高等学校教材

工程数学

数学物理方程与特殊函数

（第三版）

东南大学数学系　王元明 编

高等教育出版社

高等学校教材

工程数学

数学物理方程与特殊函数

（第三版）

东南大学数学系
王元明　编

高等教育出版社

内容提要

本书第三版是在1982年出版的第二版的基础上修订的，除保留了第二版原有特色以外，还根据工科各专业发展的需要对内容作了增减。全书共分九章，前四章及第七、第八章介绍数学物理方程的基本概念和常用解法；第五、六两章分别讨论了贝塞尔函数与勒让德多项式的基本性质及在求解数学物理方程定解问题中的应用；第九章简要地介绍了物理学、几何学中几个重要的非线性偏微分方程，其中包括激波与孤立波。

本书可作为高等学校理工科各专业的教材，也可供工程技术人员、数学系师生参考。

图书在版编目(CIP)数据

工程数学：数学物理方程与特殊函数/王元明编.
3版.—北京：高等教育出版社，2004.1
ISBN 7-04-012958-2

Ⅰ.工...　Ⅱ.王...　Ⅲ.①数学物理方程-高等学校-教材②特殊函数-高等学校-教材
Ⅳ.O175 24②O174 6

中国版本图书馆CIP数据核字(2003)第100543号

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-64054588
社　　址	北京市西城区德外大街4号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-82028899		http://www.hep.com.cn
经　　销	新华书店北京发行所		
印　　刷	廊坊市科通印业有限公司		
		版　　次	1978年11月第1版
开　　本	850×1168　1/32		2004年1月第3版
印　　张	6.75	印　　次	2004年1月第1次印刷
字　　数	170 000	定　　价	9.80元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有　侵权必究

第二版前言

本书从 1978 年作为工程数学试用教材出版以来，得到了许多兄弟院校的关心和支持，一些和我们素不相识的同行们出于高度的事业心和责任感，在使用本书的过程中积累了许多宝贵的意见和建议，这些来自教学实践的经验和要求，是我们这次进行修订的主要依据。

全书由“数学物理方程”与“特殊函数”两大部分内容组成。“数理方程”部分，主要是讲了数学物理方程的一些基本概念及三种典型的二阶线性偏微分方程各种定解问题的一些常用解法，其中包括分离变量法、行波法、积分变换法、格林函数法及差分法。在这些解法中，我们把重点放在分离变量法上，较详细地讨论了三种典型方程在直角坐标系、极坐标系、柱面坐标系与球面坐标系中进行分离变量的一般步骤及各种边界条件的处理。“特殊函数”部分，主要是讲了贝塞尔函数及勒让德多项式，其中包括如何从求解数学物理方程的定解问题引出贝塞尔方程与勒让德方程；两个方程通解的表达式；贝塞尔函数及勒让德多项式的一些重要性质以及利用这两种特殊函数来解决数学物理方程的一些定解问题的全过程。这两大部分内容既有一定的相对独立性，但从某种意义上讲又是一个不可分割的有机整体。

不论是数学物理方程，还是特殊函数，它们的内容都是极其丰富的，作为一本工科院校的工程数学的教材，当然不可能把所有主要的内容都包罗无遗地吸收进来。如何根据工科院校的特点，用较少的篇幅把一些最基本的概念和方法讲清楚，并能为较多的要求各不相同的专业所采用，这一直是编者感到棘手的难题。虽然我们也作了一些努力，例如，本书采用了以数学物理方程的常用解法

为安排内容的线索，且在各种解法中只着眼于求出“形式解”，而略去了对定解问题适定性的讨论；又如，尽可能地把各部分内容写得前后呼应，对各种解法的思路和特点都作了一点简要的说明等等。但这些做法是否妥当，还有待于今后教学实践的检验。

