} = \{1, 2, \cdots, n, \cdots\}$. 更一般的方法是,将一个集 A 表为:

$$A = \{x : x \in X \text{ 且 } x \text{ 满足 } P\}$$

或

$$A = \{x \in X : x \text{ 满足 } P\}, \tag{1}$$

这意味着 A 由 X 中满足 P 的元组成,其中 X 是给定的集,P 是某个命题或条件. 例如,实区间 $A = [a, b]$ 可表为:

$$A = \{x : x \in \mathbf{R} \text{ 且 } a \leqslant x \leqslant b\}$$

或

$$A = \{x \in \mathbf{R} : a \leqslant x \leqslant b\}.$$

值得注意的是,在表达式(1)中集 A 与命题 P 完全相互确定. 由此可见,集论问题(如 $x \in A$)与逻辑问题(如 x 满足 P)可以互相转化. 无论在理论上与实际处理方法上,这都是意义重大的基本事实.

若集 A 的元都是集 B 的元,则说 A 含于 B 或 B 包含 A,记作 $A \subset B$ 或 $B \supset A$,且称 A 为 B 的**子集**;用 $A \not\subset B$ 表示 A 不含于 B. 约定空集是任何集的子集. 若 $A \subset B$ 且 $B \subset A$,则说集 A 与 B **相等**,写作 $A = B$. 若 $A \subset B \neq A$,则称 A 为 B 的**真子集**,或说 B 真包含 A. A 的子集之全体记作 2^A,称它为 A 的**幂集**. 注意 $A, \varnothing \in 2^A$,因此 $2^{\varnothing} \neq \varnothing$! 若 A 含 n 个元,则易见 A 恰有 2^n 个子集,这一事实启示出 2^A 这一记号.

同时运用多个集时不免要用到集族概念. 本书在两种意义上使用**集族**一词,其一是指某个幂集 2^X 的子集,这种意义的集族将在1.1D 中详细讨论;其二是指带指标的一组集,如 $\{A_i : i \in I\}$ [②],其中 I 是一非空集,称为**指标集**,对每个 $i \in I$,A_i 是给定的集,不必互异. 当 I 自明或不必明确提到时,就将 $\{A_i : i \in I\}$ 简写作 $\{A_i\}$. 今后指标集无论写出与否,都假定其非空. 以上两种集族在概念上并不相同,但在实际运用时并不严格区别,通常不致引起混乱. 形如 $\{A_n : n \in \mathbf{N}\}$ 的集族称为**集列**,通常简写作 $\{A_n\}$. 若 $A_n \subset A_{n+1}$ (或 $A_n \supset A_{n+1}$),$n = 1, 2, \cdots$,则称 $\{A_n\}$ 为**升列**(或**降列**).

在某一问题的讨论中,通常用某个"最大"的集 X 包含所涉及的其他集,此

---

① 一集的元也称为点,将这一名称用于拓扑空间或其他抽象空间中的元,有某种激发直观想象的作用. 但从逻辑上说,"点"并不具有任何更进一步的含义.

② 给定一族元素 $\{x_i : i \in I\}$,$x_i \in X$,实质上意味着给定一映射 $I \to X, i \to x_i$,这在概念上当然与给定集 $A = \{x_i\}$ 有别. 不过,在不致混淆时,通常并不强调如上的族 $\{x_i\}$ 与集的区别,且同样使用 $\{x_i\} \subset X$ 这一类集记号.

时称 X 为**全集**. 全集概念是相对的，它随论题改变而变化；但注意到上下文，何为全集通常总是清楚的，因而无需处处点明. 下面假定所涉及的集都含于某个全集 X. 若 $A \subset X$，则称

$$A^c \triangleq \{x \in X : x \overline{\in} A\}$$

为 A 在 X 中的**补集**，当 X 自明时就简称 A^c 为 A 的补集. 补集在集论中的作用，恰如否命题在逻辑中的作用.

用给定的集构成新集的主要方法是集运算. 基本的集运算定义于下.

1.1.1 定义 给定一族集 $\{A_i : i \in I\}$，令

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \{x : x \in A_i(\exists\, i \in I)\},$$
$$\bigcap_{i\in I} A_i = \{x : x \in A_i(\forall\, i \in I)\},$$

二者分别称为集 $A_i(i \in I)$ 的**并**与**交**.

并、交及前面定义的补，合称为关于集的 **Boole 运算**.

为书写简便，常将 1.1.1 中定义的并简写作 $\bigcup_i A_i$ 或 $\bigcup A_i$；若 $I = \mathbf{N}$，则 $\bigcup A_i$ 也写作 $\bigcup_1^\infty A_i$ 或 $\bigcup_{i=1}^\infty A_i$；若 $I = \{1,2,\cdots,n\}$，则记

$$\bigcup A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n.$$

交的记号仿此. 这样，并 $A \cup B$ 与交 $A \cap B$ 的定义已自然包含于定义 1.1.1. 若 $A \cap B = \varnothing$，则说集 A 与 B 互不相交. 若集族 $\{A_i\}$ 中任意两个集 A_i 与 $A_j(i \neq j)$ 互不相交，则称 $\bigcup A_i$ 为**不交并**.

