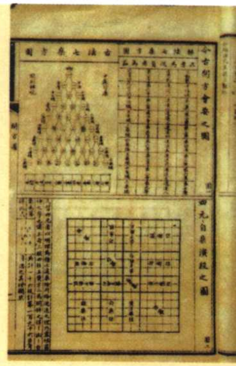
SI YUAN YU JIAN JIAO ZHENG

四元玉鉴校证



⊙〔元〕朱世杰/原著
李兆华/校证

科学出版社
www.sciencep.com

四元玉鉴校证

[元] 朱世杰　原著
李兆华　校证

科学出版社
北　京

内 容 简 介

《四元玉鉴》是元代杰出数学家朱世杰的代表作，其中的成果被视为中国筹算系统发展的顶峰。本书根据近年来发现的清代有关史料，对原书给出全面的校证，解决了清代学者遗留的校勘问题，并对书中的四元术、垛积术与招差术、方程论等成就的科学性、一般性予以论证。系统讨论了这一杰作的版本递变，以及研究成果与进展。

本书适于数学史工作者、数学工作者、大学数学系师生及中学数学教师阅读。

图书在版编目（CIP）数据

四元玉鉴校证／（元）朱世杰原著；李兆华校证．—北京：科学出版社，2007

ISBN 978-7-03-020112-6

Ⅰ．四… Ⅱ．①朱…②李… Ⅲ．古典数学-研究-中国-元代 Ⅳ．O112

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 155441 号

责任编辑：孔国平　李俊峰　苏雪莲／责任校对：曾　茹
责任印制：钱玉芬／封面设计：张　放

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

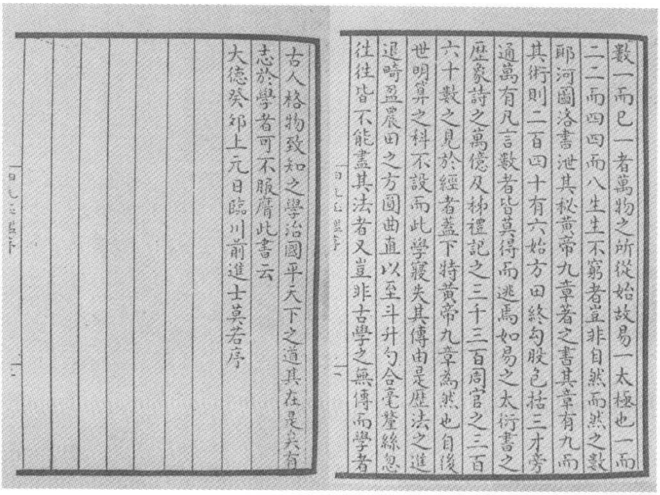
中国科学院印刷厂 印刷
科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2007年10月第　一　版　　开本：850×1168　1/32
2007年10月第一次印刷　　印张：9 1/8　插页：2
印数：1—2 000　　字数：241 000

定价：25.00 元

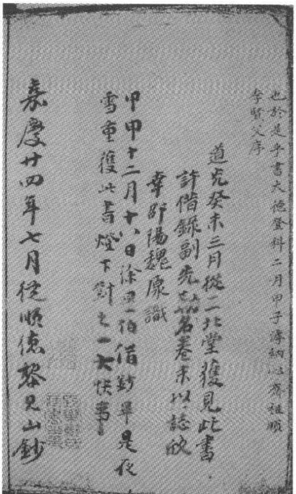
（如有印装质量问题，我社负责调换〈科印〉）



數一而已一者萬物之所從始故易一太極也一而
二二而四四而八生生不窮者豈非自然而然之數
耶河圖洛書泄其秘黃帝九章著之書其章有九而
其術則二百四十有六始方田終勾股包括三才旁
通萬有凡言數者皆莫得而逃焉如易之太衍書之
歷象詩之萬億及秭禮記之三千三百周官之三百
六十數之見於經者蓋不特黃帝九章爲然也自後
世明算之科不設而此學寖失其傳由是歷法之進
退晴昃晨田之方圓曲直以至斗升勺合毫釐絲忽
往往皆不能盡其法者又豈非古學之無傳而學者