使用本书的教学时数，大体为 33～41，各章学时的分配数可参考下表：

章　数	一	二	三	四	五	六	七
时　数	3～4	8～10	4～5	4～5	6～8	4～5	4

本书的第一版是在我们教研组过去编写的讲义的基础上，根据 1977 年在西安召开的高等学校工科数学教材编写会议通过的大纲编写的，这次又以第一版为基础，参照高等工业学校工程数学教学大纲（草案）和校内外许多同志在使用中所积累的经验和建议修订的。本书主审人浙江大学周茂清教授详细审阅了原稿，并提出了许多宝贵的意见，编者向他表示衷心的感谢。同时，编者还要向以各种方式帮助本书编写与修改的校内外同志，致以诚挚的谢意。

本书的编写与修订工作是由王元明同志执笔完成的。孙家乐、宋柏生两同志在这次修订时提供了一些有益的建议。

由于编者水平所限，书中一定还存在不少错误和缺点，敬请赐教。

编　者

1982 年 3 月

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.co

第三版前言

自本书第二版问世以来,得到了同行们的理解、关心和支持,二十年内共印刷33次,总发行量近70万册。书的优点和缺点都非常明显。优点是:文字精炼、思路清晰、重点突出、篇幅适当,在较长时间内满足了工科学生对这门课程的要求;缺点是:二十年没有修订,内容有些陈旧,个别例子及个别地方有错误或表述不准确。

这次修订的基本宗旨就是要保留原书的优点,尽可能地克服其缺点。具体地说,就是:

第一、对第二版前六章除了对少数内容作了更正和文字修改以外,基本上保持不变。

第二、删去了第二版中第七章“数学物理方程的差分解法”。这样做的出发点是:我们认为这个内容放到《数值分析》这类课程内可能更合适一些。

第三、增加了“能量积分法”、“变分方法”及“非线性偏微分方程”三章内容。这三章的写法也力求前后呼应,彼此关联。此外,在“变分方法”和“非线性偏微分方程”两章内,还引入了定解问题“弱解”的概念。

书中各章的内容基本上都是彼此独立的,因此在教学时可根据需要和学时数任意取舍,但从本门课程来讲,前六章无疑是最基础的。为便于组织教学,我们宁愿放弃了从数学物理方程的体系来安排各章顺序的做法,将新增的内容放在书的后三章。对于不要求了解“特殊函数”这部分内容的读者,完全可以跳过第五、六章,直接读后面的内容。

鉴于原南京工学院已于1988年更名为现在的东南大学,数学

教研组已发展成为具有硕士、博士授予点的数学系，故将第二版的署名“南京工学院数学教研组”改为“东南大学数学系王元明”。

高等教育出版社理工分社的领导和张忠月、李艳馥两位编辑对本书的修订工作给予了热情的支持，并付出了辛勤的劳动，编者在此向她们表示衷心的感谢。

编　者

2003年6月

目　录

第一章　一些典型方程和定解条件的推导

在讨论数学物理方程的解法以前,我们首先要弄清楚数学物理方程所研究的问题的正确提法.为此,我们从两方面来讨论,一方面要建立描述某种物理过程的微分方程,另一方面要把一个特定的物理现象本身所具有的具体条件用数学形式表达出来.

§1.1　基本方程的建立

在本节,我们将通过几个不同的物理模型推导出数学物理方程中三种典型的方程,这些方程构成本书的主要研究对象.

例 1　弦的振动

弦的振动问题,虽然是一个古典问题,但对于初学者仍然具有一定的启发性.

设有一根均匀柔软的细弦,平衡时沿直线拉紧,而且除受不随时间而变的张力作用及弦本身的重力外,不受外力影响.下面研究弦作微小横向振动的规律.所谓"横向"是指全部运动出现在一个平面上,而且弦上的点沿垂直于 x 轴的方向运动(图 1-1).所谓"微小"是指振动的幅度及弦在任意位置处切线的倾角都很小,以致它们的高于一次方的项都可略而不计.