利用交、并与补，可定义两种新运算（当然实质上并不是新的）：

$$A \backslash B = A \cap B^c; \quad A \Delta B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A). \tag{2}$$

$A \backslash B$ 称为 A 减去 B 的**差集**；$A \Delta B$ 称为 A 与 B 的**对称差**.

在集论及其应用（如拓扑学）中，常要大量运用集运算. 掌握集运算的规则是重要的. 设 $A, B, A_i \subset X(i \in I)$，关于集运算的主要公式汇集于下：

$$(\bigcup A_i)^c = \bigcap A_i^c, \quad (\bigcap A_i)^c = \bigcup A_i^c; \quad \textbf{（对偶律）} \tag{3}$$

$$\begin{cases} A \cap (\bigcup A_i) = \bigcup (A \cap A_i), \\ A \cup (\bigcap A_i) = \bigcap (A \cup A_i); \end{cases} \quad \textbf{（分配律）} \tag{4}$$

$$A \cap B = A \Leftrightarrow A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B; \tag{5}$$

$$A^{cc} = A, \quad A \cup A^c = X, \quad A \cap A^c = \varnothing. \tag{6}$$

对偶律的意义在于：通过取补，可实现并与交的互相转化. 你将看到，这一事实在拓扑学中意义甚大.

集 A 的**特征函数** χ_A 定义为

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A; \\ 0, & x \in A^c. \end{cases} \tag{7}$$

这个函数简单得似乎无足轻重，但实际上价值甚大，其理由在于：集 A 与其特征

函数 χ_A 相互唯一确定. 原则上,关于集的等式或包含式总可转化为关于特征函数的适当关系式. 例如,

$$A=\varnothing \Leftrightarrow \chi_A \equiv 0, \quad A=X \Leftrightarrow \chi_A \equiv 1;$$

$$A \subset B \Leftrightarrow \chi_A \leqslant \chi_B, \quad A=B \Leftrightarrow \chi_A=\chi_B;$$

$$A=\bigcup A_i \Leftrightarrow \chi_A=\max_i \chi_{A_i};$$

$$\chi_{A^c}=1-\chi_A, \quad \chi_{A\Delta B}=|\chi_A-\chi_B|.$$

以上考虑的集运算有一共同点:参与运算的集及运算的结果,都是同一全集 X 的子集. 下面定义的"积运算"却与此不同.

1.1.2 定义　给定集 $X_1,X_2,\cdots,X_n(n\geqslant 1)$, 一切有序元素组

$$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n) \quad (x_i\in X_i,1\leqslant i\leqslant n)$$

构成一集 X, 称它为 $X_i(1\leqslant i\leqslant n)$ 的**积集**或**直积**,记作

$$X=\prod_{i=1}^{n} X_i \text{ 或 } X=X_1\times X_2\times\cdots\times X_n,$$

即

$$\prod_{i=1}^{n} X_i=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n): x_i\in X_i(1\leqslant i\leqslant n)\}. \tag{8}$$

若 $X_i=Y(1\leqslant i\leqslant n)$, 则将 $\prod X_i$ 写作 Y^n, 称它为 Y 的 **n 重积**.

关于积集的简单且熟悉的例子是:

$[a,b]\times[c,d]=\{(x,y)\in \mathbf{R}^2: a\leqslant x\leqslant b,c\leqslant y\leqslant d\}$; (矩形)

$\mathbf{R}^n=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n): x_i\in\mathbf{R}(1\leqslant i\leqslant n)\}$; ($n$ 维 Euclid 空间)

$\mathbf{Q}^n=\{(r_1,r_2,\cdots,r_n): r_i\in\mathbf{Q}(1\leqslant i\leqslant n)\}$. ($n$ 维有理点集)

类比于以上例子,一般地,将积集 $X\times Y$ 想象为以 X 与 Y 为边的矩形,而将 $\prod_1^n X_i$ 想象为以 $X_i(1\leqslant i\leqslant n)$ 为边的 n 维方体. 若某个 $X_i=\varnothing$, 则自然有 $\prod X_i=\varnothing$.

积集概念亦可与定义 1.1.1 意义下的集运算结合起来考虑,并建立某些运算规则. 例如,容易验证如下分配律:

$$A\times\bigcup_{i=1}^{n} B_i=\bigcup_{i=1}^{n}(A\times B_i).$$

不过,无需去系统展开这类公式,在确有需要时,不难验证并有效运用它们.

至于任意个集的积集,我们推迟至 2.3B 中考虑.

B. 映射

在多门课程中已接触到函数概念,想必已充分体会到,函数概念的本质是自变量 x 的每个值唯一地对应一个函数值 $y=f(x)$, 至于 x,y 是数,还是其他对象(如向量、矩阵、直线等),则不是本质的. 这就不难理解,函数概念应被赋予很