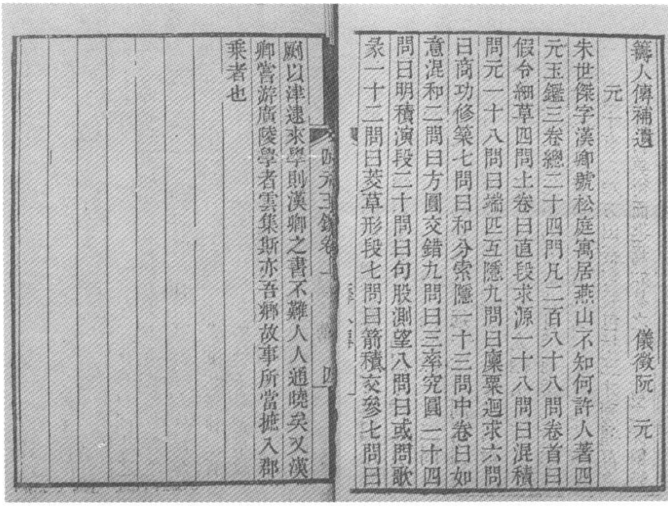
古人格物致知之學治國平天下之道其在是矣有
志於學者可不服膺此書云
大德癸卯上元日臨川前進士莫若序

1. 影印《宛委别藏》本《四元玉鉴》莫若序（首末页）



也於是乎書大德登科二月甲子涿郡以齋祖頤
李賢文序
道光癸未三月從二北堂獲見此書
許借錄副先記數語卷末以誌欣
幸 歙陽魏康識
甲申十二月十八日徐君有伯借鈔畢是夜
雪重獲此書燈下對之一大快事
嘉慶廿四年七月從順德黎見山鈔

2. 王萱铃转抄黎应南本《四元玉鉴》跋尾


疇人傳補遺

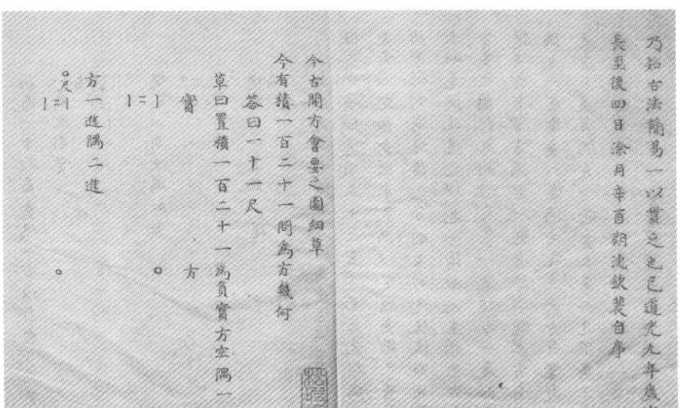
元

儀徵阮元

朱世傑字漢卿號松庭寓居燕山不知何許人著四元玉鑑三卷總二十四門凡二百八十八問卷首曰假令細草四問上卷曰直段求源一十八問曰混積問元一十八問曰端匹互隱九問曰廩粟迴求六問曰商功修築七問曰和分索隱一十三問中卷曰如意混和二問曰方圓交錯九問曰三率究圓一十四問曰明積演段二十問曰句股測望八問曰或問歌彖一十二問曰茭草形段七問曰箭積交參七問曰

