全国农业中等职业学校“百万中专生计划”教材

数学

Shu Xue

农业部农民科技教育培训中心
中央农业广播电视学校 组编

中国农业出版社

全国农业中等职业学校“百万中专生计划”教材

数　　学

农业部农民科技教育培训中心
中央农业广播电视学校　组编

中国农业出版社

图书在版编目（CIP）数据

数学/农业部农民科技教育培训中心，中央农业广播电视学校组编. —北京：中国农业出版社，2006.9
全国农业中等职业学校“百万中专生计划”教材
ISBN 7-109-11187-3

Ⅰ.数… Ⅱ.①农…②中… Ⅲ.数学课-专业学校-教材 Ⅳ.G634.601

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2006）第 110341 号

中国农业出版社出版发行
（北京市朝阳区农展馆北路 2 号）
（邮政编码 100026）
出版人：傅玉祥
责任编辑 许 坚

中国农业出版社印刷厂印刷
2006 年 10 月第 1 版 2006 年 10 月北京第 1 次印刷

开本：720mm×960mm 1/16 印张：12
字数：212 千字
定价：16.30 元

主　　编　赵世强

编 写 者　武春波　赵世强　董淑杰

指导教师　常英新

编 写 说 明

根据全国农业中等职业学校“百万中专生计划”指导性教学计划要求，农业部农民科技教育培训中心和中央农业广播电视学校设计了教学计划的公共基础模块，该模块包括《数学》、《物理》、《农业基础化学》、《自然科学基础知识》、《应用文写作》、《英语》、《新农村建设与新农民素质教育》、《“三个代表”重要思想概论》和《计算机应用基础》等课程。

《数学》主要讲述初中和部分高中的代数和数理统计初步知识。该教材编写力求符合农村学员的文化基础条件，通俗易懂，便于自学。在每章后安排有习题、自我测试题和阅读材料，并备有答案。该教材适合全国农业中等职业学校和全国农业广播电视学校“百万中专生计划”的人才培养需要。

本教材由中央农业广播电视学校常英新担任指导教师，负责组织编写并按照中等职业学校教学要求对教材进行审定。

热忱希望广大读者对教材中不妥之处提出宝贵意见，以期进一步修订和完善。

农业部农民科技教育培训中心

中央农业广播电视学校

2006年9月

目　　录

第1章　方程与不等式

1.1　一元二次方程

我们已经学习了一元一次方程以及二元一次方程组，但是还是有一些问题不能解决.

例如剪一块面积是150 cm^2 的长方形铁片，并且使它的长比宽多5 cm，这块铁片应该怎样剪？

设：这块铁片的宽是 x cm，那么它的长是 $(x+5)$cm，根据题意，得

$$x(x+5)=150.$$

整理得

$$x^2+5x=150.$$

在整式方程中，只含有一个未知数，并且未知数的最高次数是二次的方程叫做**一元二次方程**. $x^2+5x=150$ 是整式方程，而且是一元二次方程. 任何一个关于 x 的一元二次方程，经过整理，都可以转化成下面的形式：

$$ax^2+bx+c=0(a\neq0).$$

这种形式叫做**一元二次方程的一般形式**，其中 ax^2 叫做**二次项**，a 叫做**二次项系数**；bx 叫做**一次项**，b 叫做**一次项系数**；c 叫做**常数项**.

例1　把方程 $(2x+1)^2+3(2x+1)+2=0$ 化成一般形式，并写出它的二次项系数、一次项系数及常数项.

解：去括号　　$4x^2+4x+1+6x+3+2=0$，

合并同类项　　$4x^2+10x+6=0$，

化为最简形式　　$2x^2+5x+3=0$，

所以，二次项系数 $a=2$，一次项系数 $b=5$，常数项 $c=3$.

对于 $ax^2+bx+c=0$，只有 $a\neq0$ 时，才叫做一元二次方程. 若当 $a=0$，$b\neq0$ 时，则是一元一次方程. 因此，如果明确指出 $ax^2+bx+c=0$ 是一元二次方程，那就一定有 $a\neq0$. 对于题目中没有明确指出 $ax^2+bx+c=0$ 是一元二次方程，只是说它是方程，那么就需要对它进行分类讨论. 有两种情况：当 $a\neq0$ 时，是一元二次方程；当 $a=0$ 时，是一元一次方程.

1. 一元二次方程的解法

解方程就是求出使方程中等号左右两边值相等的未知数的值，这个值就是方程的解. 解一元二次方程的方法主要有：公式法和因式分解法.

(1) 公式法　公式法又有三种：直接开平方法、配方法和求根公式法.

例如解方程：$x^2=9$，

实际上就是求 9 的平方根. 因此，$x=\pm\sqrt{9}$，

即 $$x_1=3, x_2=-3.$$

这种解左边为完全平方式，右边为非负数的形式的一元二次方程的方法叫做**直接开平方法**.

