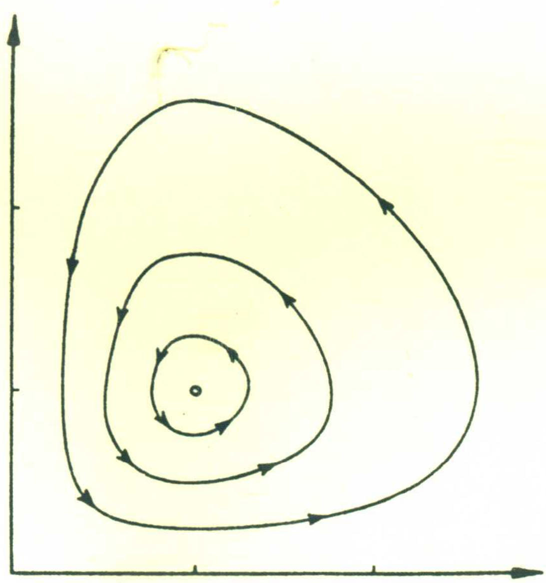
普通高等教育"十一五"国家级规划教材

高等医药院校教材

微积分初步与生物医学应用（第三版）

主编 贺东奇



北京大学医学出版社

普通高等教育“十一五”国家级规划教材
高等医药院校教材

微积分初步与生物医学应用

（第三版）

主　编　贺东奇
副主编　刘　红

北京大学医学出版社

图书在版编目（CIP）数据

微积分初步与生物医学应用/贺东奇主编．—3 版．—北京：北京大学医学出版社，2007.2
ISBN 978-7-81071-993-3

Ⅰ．微…　Ⅱ．贺…　Ⅲ．微积分—应用—生物医学工程—医学院校—教材　Ⅳ．R311

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 001663 号

微积分初步与生物医学应用（第三版）

主　　编：贺东奇
出版发行：北京大学医学出版社（电话：010-82802230）
地　　址：（100083）北京市海淀区学院路 38 号　北京大学医学部院内
网　　址：http：//www.pumpress.com.cn
E - mail：booksale@bjmu.edu.cn
印　　刷：北京地泰德印刷有限责任公司
经　　销：新华书店
责任编辑：暴海燕　　**责任校对**：杜悦　　**责任印制**：郭桂兰
开　　本：787mm×1092mm　1/16　　**印张**：17.5　　**字数**：445 千字
版　　次：2007 年 2 月第 3 版　2007 年 2 月第 1 次印刷　　**印数**：1-5000 册
书　　号：ISBN 978-7-81071-993-3
定　　价：25.00 元
版权所有　不得翻印　违者必究
（凡属质量问题请与本社发行部联系退换）

编写者（按姓氏笔画排序）

刘　红	首都医科大学
华　琳	首都医科大学
李冬果	首都医科大学
陈靖华	北京大学医学部
贺东奇	北京大学医学部
高东红	北京大学医学部

目　　录

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

绪 论

马克思说:“一门科学只有在成功地运用数学时,才算达到了真正完善的地步”。此说千真万确,生命科学岂能例外? 翻开早期的生物医学著作,几乎看不到数学的踪迹,正如恩格斯所称,数学的应用“在生物学中还是空白”。然而,近几十年的变化实乃始料不及,现代的生物医学专著和杂志中数学术语、数学公式和数学思想比比皆是。生物医学和数学这两个历史悠久的庞大领域开始融合,并取得了许多惊人的成果;生物医学已经走上数学化进程,而生物数学、生物统计学和生物信息学既是这一进程的产物,又是强劲的推动力。