闕以律遠求學則漢卿之書不難人人通曉矣又漢卿嘗游廣陵學者雲集斯亦吾鄉故事所當摭入郡乘者也

3.《四元玉鉴》何刻本阮元撰朱世杰传（首末页）


乃知古法簡易一以貫之也已道光九年歲次己丑長至後四日涂月辛酉朔沈欽裴自序

今古開方會要之圖細草

今有積一百二十一問為方幾何

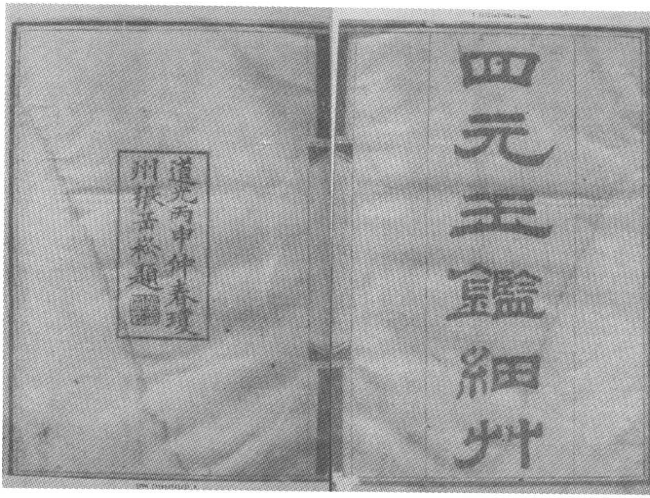
荅曰一十一尺

草曰置積一百二十一為負實方空隅一正於位

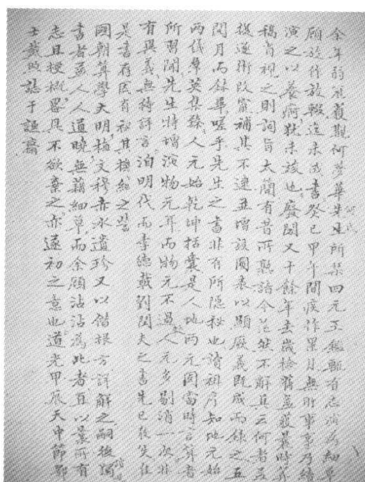
實 方 隅

方一進隅二進

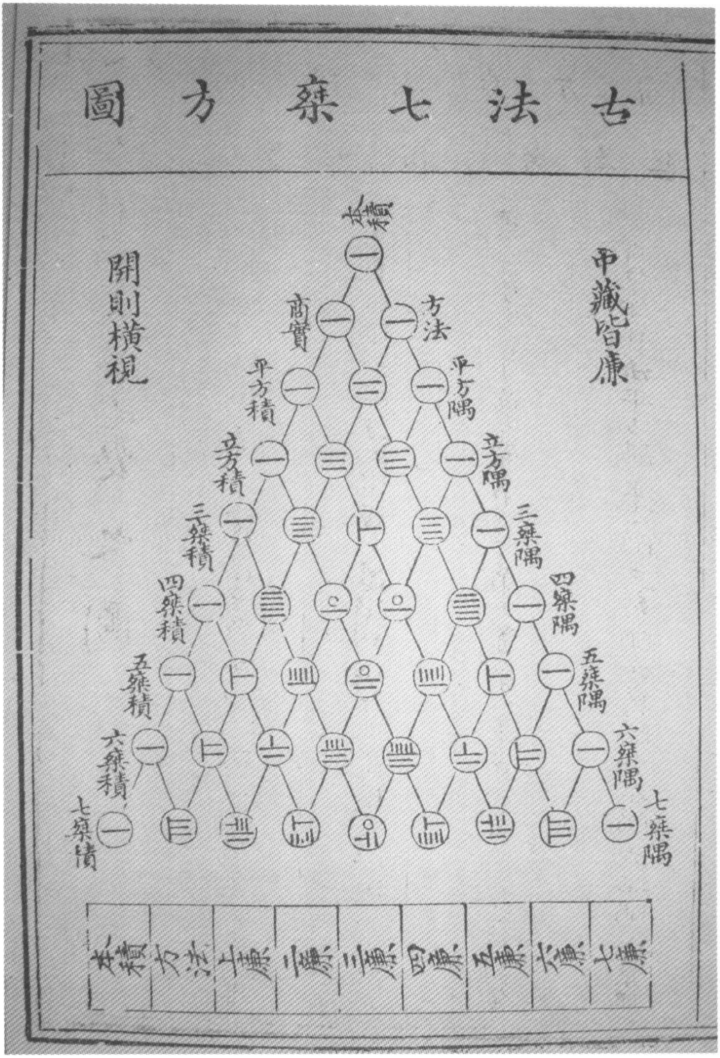
4. 沈钦裴《四元细草》今古开方会要之图细草（自序末页，细草首页）



5. 罗士琳《四元玉鉴细草》初刻本封面



6. 戴煦《四元玉鉴细草》自序



7. 古法七乘方图（采自罗士琳《四元玉鉴细草》）

目　录

导　　言

朱世杰及其《四元玉鉴》

元朝统一中国前后的数十年间，是中国数学发展的辉煌时期。其间先后出现李冶（1192～1279）、秦九韶（约1202～约1261）、杨辉（13世纪下半叶）和朱世杰（13世纪末～14世纪初）等杰出的数学家及其优秀的数学著作。其中，朱世杰的两部杰作是《算学启蒙》（1299）和《四元玉鉴》（1303），而《四元玉鉴》更以其创造性成就历来被视为朱氏的代表作。

有关朱世杰生平活动的全部史料仅有《算学启蒙》“大德己亥七月既望”（1299）赵城序、《四元玉鉴》“大德癸卯上元日”（1303.2.2）莫若序和同年“二月甲子”（1303.2.22）祖颐序[①]。据此可知朱氏生平概况如下：朱世杰，字汉卿，号松庭。《四元玉鉴》各卷之首题署“寓燕松庭朱世杰汉卿编述”。莫若序称，“燕山松庭朱先生”。