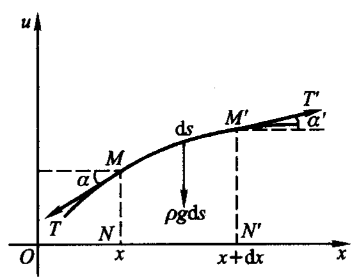

图 1-1

设弦上具有横坐标为 x 的点在时刻 t 时的位置为 M,位移

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.co

NM 记作 u. 显然,在振动过程中位移 u 是变量 x 与 t 的函数 $u(x,t)$,现在来建立位移 u 满足的方程. 我们把弦上点的运动先看作小弧段的运动,然后再考虑小弧段趋于零的极限情况. 在弦上任取一弧段 $\widehat{MM'}$,其长为 $\mathrm{d}s$,设 ρ 是弦的线密度,弧段 $\widehat{MM'}$ 两端所受的张力记作 T, T'. 由于假定弦是柔软的,所以在任一点处张力的方向总是沿着弦在该点的切线方向. 现在考虑弧段 $\widehat{MM'}$ 在 t 时刻的受力情况. 用牛顿运动定律,作用于弧段上任一方向上的力的总和等于这段弧的质量乘以该方向上的加速度.

在 x 轴方向弧段 $\widehat{MM'}$ 受力的总和为 $-T\cos\alpha + T'\cos\alpha'$,由于弦只作横向振动,所以

$$T'\cos\alpha' - T\cos\alpha = 0. \tag{1.1}$$

按照上述弦振动微小的假设,可知在振动过程中弦上 M 点与 M' 点处切线的倾角都很小,即 $\alpha\approx 0, \alpha'\approx 0$,从而由

$$\cos\alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^4}{4!} - \cdots$$

可知,当我们略去 α 与 α' 的所有高于一次方的各项时,就有

$$\cos\alpha \approx 1, \quad \cos\alpha' \approx 1,$$

代入(1.1)式,便可近似得到

$$T = T'.$$

在 u 方向弧段 $\widehat{MM'}$ 受力的总和为 $-T\sin\alpha + T'\sin\alpha' - \rho g\mathrm{d}s$,其中 $-\rho g\mathrm{d}s$ 是弧段 $\widehat{MM'}$ 的重力. 又因当 $\alpha\approx 0, \alpha'\approx 0$ 时

$$\sin\alpha = \frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}} \approx \tan\alpha = \frac{\partial u(x,t)}{\partial x},$$

$$\sin\alpha' \approx \tan\alpha' = \frac{\partial u(x+\mathrm{d}x,t)}{\partial x},$$

$$\mathrm{d}s = \sqrt{1+\left[\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right]^2}\,\mathrm{d}x \approx \mathrm{d}x,$$

且小弧段在时刻 t 沿 u 方向运动的加速度近似为 $\dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$,小弧段的质量为 $\rho\mathrm{d}s$,所以

$$-T\sin\alpha + T'\sin\alpha' - \rho g \mathrm{d}s \approx \rho \mathrm{d}s \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$$

或

$$T\left[\frac{\partial u(x+\mathrm{d}x,t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right] - \rho g \mathrm{d}x \approx \rho \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}\mathrm{d}x, \tag{1.2}$$

上式左边方括号内的部分是由于 x 产生 $\mathrm{d}x$ 的变化而引起的 $\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$ 的改变量，可用微分近似代替，即

$$\frac{\partial u(x+\mathrm{d}x,t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x,t)}{\partial u} \approx \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right]\mathrm{d}x = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\mathrm{d}x,$$

于是
$$\left[T\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \rho g\right]\mathrm{d}x \approx \rho \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}\mathrm{d}x$$

或
$$\frac{T}{\rho}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \approx \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + g.$$

一般说来，张力较大时弦振动速度变化很快，即 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ 要比 g 大得多，所以又可以把 g 略去. 经过这样逐步略去一些次要的量，抓住主要的量，在 $u(x,t)$ 关于 x,t 都是二次连续可微的前提下，最后得出 $u(x,t)$ 应近似地满足方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{1.3}$$

这里的 $a^2 = \frac{T}{\rho}$. (1.3)式称为**一维波动方程**.