科学数学化的必然性

经典数学以客观世界的空间形式和数量关系为研究对象,是介于哲学和自然科学之间的特殊学科。数学以高度抽象反映现实世界的结构、关系和运动规律,以严密的思维逻辑和简洁的符号语言揭示已然存在的客观本质和预见可能的未来运动,是人类认识世界和改造世界的必备工具。它既便于使直观经验升华为理论,又便于深入非直观领域探索未知。任何学科总是起始于直观经验的积累;一旦出现理论升华的冲动,必不满足语言的描述而求助于数和形的表达,追究对结构和运动的抽象认识;学科的高度发展必然超越直观所及的范围转而凭借理论思维纵横驰骋。数学化是经验性学科脱胎的必由之路,是现代科学的维生素。数学化序幕开启的迟早展示了一幅众学科进化发育的时间谱,数学化的程度更是学科成熟性的金标准。

生物医学的数学化已现端倪

追溯历史,数学进入现代生物医学是与物理学、化学结伴而行的。早在 1615 年,Harvey 在研究心脏时发现血液只能朝一个方向流出心室,而心室能容纳的血量约为 2 盎司,若心脏每分钟搏动 72 次,每小时血量高达 $2\times72\times60=8640$ 盎司,折合 540 磅。这么多血量从何而来,又流向何方? 那时还没有发明显微镜,看不到微细血管和血液经动脉流向静脉的过程。Harvey依靠流体力学知识和逻辑推理断定血液循环系统的存在。

奥地利著名物理学家、量子力学创始人之一薛定谔(E. Schrodinger)于 1944 年出版《生命是什么?》一书,运用量子力学和统计力学知识描述了生命物质的重要特征,认为生命系统显示了“从有序产生有序”和“从无序产生有序”两个基本过程。他指出基因是活细胞的关键组成部分,要懂得什么是生命必须知道基因是如何发挥作用的。在薛定谔的影响下,Watson 和 Crick 充分利用当时对蛋白质和核酸所做的 X 射线结晶学研究结果以及其他与 DNA 结构有关的成就,于 1953 年建立了 DNA 双螺旋结构分子模型,使得发展较慢的生物学经历了重大变革,从定性描述跃居定量科学的行列。

薛定谔还利用非平衡热力学从宏观整体解释生命现象,认为生命现象的基本特征是从环境中取得“负熵”,使生物系统内的熵不断处于低水平。Prigogine 等人提出的耗散结构理论将热力学推广到薛定谔预言的领域,因此而荣膺 1977 年诺贝尔奖。这一新理论认为所有的生命

系统都表现为准静态的远离平衡态的耗散结构，这些系统都是通过数学上的分叉和自催化非线性过程逐渐形成。

随着生物物理学和生物化学的发展，1939 年在美国芝加哥大学出现了一个以 Rashevsky 为代表的数学生物物理学派和数学生物物理学杂志，着重研究生物物理学中的复杂而抽象的数学问题，这是生命科学数学化的一个重要进展。在最近半个世纪中，数学更长驱直入生命科学，先后在美国、西欧和中国涌现了生物数学、生物统计学、生物信息学以及数学生物科学的研究群体和多种专门杂志，或着重研究从生命现象中提炼出的数学、统计学和信息科学问题，或着重用高深的数学理论和计算机及信息技术研究生命现象。

运用高深的数学理论和计算机及信息技术研究生命现象已经取得了可喜的成果。现以普及的计算机化断层照相术(CT)便是精密的 X 光技术和数学模型及快速的计算技术相结合的产物，研究者因此获得诺贝尔奖。出身于数学的 Jerne 因研究免疫网络理论而获得诺贝尔奖。电生理学家 Hodgkin 和 Huxley 用微分方程组描述神经纤维的电行为，研究神经冲动的传导，成绩卓越而获得诺贝尔奖又是一例。此外，如国际上普遍关注的视觉机理研究、DNA 序列分析、癌瘤细胞的异质性以及思维、语言与精神活动的脑电破译等都是在现代生物医学与现代数学高度融合的情形下取得进展的。