例 2　解方程(1) $4x^2-9=0$；　　(2) $(2x-3)^2-2=0$.

解：(1) 移项　$4x^2=9$，

将系数化为 1　$x^2=\frac{9}{4}$，

开平方　$x=\frac{3}{2}$　或　$x=-\frac{3}{2}$，

(2) 移项　$(2x-3)^2=2$，

开平方　$2x-3=\sqrt{2}$　或　$2x-3=-\sqrt{2}$，

即　$2x=\sqrt{2}+3$　或　$2x=-\sqrt{2}+3$，

解得　$x_1=\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}, x_2=\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

下面研究公式法中的另一种解法. 如果一个一元二次方程不是左边为完全平方式，右边为非负数的形式，那么我们可以通过配方把它变成方程左边是完全平方这种形式，如果方程右边是一个非负数，就可以应用直接开平方法求出方程的解. 这种解一元二次方程的方法叫做**配方法**.

例 3　解方程(1) $x^2-2x=99$；　　(2) $4x^2-12x+7=0$.

解：(1) 左右同时加上一次项系数一半的平方，得

$$x^2-2x+1=100,$$

左边三项配成一个完全平方式，得 $(x-1)^2=100$，

开平方，得 $x-1=10$　或　$x-1=-10$，

解得　$x_1=11, x_2=-9$；

(2) 将二次项系数化为 1，得　$x^2-3x+\frac{7}{4}=0$

移项，得　$x^2-3x=-\frac{7}{4}$

左右同时加上一次项系数一半的平方，得

$$x^2-3x+\frac{9}{4}=\frac{1}{2},$$

左边三项配成一个完全平方式，得

$$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{1}{2},$$

开平方，得　　$x-\frac{3}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$　或　$x-\frac{3}{2}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$,

解得　　$x_1=\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}, x_2=\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

下面用配方法来解一般形式的一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$.

将二次项系数化为1（因为 $a\neq 0$）　$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$,

移项，得　　$x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}$

配方，得　　$x^2+\frac{b}{a}x+(\frac{b}{2a})^2=-\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2$,

即　　$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$.

因为 $a\neq 0$，所以 $4a^2>0$，当 $b^2-4ac\geqslant 0$ 时，得

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}},$$

无论 a 正负，得　　$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

因此一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 的根是由方程的系数 a,b,c 确定的. 这样，在解一个一元二次方程的时候，先把它化简为一般形式，当 $b^2-4ac\geqslant 0$ 时，可以直接应用公式 $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ 求方程的根，这种方法叫做**求根公式法**.

例4　解下列关于 x 方程：

(1) $x^2-x-1=0$;　　(2) $2x(x+2)=11+2(3x-5)$;

(3) $(x-m)^2=1$;　　(4) $x^2-(a+1)x+a=0$.

解：(1)因为　$a=1, b=-1, c=-1$,

所以　$b^2-4ac=(-1)^2-4\times1\times(-1)=5>0$,

解得　$x=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\times1\times(-1)}}{2\times1}$,

即　　$x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$；

(2) $2x^2-2x-1=0$，

因为　　$a=2, b=-2, c=-1$，

所以　　$b^2-4ac=(-2)^2-4\times2\times(-1)=12>0$，

解得　　$x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4\times2\times(-1)}}{2\times2}$，

即　　$x=\frac{1\pm\sqrt{3}}{2}$；

(3) $x^2-2mx+m^2-1=0$；

因为　　$a=1, b=-2m, c=m^2-1$，

所以　　$b^2-4ac=(-2m)^2-4\times1\times(m^2-1)=4>0$，

解得　　$x=-\frac{(-2m)\pm\sqrt{(-2m)^2-4\times1\times(m^2-1)}}{2\times1}$，

即　　$x=m\pm1$.

(4)因为　$a=1, b=-(a+1), c=a$，

所以　　$b^2-4ac=(a+1)^2-4\times1\times a=(a-1)^2\geqslant0$，

$$x=\frac{-[-(a+1)]\pm\sqrt{(a+1)^2-4\times1\times a}}{2\times1},$$

$$x=\frac{a+1\pm(a-1)}{2},$$

解得　　$x_1=1, x_2=a$.

(2) *因式分解法*　解方程 $x^2=9$ 除了可以应用公式法外还可用因式分解法. 根据两数相乘为零,则其中至少一个因式为零这个原理. 可以通过因式分解,把一个一般形式的一元二次方程的左边进行因式分解,从而得到两个一元一次方程,达到降次的目的. 具体做法是：

移项　　$x^2-9=0$，

因式分解　　$(x+3)(x-3)=0$.

两个因式的积为 0,那么这两个因式中至少有一个为 0：

所以　　$x+3=0$　或　$x-3=0$，

解得　　$x_1=-3, x_2=3$.