如果在振动过程中，弦上另外还受到一个与弦的振动方向平行的外力，且假定在时刻 t 弦上 x 点处的外力密度为 $F(x,t)$，显然，在这时(1.1)及(1.2)分别为

$$T'\cos\alpha' - T\cos\alpha = 0,$$

$$F\mathrm{d}s - T\sin\alpha + T'\sin\alpha' - \rho g \mathrm{d}s \approx \rho \mathrm{d}s \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

利用上面的推导方法并略去弦本身的重量，可得弦的强迫振动方

程为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), \tag{1.3$'$}$$

其中　$f(x,t)=\frac{1}{\rho}F(x,t)$，表示 t 时刻单位质量的弦在 x 点处所受的外力密度.

方程(1.3)与(1.3)′的差别在于(1.3)′的右端多了一个与未知函数 u 无关的项 $f(x,t)$，这个项称为**自由项**.包括有非零自由项的方程称为**非齐次方程**，自由项恒等于零的方程称为**齐次方程**.(1.3)为齐次一维波动方程，(1.3)′为非齐次一维波动方程.

例 2　传输线方程

对于直流电或低频的交流电，电路的基尔霍夫(Kirchhoff)定律指出同一支路中电流相等.但对于较高频率的电流(指频率还没有高到能显著地辐射电磁波的情况)，电路中导线的自感和电容的效应不可忽略，因而同一支路中电流未必相等.

今考虑一来一往的高频传输线，它被当作具有分布参数的导体(图 1－2)，我们来研究这种导体内电流流动的规律.在具有分布参数的导体中，电流通过的情况，可以用电流强度 i 与电压 v 来描述，此处 i 与 v 都是 x,t 的函数，记作 $i(x,t)$与 $v(x,t)$.以 R，L，C，G 分别表示下列参数：

R——每一回路单位的串联电阻；

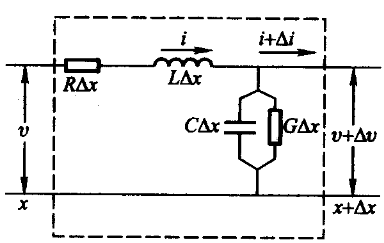

图 1－2

L——每一回路单位的串联电感；

C——每单位长度的分路电容；

G——每单位长度的分路电导.

根据基尔霍夫第二定律，在长度为 Δx 的传输线中，电压降应等于电动势之和，即

$$v-(v+\Delta v)=R\Delta x\cdot i+L\Delta x\cdot\frac{\partial i}{\partial t}.$$

由此可得

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-Ri-L\frac{\partial i}{\partial t}. \tag{1.4}$$

另外，由基尔霍夫第一定律，流入节点的电流应等于流出该节点的电流，即

$$i=(i+\Delta i)+C\Delta x\cdot\frac{\partial v}{\partial t}+G\Delta x\cdot v,$$

或

$$\frac{\partial i}{\partial x}=-C\frac{\partial v}{\partial t}-Gv. \tag{1.5}$$

将方程(1.4)与(1.5)合并，即得 i,v 应满足如下方程组：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial i}{\partial x}+C\dfrac{\partial v}{\partial t}+Gv=0,\\[2ex]\dfrac{\partial v}{\partial x}+L\dfrac{\partial i}{\partial t}+Ri=0.\end{cases}$$

从这个方程组消去 v(或 i)，即可得到 i(或 v)所满足的方程. 例如，为了消去 v，我们将方程(1.5)对 x 微分(假定 v 与 i 对 x,t 都是二次连续可微的)，同时在方程(1.4)两端乘以 C 后再对 t 微分，并把两个结果相减，即得

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2}+G\frac{\partial v}{\partial x}-LC\frac{\partial^2 i}{\partial t^2}-RC\frac{\partial i}{\partial t}=0,$$

将(1.4)中的$\frac{\partial v}{\partial x}$代入上式，得

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = LC\frac{\partial^2 i}{\partial t^2} + (RC + GL)\frac{\partial i}{\partial t} + GRi, \tag{1.6}$$

这就是电流 i 满足的微分方程. 采用类似的方法从(1.4)与(1.5)中消去 i 可得电压 v 满足的方程

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = LC\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + (RC + GL)\frac{\partial v}{\partial t} + GRv, \tag{1.7}$$

方程(1.6)或(1.7)称为**传输线方程**.