事实上，当今许多生物医学的重大课题同样亟须现代数学的支撑。如基因和蛋白质组的表达调控与功能之间的关系、生物大分子网络系统的结构与功能、免疫系统和非免疫系统之间的通讯、寄生虫在人体内的生态学、细胞增殖与死亡的动力过程、传染病的流行规律、遗传病的趋势与控制、心血管疾病的猝死与预测、癌瘤的发生发展与转移、体内电解质系统的平衡与失调、神经网络中的混沌现象，乃至实用性较强的药物代谢动力学与药物构效学的连接、中医病案的归纳整理、中医方剂体系的定量研究等不胜罗列。这类课题若能置于现代数学的基础之上，方法学必更新，研究成果必深刻，相应的学科必改观；同时，生物数学、生物统计学和生物信息学等边缘学科必随之丰富、成熟壮大。

提高新一代生物医学工作者的数学素养

生物医学的数学化不等于在生物医学论著中使用几个数学术语、插上几个数学符号或公式借以装璜点缀。生物医学的数学化应当是现代数学的方法学与生物医学课题的有机融合。欲达此目标，需要有生物医学工作者和数学、统计学、计算机工作者的通力协作；欲协作就得互相学习，彼此拓广知识面，具备双向渗透的共同语言。一方面，数学、统计学、计算机工作者应当深入生物医学课题学习生命科学的基本知识，研究生命现象中的运动规律；另一方面，生物医学工作者应当学习数学、统计学和计算机方面的基本知识，汲取其方法学，以定量的、运动的和系统的观点来认识生命现象。

学习数学、统计学和计算机方面的基本知识要从大学生阶段抓起，这是改善我国生物医学工作者自然科学素质的重要战略。微积分是现代数学的基础，在生物医学各专业的一年级开设这一课程是极其必要的。它对于提高生物医学人材的综合素质，培养多维思考和独立判断的能力，开发潜在的能动性和创造力，起关键作用。在国外，这是进入大学之前的必修课。在国内，以北京大学为例，从 20 世纪 50 年代起即定为医学生的必修课；而今天，几乎所有的高等医学院校均已列入教学计划。这门课程的根本目的是将学生引进现代数学的大门，使其带着数学头脑学习后续课程，也为今后进一步自学和运用现代数学的思想和方法观察和处理工作

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

中的实际问题，提高专业水平留下伏笔。本书就是围绕这一目的编写的。

本书的内容和使用说明

本书是根据方积乾教授等主编的同名教材修编而成，由北京大学医学部和首都医科大学部分同仁合作编写。本书的宗旨是注重基础，便于教学；联系实际，培养能力；与时俱进，有所发展。除了尽量汲取参编院校数十年的教学经验之外，书中还揉进了编者们多年从事生物数学、生物统计学和生物信息学的研究心得。

本书从生物医学各专业对高等数学的需要出发，结合学时限制，精选内容，布置篇幅。全书分为七章。第一章为微积分的预备知识，主要是以实数理论为基础的函数的极限与连续性，以加强基础，培养学生的数学思维能力。第二章至第五章以微元分析思想为主线，介绍一元微积分学、多元微积分学和常微分方程，重点阐明微积分的基本概念、基本理论、基本方法和基本知识体系。第六章以数学建模思想为纲，结合生物数学史上的成功范例，讨论如何从现实问题中提出数学问题，而后综合运用所学的数学知识来分析和解决实际问题，着重介绍理论与实践相结合的方法学，以培养学生学以致用的能力。与传统的高等数学教材相比，本书在前面的章节中，以较短的篇幅介绍函数拟合与最小二乘法、列表函数的插值与数值微积分、函数方程与微分方程的近似解法以及傅里叶级数与傅里叶变换等实用性较强的技术和方法。这些内容切合现代生物医学的需要，又有助于培养学生的实践技能。本书最后介绍处理数学问题的综合性数学软件 Mathematica，以增强学生把数学的理论知识和现代化的计算技术与相关领域的专业知识结合起来创造性地解决实际问题的能力。这些举措将会对学生以后进一步的学习和未来的工作产生积极的引导作用。