祖颐序称，“吾友燕山朱汉卿先生”。故知其籍贯在燕山一带，亦即今之北京附近。莫若序称之“以数学名家周游湖海二十余年矣。四方之来学者日众，先生遂发明《九章》之妙以淑后学，为书三卷”。祖颐序称，“汉卿名世杰，松庭其自号也。周流四方，复游广陵，踵门而学者云集。大德己亥编集《算学启蒙》，赵元镇已与之版而行矣。元镇者，博雅之士也，惠然又备己财，鸠工绣梓，俾之并行于世”。以是知《四元玉鉴》刊行之际，朱世杰已周游二十余年。若朱氏二十岁以往始游他乡，则此际殆已年近五十。上溯其生年应在1250年左右。时在蒙古联宋灭金之后。1279年，南宋灭亡，元朝统一中国。朱氏“复游广陵”当在是年之后。其时

① 祖颐序所署年月日为“大德登科二月甲子”。戴煦《四元玉鉴细草》“登科”之下夹注“疑为癸卯之误”从之。大德癸卯二月甲子即大德七年二月初六日。

朱氏年当三十以往。简言之,朱氏生卒年代不可详考,而以元朝统一中国前后各三十年为限则相去不远。朱世杰是一位成功的数学教师,其所著《算学启蒙》三卷为算学入门上乘之作。该书包括四则运算、各种日常算法、盈不足术、方程术以及垛积术和开方术等内容。简而不略,明而不浅。莫若序称“四方之来学者日众”,祖颐序称“踵门而学者云集”,当非虚誉之词。其作为一位杰出的数学家,亦早成定论。莫若序称“其学能发先贤未尽之旨”,“自成一家之书”。祖颐序称“高迈于前贤”。《四元玉鉴》的四元术、垛积术、招差术、开方术等成就可证两氏所论皆为由衷之言。罗士琳(1789~1853)称,“汉卿在宋元间,与秦道古、李仁卿可称鼎足而三。道古正负开方,仁卿天元如积,皆足上下千古。汉卿又兼包众有,充类尽量,神而明之,尤超越乎秦、李两家之上”。[①]罗氏对三家工作的比较虽非全面,而谓秦、李、朱“鼎足而三”,朱氏“超越于秦、李两家之上”则属可信。