根据不同的具体情况,对参数 R, L, C, G 作不同的假定,就可以得到传输线方程的各种特殊形式. 例如,在高频传输的情况下,电导与电阻所产生的效应可以忽略不计,也就是说可令 $G = R = 0$,此时方程(1.6)与(1.7)可简化为

$$\frac{\partial^2 i}{\partial t^2} = \frac{1}{LC}\frac{\partial^2 i}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{1}{LC}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}.$$

这两个方程称为**高频传输线方程**.

若令 $a^2 = \dfrac{1}{LC}$,这两个方程与(1.3)完全相同. 由此可见,同一个方程可以用来描述不同的物理现象. 一维波动方程只是波动方程中最简单的情况,在流体力学、声学及电磁场理论中,还要研究高维的波动方程.

*__例 3__ 电磁场方程

从物理学我们知道,电磁场的特性可以用电场强度 $\boldsymbol{E}$ 与磁场强度 $\boldsymbol{H}$ 以及电感应强度 $\boldsymbol{D}$ 与磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 来描述. 联系这些量的麦克斯韦(Maxwell)方程组为

$$\mathbf{rot}\ \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}, \tag{1.8}$$

$$\mathbf{rot}\ \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}, \tag{1.9}$$

$$\mathrm{div}\ \boldsymbol{B} = 0, \tag{1.10}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{D} = \rho. \tag{1.11}$$

其中 $\boldsymbol{J}$ 为传导电流的面密度，ρ 为电荷的体密度.

这组方程还必须与下述场的物质方程

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E}, \tag{1.12}$$

$$\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H}, \tag{1.13}$$

$$\boldsymbol{J} = \sigma \boldsymbol{E} \tag{1.14}$$

相联立，其中 ε 是介质的介电常数，μ 是导磁率，σ 为导电率，我们假定介质是均匀而且是各向同性的，此时 ε, μ, σ 均为常数.

方程(1.8)与(1.9)都同时包含有 $\boldsymbol{E}$ 与 $\boldsymbol{H}$，从中消去一个变量，就可以得到关于另一个变量的微分方程. 例如先消去 $\boldsymbol{H}$，在(1.8)式两端求旋度(假定 $\boldsymbol{H}, \boldsymbol{E}$ 都是二次连续可微的)并利用(1.12)与(1.14)得

$$\textbf{rotrot } \boldsymbol{H} = \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \textbf{rot } \boldsymbol{E} + \sigma \textbf{ rot } \boldsymbol{E},$$

将(1.9)与(1.13)代入上式得

$$\textbf{rotrot } \boldsymbol{H} = -\varepsilon\mu \frac{\partial^2 \boldsymbol{H}}{\partial t^2} - \sigma\mu \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t},$$

而 $\textbf{rotrot } \boldsymbol{H} = \textbf{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{H} - \nabla^2 \boldsymbol{H}$，且 $\operatorname{div}\boldsymbol{H} = \frac{1}{\mu}\operatorname{div}\boldsymbol{B} = 0$，所以最后得到 $\boldsymbol{H}$ 所满足的方程为

$$\nabla^2 \boldsymbol{H} = \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \boldsymbol{H}}{\partial t^2} + \sigma\mu \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t};$$

同理，若消去 $\boldsymbol{H}$ 即得 $\boldsymbol{E}$ 所满足的方程

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} = \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} + \sigma\mu \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}.$$

如果介质不导电($\sigma = 0$)，则上面两个方程简化为

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{H}}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon\mu} \nabla^2 \boldsymbol{H}, \tag{1.15}$$

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon\mu} \nabla^2 \boldsymbol{E}, \tag{1.16}$$

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.co