本书可作为医学院校 54～72 学时高等数学课程的教材，各学校可根据实际情况灵活掌握。为了便于教学，书中每节之后设有思考与练习，每章之后设有小结和习题，书后给出答案。考虑到近年来的中学教材已有部分微积分的预备知识以及计算机和各种应用软件的广泛普及，建议本书第一章和第七章以引导阅读和实习为主而不占用过多的课堂时间。此外，第六章内容不必全讲，可作期末读书报告会的素材，由学生选学并演讲。另外，正文中给出主要的英文专业词汇，以利于随学随记，并于书后汇总成中英专业词汇对照表，便于查索。书末还附有参考文献。

参加此次编写工作的有刘红、华琳、李冬果、高东红、陈靖华、贺东奇等同志。限于编者的水平，本书肯定会有许多不足之处。恳请读者提出意见和建议。

编　者

2006 年 7 月

第一章　微积分的预备知识

函数，作为对变化的和相互联系的客观事物的数量关系和表现形式的抽象，是微积分的主要研究对象。以无穷小分析为核心内容的极限理论则是微积分的重要工具。函数的连续性是用极限来刻画的微积分的基本概念；连续函数，作为现实空间与时间的连续性以及连续变化的自然现象的一种概括，是实际应用最广泛的函数类；而连续函数在闭区间上的基本性质，作为函数研究的基础理论，在引进和解决微积分的基本问题时起关键作用。

第一节　函　数

一、实数基础

1. 实数系及表示法

实数系(the real number system)是由有理数和无理数的全体所构成的集合。有理数是一切形如 p/q 的数，其中 p、q 为无公因子的整数且 q 不为零；无理数则不能表示成上述形式，如 $\sqrt{2}$、π 等。

实数系与数轴(the number axis，也称数直线)上的点是一一对应的。因此也可把实数称为点，如点 1，点$\sqrt{2}$等。有理数和无理数所对应的点分别称为有理点和无理点。数轴上，任何两个有理点之间存在无穷多个无理点，任何两个无理点之间也存在无穷多个有理点。如果把数直线断开，相当于把实数系分划为两个非空集合 A 和 A'，记作 $A|A'$，使得 A 中的每一个数小于 A' 中的任一数，则只能出现下列两种情形之一：A 有最大数或 A' 有最小数，两者同时出现是不可能的。这就是数直线的连续性。

实数 a 的绝对值 $|a|$ 是数轴上点 a 到原点的距离。当 $a\geqslant 0$ 时，$|a|=a$；当 $a<0$ 时，$|a|=-a$. 对任意实数 a、b 都有：$|a|\geqslant 0$，$|a|=|-a|$，$-|a|\leqslant a\leqslant |a|$，$\sqrt{a^2}=|a|$，$\big||a|-|b|\big|\leqslant |a+b|\leqslant |a|+|b|$，$|a-b|\leqslant |a-c|+|c-b|$，$|a|\leqslant b$ 等价于 $-b\leqslant a\leqslant b$.

微积分中最常用的数集是区间(interval). 给定两个实数 a、$b(a<b)$，数集 $\{x:a<x<b\}$ 称为开区间，记作 (a,b)；数集 $\{x:a\leqslant x\leqslant b\}$ 称为闭区间，记作 $[a,b]$；数集 $\{x:a<x\leqslant b\}$ 和 $\{x:a\leqslant x<b\}$ 称为半开半闭区间，分别记作 $(a,b]$ 和 $[a,b)$；数集 $\{x:x<a\}$ 和 $\{x:x\geqslant a\}$ 称为半无穷区间，分别记作 $(-\infty,a)$ 和 $[a,+\infty)$；整个实数集称为无穷区间，记作 $(-\infty,+\infty)$. 此外，如果一区间被另一个区间所包含，则前者称为后者的子区间。例如，区间 $(0,1)$ 是 $[0,2)$ 的子区间。

数轴上，给定点 x_0 和正数 r，满足条件 $0<|x-x_0|<r$ 的所有点的集合称为点 x_0 的 r 邻域(the neighborhood)，记作 $N(x_0,r)$，即

$$N(x_0,r)=\{x:0<|x-x_0|<r\}=(x_0-r,x_0)\cup(x_0,x_0+r).$$

其中 (x_0-r,x_0) 与 (x_0,x_0+r) 分别称为点 x_0 的左邻域与右邻域(图 1-1-1).