一、四元消法的运算及增根减根

四元术是二元、三元及四元高次方程组的表示、建立和求解方法,是为天元术基础上产生的一种算法。如《四元玉鉴》祖颐序所说,天元术之后,“平阳(今山西临汾)李德载因撰《两仪群英集臻》,兼有地元。霍山(今山西霍县东南)邢先生颂不高弟刘大鉴润夫撰《乾坤括囊》,末仅有人元二问。吾友燕山朱汉卿先生演数有年,探三才赜,索《九章》之隐,按天、地、人、物立成四元”。李氏与刘氏的著作今已不传,而四元术藉《四元玉鉴》流传至今。

四元术的方程组表示法是天元术的方程表示法之推广。设天、地、人、物分别为 x, y, z, w,则方程各项的位置如图 1 所示。“太”的位置置方程的常数项。四个空格置图 1 标识之外的交叉项,因题而异。例如,图 2 表示方程

① 罗士琳:《续畴人传》卷四十七,朱世杰传。测海山房本。

$$xy - x^2y - yz + xyz + x^2 - z^2 = 0$$

而图 3 表示方程

$$-xy^2 - y + xyz - x - z = 0$$

“太”左下第一个空格中，前例置 $-yz$，后例置 xyz。依据已知条件及所求设立未知元并逐一建立方程，即得方程组。二元、三元及四元方程组的建立，朱氏原草分别指示“天地配合求之”、“三才相配求得”与“四象和会求之”，其意需使方程个数与所设未知元个数相等。

			⋮			
	w^2y^2	w^2y	w^2	w^2z	w^2z^2	
	wy^2	wy	w	wz	wz^2	
…	y^2	y	太	z	z^2	…
	xy^2	xy	x	xz	xz^2	
	x^2y^2	x^2y	x^2	x^2z	x^2z^2	
			⋮			

图 1

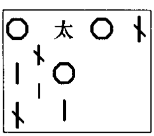


图 2

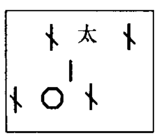


图 3

四元术的关键是四元消法。按照《四元玉鉴》卷首“四象细草假令之图”所载，四元消法大致分为“剔而消之”、“互隐通分相消”与“内外行相乘相消”等三步。就其运算结果而言，第一步将三元或四元方程组消为二元高次方程组，第二步将二元高次方程组消为关于其中某一未知元的二元一次方程组，第三步将上述二元一次方程组消为一元高次方程。既得一元高次方程，则可以正负开方术求其正根。[①]“四象细草假令之图”关于第三步的运算过程有所说明，而于其他两步均略而不载。清代沈钦裴《四元细草》不分卷（1829 自序，1830 又序）、罗士琳《四元玉鉴细草》三卷（1835 自述）与戴煦《四元玉鉴细草》三卷（1844 自序）均为系统研究《四元玉鉴》之作，且各有卓见。总括三家所见可知，四元消法即重复使用互乘对消运算的逐步消元法。

①杜石然：朱世杰研究，《宋元数学史论文集》，北京：科学出版社，1985 年，第 180 ~ 184 页。

依沈钦裴之见,“剔而消之”、“互隐通分相消”、“内外行相乘相消”均系互乘对消。在筹算中,两式互乘对消由“剔”、“互隐通分”、“相消”三次完成。兹以第二步即“互隐通分相消”为例说明之。该步消元通常有两种方式。其一,先消首项;其二,先消末项。设二元组:

$$\begin{cases} a_0y^2 + a_1y + a_2 = 0 & (1) \\ b_0y^2 + b_1y + b_2 = 0 & (2) \end{cases}$$