这种解一元二次方程的方法就叫做**因式分解法**.

例 5　解方程：

(1) $x^2+3x-4=0$；　　(2) $(2x-1)(x+3)=4$.

解：(1) $(x+4)(x-1)=0$，

解得　$x_1=-4, x_2=1$；

(2) $2x^2+5x-7=0$，

$(2x+7)(x-1)=0$，

$2x+7=0$　或　$x-1=0$，

解得　$x_1=-\dfrac{7}{2}, x_2=1$.

例6　解关于 x 的方程：

(1) $ax^2+bx=0(a\neq0)$；　　(2) $ax^2-c=0(a,c>0)$.

解：(1) $x(ax+b)=0$，

因为　$a\neq0$，

解得　$x_1=0, x_2=-\dfrac{b}{a}$；

(2) $ax^2=c$，

因为　$a,c>0$，

解得　$x^2=\dfrac{c}{a}$，

即　$x=\pm\dfrac{\sqrt{ac}}{a}$.

例7　选择适当的方法解下列方程：

(1) $4(2x-3)^2=9(x-4)^2$；　　(2) $x^2+3=2\sqrt{3}x$；

(3) $(x-2)^2=(x-2)$；　　(4) $x^2-a(3x-2a+b)=b^2$.

解：(1) 直接开平方法：

$$2(2x-3)=\pm3(x-4),$$

即　$2(2x-3)=3(x-4)$　**或**　$2(2x-3)=-3(x-4)$，

解得　$$x_1=-6 \text{ 或 } x_2=\frac{18}{7}$$

(2)配方法：

$x^2-2\sqrt{3}x+3=0$，

$(x-\sqrt{3})^2=0$，

解得　$$x_1=x_2=\sqrt{3}.$$

(3)因式分解法：

$(x-2)^2-(x-2)=0$，

$(x-2)(x-2-1)=0$，

$(x-2)(x-3)=0,$

解得 $x_1=2, x_2=3;$

(4) 因式分解法:

$x^2-3ax+(2a^2-ab-b^2)=0,$

$x^2-3ax+(2a+b)(a-b)=0,$

$[x-(2a+b)][x-(a-b)]=0,$

解得 $x_1=2a+b, x_2=a-b.$

例 8 解方程 $x^4-10x^2+9=0.$

解: $(x^2-1)(x^2-9)=0,$

$(x+1)(x-1)(x+3)(x-3)=0,$

解得 $x_1=-1, x_2=1, x_3=-3, x_4=3.$

在解一元二次方程时,要注意观察方程的特点,合理选择适当的方法,一般地说直接开平方法和因式分解法适用于一些特殊形式的方程. 直接开平方法适用于解 $(x+m)^2=k,(k\geqslant 0)$ 型的方程,而因式分解法适用于化简为一般形式后左边能够因式分解的一元二次方程. 这两种解法可以加快解题速度,提高准确度. 配方法和求根公式法适用于一般形式的一元二次方程. 求根公式法是通法,必须熟练运用.

2. 一元二次方程根的判别式

在一元二次方程的求根公式的推导过程中配方后得 $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$,然后再开方,因此一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 是否有实数根取决于 b^2-4ac 的符号. 若 $b^2-4ac>0$,则方程有两个不相等实数根;若 $b^2-4ac=0$,则方程有两个相等实数根;若 $b^2-4ac<0$,则方程没有实数根(因为正数有两个平方根;零的平方根是零;负数没有平方根). 反过来亦成立. 因此,我们就把 b^2-4ac 叫做一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 的**根的判别式**,通常用"Δ"来表示,即 $\Delta=b^2-4ac$,"Δ"读作"delta". 即一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 中,$\Delta>0\Leftrightarrow$ 方程有两个不相等实数根;$\Delta=0\Leftrightarrow$ 方程有两个相等实数根;$\Delta<0\Leftrightarrow$ 方程没有实数根.

例 9 不解方程,判别下列方程根的情况:

(1) $(x+1)(x-2)=5x-2;$

(2) $x^2+9=6x;$

(3) $x^2+1=0.$

解:(1) 整理得 $x^2-6x=0,$

因为　$\Delta=6^2-4\times1\times0>0$，

所以　原方程有两个不相等的实数根；

(2) 原式移项得　$x^2-6x+9=0$，

因为　$\Delta=6^2-4\times1\times9=0$，

所以　原方程有两个相等的实数根；

(3) 因为　$\Delta=0^2-4\times1\times1<0$，

所以　原方程没有实数根.

例 10　a 为何值时，方程 $a^2x^2+(2a-1)x+1=0$ 有两个实数根.