2. 实数集的界和实数系的完备性

设 A 是一个实数集，如果存在实数 M，对于 A 中任一数 a，都有 $a\leqslant M$，则称数集 A 有上界

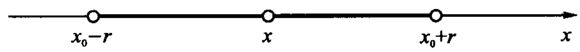


图 1-1-1

(upper bound),M 是 A 的一个上界。如果存在实数 m,对 A 中任一数 a,都有 $a \geqslant m$,称数集 A 有下界(below bound),m 是 A 的一个下界。如果存在正数 L,对于 A 中任一数 a,都有 $|a| \leqslant L$,则称数集 A 为有界集(bounded set);否则称 A 为无界集(unbounded set). 比如真分数集(0,1)是一个以 0 为下界,1 为上界的有界数集,而整个自然数集合是一个无界数集。

显然,如果数集 A 有上界,则其上界必定有无穷多;在所有的上界中,最小的一个称为 A 的上确界(the supremum),用 $\sup A$ 表示。如果数集 A 有下界,则所有下界之中,最大的一个称为 A 的下确界(the infimum),记作 $\inf A$. 比如 0 和 1 分别为真分数集的下确界和上确界。由数直线的连续性可以推出实数系的一个重要性质:有界实数集必有上确界和下确界。它可以叙述为

实数系完备性定理 有上(下)界的实数集必有上(下)确界。

证明 设 S 是一个有上(下)界的实数集合。如果 S 有最大(小)数,记为 $M(m)$,则 $M(m)$ 是 S 的上(下)确界。否则,对实数系做分划 $A|A'$,使得 $S \subset A(A')$,并且 $A'(A)$ 包含 S 的所有上(下)界;此时 $A(A')$ 中无最大(小)数,$A'(A)$ 中必有最小(大)数,这个数就是 S 的上(下)确界。

二、函数的概念与初等函数

1. 引例

在日常生活和科学研究中,人们经常会遇到各种各样的量。这些量大致可分为两类:可以取不同数值的量称为变量(variable),而只取固定数值的量称为常量(constant quantity). 一个问题中往往会涉及多个变量,它们之间相互联系,并遵循一定的变化规律。

例 1 质点从距地面高度为 h 处自由下落,通过的路程 s 与所用的时间 t 之间存在对应关系 $s=\frac{1}{2}gt^2$,其中 g 为常量,表示重力加速度,t 的变化范围为$[0,\sqrt{2h/g}]$,s 的变化范围为$[0,h]$. 对于$[0,\sqrt{2h/g}]$中的每一时刻 t_0,都有对应的路程 $s=gt_0^2/2$.

例 2 医学实验测得环境温度与人体代谢率之间有如下关系:

环境温度(℃)	…	4	10	20	30	38	…
代谢率(千卡/小时米)	…	60	44	40	40.5	54	…

这里,变量的变化范围和相互依赖关系由实测数据确定。对于表中的每一对实测值,都可在平面直角坐标系中找到一点;把相邻两点用直线段连接起来,就得到一条折线(图 1-1-2). 根据这一折线,不仅可以估计在实验范围内的任一环境温度所对应的人体代谢率的值,而且可以作图形分析。比如由图可见,环境温度偏低或偏高都会对代谢率有较大影响,只有当环境温度在 20℃左右时,代谢率较低且稳定。所以医学上做基础代谢测定实验时,经常保持室温为 20℃～25℃以排除环境温度的影响。