其中,a_i,b_i 是关于 x 的多项式,$i=0,1,2$。先消首项,即由

$$a_0 \times (2) - b_0 \times (1) = 0$$

得关于 y 的一次式。以 y 乘所得 y 的一次式与式(1)或式(2)配合,同法可得另一个关于 y 的一次式。至此,“互隐通分相消”一步结束。在筹算中,由 a_0y^2,b_0y^2 约去 y^2,求 a_0,b_0 即“剔”,求 $a_0(b_1y+b_2)$,$b_0(a_1y+a_2)$ 即“互隐通分”,求 $a_0(b_1y+b_2)-b_0(a_1y+a_2)$ 即“相消”。先消末项,即由

$$a_2 \times (2) - b_2 \times (1) = 0$$

所得约去 y,得关于 y 的一次式。以下步骤与前述方式不异。在筹算中,由 $a_0y^2+a_1y$,$b_0y^2+b_1y$ 约去 y,求 a_0y+a_1,b_0y+b_1 即“剔”,求 $a_2(b_0y+b_1)$,$b_2(a_0y+a_1)$ 即“互隐通分”,求 $a_2(b_0y+b_1)-b_2(a_0y+a_1)$ 即“相消”。

在上述三家细草中,两种方式均有实例而适用条件未见界定,当以运算简单为宜。显然,若 a_i,b_i 为二元式或三元式,或 a_0,b_0 均为零,上述方式仍可适用。故第一步至第三步的消法之原理相同。“剔而相消”、“互隐通分相消”、“内外行相乘相消”指明每步运算的要点,而每步均由三次完成。

除上述三步运算外,四元消法还有“人易天位”、“物易天位”等运算。三元组消去地元 y 之后作“人易天位”,即作变量代换 $x=y$,$z=x$。四元组消去天元 x 之后作“物易天位”,即作变量代换 $w=x$。这种代换并不改变方程组的解,只需求得 x 之后,再代换为 z 或 w 即可。作变量代换的具体原因,原著不载,似与筹算运算的

习惯有关。若所求之元设为天元则无需易位。

以四元消法将方程组消为一元方程，所得之方程并非惟一。兹列举卷下之七第二题三家所得方程，并就其不同之故略作说明。

依题意，设 $x=a, y=b, z=a+b+c$，a, b, c 为勾股形三边，得方程组：

$$\begin{cases}7xy+12x^2-12xz+3z^2-4yz=0\\5y^2+y+6xy+x+x^2-2xz-2yz=0\\2xy-2xz-2yz+z^2=0\end{cases}$$

消去 y，“人易天位”。沈草本题给出二术。其第一术所给前式、后式为

$$\begin{cases}-24y^3+34xy^2-15x^2y+2x^3=0\\4y^4+(8x+4)y^3-(4x^2+4x)y^2-(4x^3+2x^2)y+(x^4+2x^3)=0\end{cases}$$

所给方程为

$$\begin{aligned}S_1(x)&=759x^4-8984x^3-2124x^2+7776x-1728\\&=(11x+12)(x-12)(3x-2)(23x-6)=0\end{aligned}$$

开得 $x=12$。据“人易天位”，即 $z=12$。

其第二术所给前式、后式为

$$\begin{cases}24y^3-34xy^2+15x^2y-2x^3=0\\585y^4-(864x+27)y^3+(419x^2+24x)y^2-(80x^3+3x^2)y+5x^4=0\end{cases}$$

所给方程为

$$\begin{aligned}S_2(x)&=-759x^4+10\ 640x^3-19\ 284x^2+10\ 944x-1\ 728\\&=-(11x-12)(x-12)(3x-2)(23x-6)=0\end{aligned}$$

开得 $x=12$。据“人易天位”，即 $z=12$。

罗草所给前式、后式同沈草第二术前式、后式。所给方程同朱氏原术，即

$$\begin{aligned}L(x)&=4209x^4-53\ 998x^3+42\ 228x^2-4104x-864\\&=(61x+6)(x-12)(3x-2)(23x-6)=0\end{aligned}$$

开得 $x=12$。据“人易天位”，即 $z=12$。

本题戴草给出三术。其前式、后式均为