解:因为　方程 $a^2x^2+(2a-1)x+1=0$ 有两个实数根，所以 $a\neq0$，

且　　$\Delta=(2a-1)^2-4a^2\geqslant0$，

解得　$-4a+1\geqslant0$，

$$a\leqslant\frac{1}{4},$$

答:当 $a\leqslant\frac{1}{4}$，且 $a\neq0$ 时，原方程有两个实数根.

一元二次方程有两个实数根是指有两个相等实数根或者两个不相等的实数根，即 $\Delta\geqslant0$；反之亦成立.

3. 一元二次方程根与系数的关系

一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 中，若 $\Delta\geqslant0$，则两个实数根为：

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

即

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

所以

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a},\quad x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}.$$

我们把这两个式子称为**一元二次方程根与系数关系**，应用它们的前提是一元二次方程中 $\Delta\geqslant0$，即有两个实数根.

例 11　利用根与系数关系求 $x^2-6x+4=0$ 的两根的平方和、倒数和及 $|x_1-x_2|$ 的值.

解:因为　$\Delta=20>0$，

设方程的两个根为 x_1,x_2，

所以　$x_1+x_2=6$，　$x_1\cdot x_2=4$，

$$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1\cdot x_2=28,$$

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1\cdot x_2}=\frac{3}{2},$$

$$|x_1-x_2|=\left|\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}-\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right|=\left|\frac{2\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right|$$

$$=\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{|a|}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}.$$

例 12　已知方程 $2x^2+mx+3=0$ 的一个根是$\frac{1}{2}$，求另一个根及 m 的值.

分析：可以用含有另一个根和 m 的代数式表示出两根和与两根积，从而得到所求的值；也可以把$\frac{1}{2}$代入方程确定系数 m 的值，再求另一个根.

解法一：设另一个根为 x_0，

$$\begin{cases}\frac{1}{2}+x_0=-\frac{m}{2}\\ \frac{1}{2}x_0=\frac{3}{2},\end{cases}$$

解得　$x_0=3$，$m=-7$，

即　$m=-7$，另一个根为 3；

解法二：把 $x=\frac{1}{2}$代入原方程，得 $m=-7$，

则原方程为 $2x^2-7x+3=0$，

解得另一个根为 3.

即　$m=-7$，另一根为 3.

4. 一元二次方程的应用

本章开始提出的问题，是一道典型的应用题，通过设未知数、列方程、解方程 $x^2+5x=150$ 后，得 $x_1=10$，$x_2=-15$，但我们知道实际问题中的宽不能是负数，因此只能取 $x=10$，即长方形的宽应是 10 cm. 这就说明在应用一元二次方程解应用题的过程中要通过实际意义进行取舍.

例 13　有一面积为 150 m² 的长方形鸡场，鸡场的一边靠墙（墙长 18 m），另三边用竹篱笆围成，如果竹篱笆的长为 35 m，求鸡场的长与宽各为多少.

分析：若设鸡场与墙平行的边长为 x m，这样可以通过竹篱笆的长表示出长方形的另一边长为$\frac{35-x}{2}$ m，从而通过面积找等量关系，即鸡场的与墙平行的边长×长方形的另一边长＝长方形的面积.

解:设鸡场的与墙平行的边长为 x m,则另一边为$\frac{35-x}{2}$ m.

由题意,得

$$x\cdot\frac{35-x}{2}=150,$$

$$x_1=15,x_2=20,$$

因为　墙长 18 m,

所以　$x_2=20$ 不满足题意,舍去,

所以　$x=15,\frac{35-x}{2}=10.$

答:鸡场的长与宽分别为 15 m,10 m.

例 14　制造某种产品,原来每件的成本是 350 元,由于连续两次降低成本,现在的成本是 224 元.如果每次降低的成本的百分数相同,则每次降低成本的百分数是多少?

分析:若每次降低成本的百分数为 x,则第一次降低成本后的成本是 $350(1-x)$;第二次降低成本后的成本是 $350(1-x)^2$.从而通过第二次降低成本后的成本找等量关系.

解:设每次降低成本的百分数为 x,则

$$350(1-x)^2=224,$$

解得　$x_1=0.2,x_2=1.8.$

由实际意义可知:$x=1.8$(舍),所以 $x=0.2=20\%$.

答:每次降低成本的百分数为 20%.

例 15　两个连续整数的积为 132,求这两个数.

解:设两个整数中较小的为 x,另一个整数为 $x+1$,则

$$x(x+1)=132,$$

$$x^2+x-132=0,$$

解得　$x_1=11,x_2=-12.$

答:这两个数为 11,12 或 $-12,-11$.

练　习　一

1. 指出下列方程中,哪些是一元二次方程?

(1) $x^2-3=3x(2x-4)$;　　(2) $-2x^2=0$;

(3) $(x+1)(3x+2)=3x(x-4)$;　　(4) $x^2=xy$.

2. 在第一题的一元二次方程中,分别指出它们的二次项系数、一次项系数和常数项.