例 3 当地气象站用自动记录仪录下了某一天 24 小时气温随时间变化的曲线(图 1-1-3). 由这条曲线可以知道该地区当天任一时刻 t_0 时的气温。

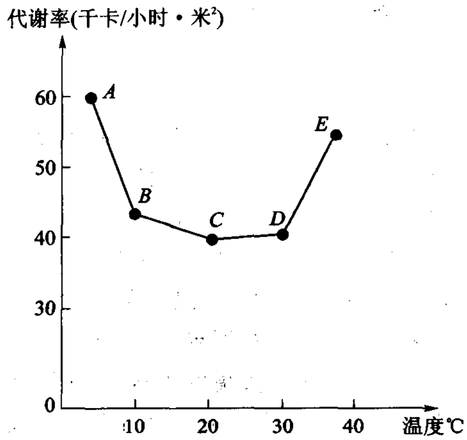


图 1-1-2

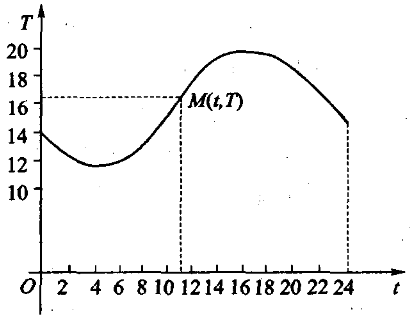


图 1-1-3

2. 函数的定义

以上三个例子，虽然所含变量的实际意义、取值范围、表示方法各不相同，但是如果抽去其具体内容，只考虑两个变量变化的依从关系，就会发现它们的共同点：一个变量在某一实数集内每当取定一个数值时，另一个变量就会取确定的实数与之对应。两个变量之间的这种对应关系就是函数的实质。

定义 设有一个非空数集 D. 如果存在对应关系 f，使得 D 中的每一个数 x，都对应着唯一的一个数 y，则称这个对应关系 f 为数集 D 上的一个函数(function)，记作 $f(x)$，或写成$y=f(x),x\in D$.

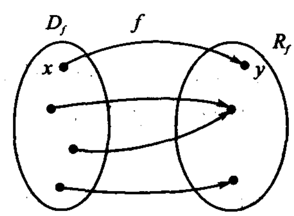


图 1-1-4

通常称 x 为自变量(independent variable)，y 为因变量(dependent variable)，D 为函数$f(x)$的定义域(domain of definition)，也记作D_f(图 1-1-4). 当 $x_0\in D_f$ 时，称 $f(x)$在点 x_0 有定义；否则称 $f(x)$在点 x_0 无定义。函数 $y=f(x)$在点 x_0 的函数值用 $f(x_0)$或 $y(x_0)$表示。当自变量 x 取遍 D_f 中所有的数时，对应的函数值 y 的全体所构成的数集，称为函数 $f(x)$的值域(range)，记作 R_f，即 $R_f=\{y:y=f(x),x\in D_f\}$.

函数的定义域一般由问题的实际意义所决定；而对于仅由抽象公式所表达的函数，其定义域规定为使公式有意义的自变量的全体所构成的集合。定义域和对应关系是函数的基本要素。两个函数相等，当且仅当它们的定义域相同且对应关系也相同。

例 4 函数 $f(x)=x^2+1$，定义域为$(-\infty,+\infty)$，对应关系为 $f(\cdot)=(\cdot)^2+1$，即运算：括号内的数平方后再加 1. 因此，$f(1)=1^2+1=2$，$f(\sqrt{2})=(\sqrt{2})^2+1=3$，$f(f(x))=(f(x))^2+1=(x^2+1)^2+1$，$f(\frac{1}{f(x)})=(\frac{1}{f(x)})^2+1=\frac{1}{(x^2+1)^2}+1$.

例 5 半径为 r 的圆的面积公式 $A=\pi r^2$ 给出了圆的半径与面积之间的函数关系，其定义域为$[0,+\infty)$.

例 6 函数 $f(x)=\sqrt{(x-3)(x-4)}+\ln[(x-1)(5-x)]$的定义域 D 为函数 $f_1(x)=\sqrt{(x-3)(x-4)}$的定义域 D_1 与函数 $f_2(x)=\ln[(x-1)(5-x)]$的定义域 D_2 之交。由于$D_1=(-\infty,3]\cup[4,+\infty)$，$D_2=(1,5)$，于是 $D=(1,3]\cup[4,5)$.

例 7 函数 $f_1(x)=\ln x^2$ 与 $\varphi_1(x)=2\ln x$ 是两个不同的函数，因为它们有不同的定义域。函数 $f_2(x)=x$ 与 $\varphi_2(x)=\sqrt{x^2}$ 也是两个不同的函数，因为它们有不同的对应关系。

3. *函数的表示方法*

函数有三种常见的表示方法，即解析法、列表法和图像法，它们各有特点。

解析法又称为公式法，是函数最重要的表示方法，如例 1. 它的优点是信息完整，形式明确，便于用分析与综合的方法对函数进行数值计算和理论研究。但要从实际问题中抽象出变量及其函数关系，既需要技巧更需要洞察力。

列表法是以表格形式给出一系列自变量值及其所对应的因变量值以示其间的函数关系。科学实验结果常用此法表示，如例 2. 它的优点在于，如果知道表中自变量值，不经计算就可得到对应的因变量值。它的缺点是信息不完整，因为总有一些自变量的值及其所对应的函数值不在表中。常用函数表就属于这种形式。

图像法通过图形来表达自变量与因变量的对应关系，如例 3. 它在生物医学中应用广泛，比如心电图、脑电图和肌电图等都属于这种表示法。它的优点是直观性强，便于启迪思维与发现联系；缺点是不够准确，也不便于进行系统的理论分析。

4. *函数的图形*

在平面直角坐标系中，函数 $f(x)$ 的图形是指平面点集 $\{(x,y):y=f(x),x\in D_f\}$. 它通常是曲线(curves)或离散的点列(sequence of points).

例 8 符号函数 $y=\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}-1, x<0,\\ 0, x=0,\\ 1, x>0.\end{cases}$ 的图形见图 1-1-5.

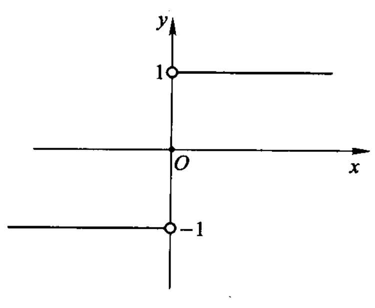


图 1-1-5

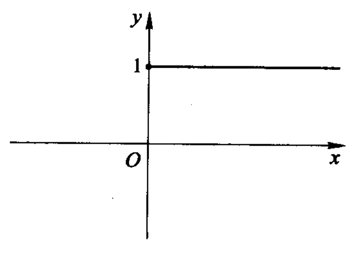


图 1-1-6

例 9 单位阶跃函数 $y=u(x)=\begin{cases}1, x\geqslant 0,\\ 0, x<0.\end{cases}$ 的图形见图 1-1-6.

例 10 绝对值函数 $y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0.\end{cases}$ 的图形见图 1-1-7.

例 11 取整函数 $y=[x]$ 为不超过 x 的最大整数，即 $y=[x]=n$，当 $x=n+r(0\leqslant r<1, n$ 为整数$)$ 时，其图形见图 1-1-8.

上述图形所表示的函数都可以称为分段函数(piecewise functions)，其特点是在定义域的若干不相交的子集上由不同的解析式表示。分段函数仍属于用解析法表示的函数。

例 12 狄利克雷(Dirichlet)函数 $D(x)=\begin{cases}1, x \text{ 为有理数},\\ 0, x \text{ 为无理数}.\end{cases}$ 是一个奇妙的函数，人们只能想象而无法画出它的图形。

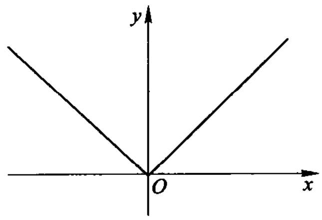


图 1-1-7

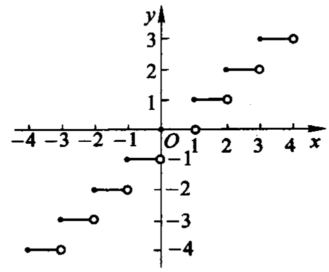


图 1-1-8

5. 函数的四则运算与复合函数

设函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 有共同的定义域 D,由这两个函数的和、差、积、商(分母不为零)即 $f(x)\pm g(x)$,$f(x)\cdot g(x)$,$f(x)/g(x)(g(x)\neq 0)$ 构成 D 或 D 的子集上的函数,通称为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的四则运算(the four operations of arithmetic). 比如函数 $\cos x$ 与 $\sin x$ 的商 $\cos x/\sin x$ 当 $x\neq k\pi$(k 为整数)时构成函数 $\cot x$.

设有两个函数 $y=f(u)$,$u\in D_f$ 与 $u=\varphi(x)$,$x\in D_\varphi$,并且 $\varphi(x)$ 的值域包含在 $f(u)$ 的定义域中,即 $R_\varphi\subseteq D_f$,则称由 $x\in D_\varphi$ 经过 $u\in R_\varphi$ 而得到 y 所构成的对应关系为函数 f 与 φ 的复合函数(compound function),记作 $y=f[\varphi(x)]$,$x\in D_\varphi$. 此时 x 称为自变量,y 为因变量,u 为中间变量(intermediate variable).

例如质量为 m 的质点从高为 h 处自由下落,已知它在 t 时刻的速度为 $v=gt$,$t\in[0,\sqrt{2h/g}]$,动能为 $T=mv^2/2$,$v\in[0,+\infty)$. 因为函数 $v(t)$ 的值域 $[0,\sqrt{2gh}]$ 包含在函数 $T(v)$ 的定义域中,所以变量 T 经过中间变量 v 构成自变量 t 的复合函数 $T=T[v(t)]=m(gt)^2/2=mg^2t^2/2$,$t\in[0,\sqrt{2h/g}]$.

这种把一个函数代入另一个函数的运算称为复合运算(compound operation). 在一定的条件下,$n(n\geqslant 3)$ 个函数也可经过 $n-1$ 次复合运算构成一个复合函数。

例 13 分析函数 $y=\sqrt{1+\ln(2+\sin x)}$ 的复合结构。

解 这个函数由 $y=\sqrt{u}\quad u\in[0,+\infty)$,$u=1+\ln v\quad v\in(0,+\infty)$,$v=2+\sin x\quad x\in(-\infty,+\infty)$ 三个简单函数复合而成。

6. 奇函数、偶函数、有界函数和周期函数

如果函数 $f(x)$ 的定义域 D_f 是对称区间,并且对任何 $x\in D_f$,都有 $f(-x)=f(x)$,则称 $f(x)$ 为偶函数(even function);如果都有 $f(-x)=-f(x)$,则称 $f(x)$ 为奇函数(odd function). 比如函数 x^{2k} 和 $\cos x$ 是偶函数,而 x^{2k+1} 和 $\sin x$ 是奇函数(k 为非负整数). 由于偶函数的图形关于 y 轴对称,而奇函数的图形关于原点对称,所以偶函数和奇函数也称为对称函数(symmetric function). 对称函数具有下述性质:

(i) 两个偶函数或两个奇函数的乘积是偶函数;

(ii) 一个偶函数与一个奇函数的乘积是奇函数;

(iii) 以对称区间 D_f 为定义域的任一函数 $f(x)$ 可以表示成一个偶函数与一个奇函数之和:$f(x)=[f(x)+f(-x)]/2+[f(x)-f(-x)]/2$.

如果 $f(x)$ 的值域 R_f 有上界,则称 $f(x)$ 在 D_f 上有上界;如果 R_f 有下界,则称 $f(x)$ 在 D_f 上有下界;如果 R_f 是有界集,则称 $f(x)$ 是 D_f 上的有界函数(bounded function),否则称 $f(x)$

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com