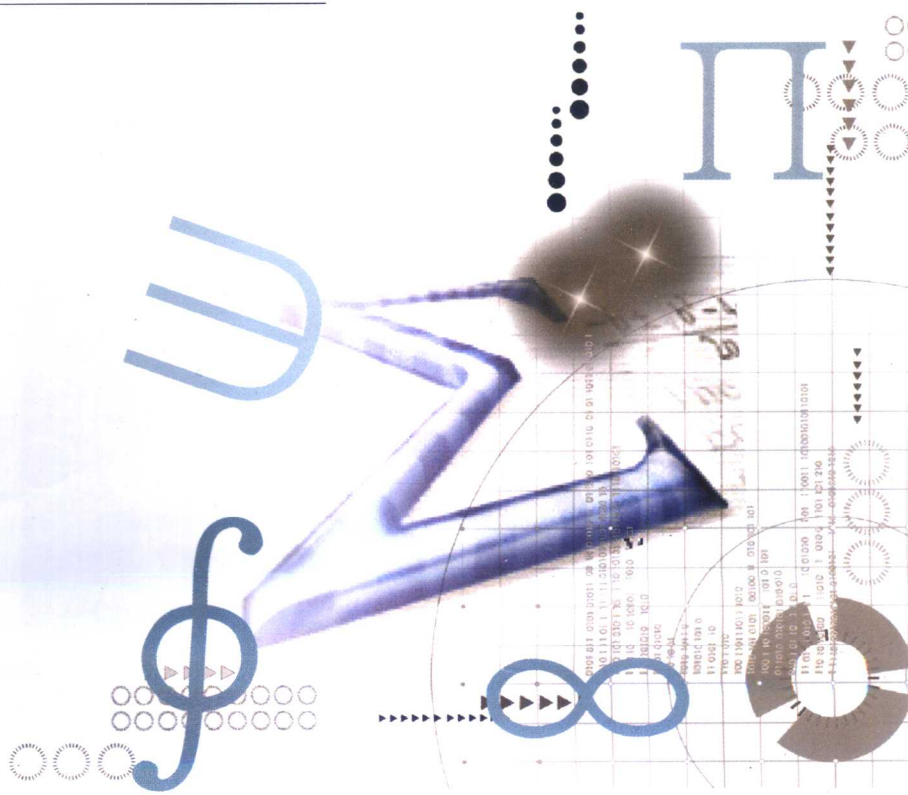


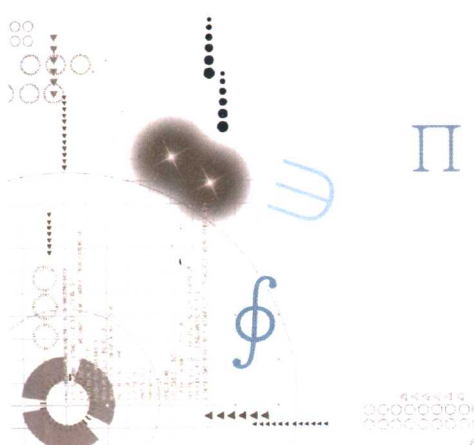
21 世纪普通高等教育规划教材



# 高等数学

GAODENG SHUXUE

主编 ○ 陆宜清



郑州大学出版社

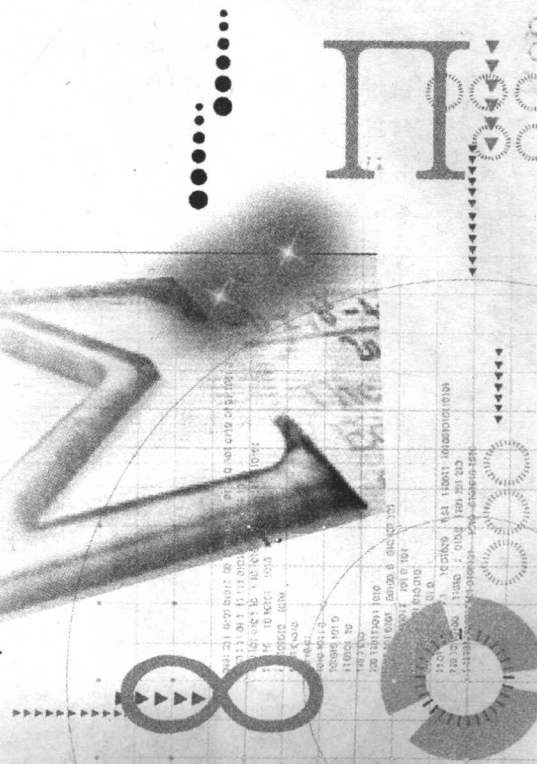
21 世纪普通高等教育规划教材

# 高等数学

GAODENG SHUXUE

主编 ○ 陆宜清

郑州大学出版社



**图书在版编目(CIP)数据**

高等数学/陆宜清主编. — 郑州: 郑州大学出版社,  
2007. 8

ISBN 978 - 7 - 81106 - 607 - 4

I. 高… II. 陆… III. 高等数学 - 高等学校 - 教材  
IV. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2007) 第 133664 号

郑州大学出版社出版发行

郑州市大学路 40 号

出版人: 邓世平

全国新华书店经销

河南博雅彩印有限公司印制

开本: 787 mm × 1 092 mm

印张: 25

字数: 592 千字

版次: 2007 年 8 月第 1 版

邮政编码: 450052

发行部电话: 0371 - 66966070

1/16

印次: 2007 年 8 月第 1 次印刷

---

书号: ISBN 978 - 7 - 81106 - 607 - 4

定价: 37.50 元

本书如有印装质量问题, 请向本社调换

## 《高等数学》编写委员会

主 编 陆宜清

副主编 黄宝贞 林大志

张 慧 徐香勤

编 者 陆宜清 黄宝贞 林大志

周世国 张 慧 徐香勤

李 镇 张思胜 薛春明

张小勇 张学凌 苗晓红

万志超

## 内 容 提 要

本教材是河南省教育科学“十一五”规划课题“农林专科高等数学精品课程的建设与实践”的研究成果,是根据高等农林专科《高等数学课程教学基本要求》,由郑州牧业工程高等专科学校组织编写的精品课程教材。全书共分十章,主要内容有函数极限与连续、导数与微分、中值定理与导数的应用、不定积分、定积分、定积分的应用、常微分方程、多元函数微分学、重积分、无穷级数,书末还附有积分表、习题答案与提示。

本书尽力把教学改革精神体现在教材中,注重课程对学生的素质与能力的培养。书中加强对数学概念与理论从实际问题的引入和从几何与数值方面的分析,并增加了应用实例和习题;加强计算机对教学的辅助作用,结合教学内容充分运用了数学软件,每章后均有“演示与实验”;注意“简易性”,尽量做到通俗易懂,由浅入深,富于启发,便于自学。

本书可以作为高等农林专科、高等职业教育、成人教育以及其他学时较少的工科类、经济类专业的高等数学课程教材,也可作为教师及技术人员用书或参考书。

# 序

微积分的发现是人类智慧最伟大的成就之一,微积分蕴藏着丰富的理性思维和处理连续变量的方法。以微积分为主体内容的《高等数学》课程是大学中最重要的基础课程之一。它不仅为后继课程和今后的工作提供必备的数学工具,而且对学生科学素养的形成和分析解决问题能力的提高产生重要的影响。如何精选和合理处理教学内容,如何通过数学知识做为载体来提高学生的数学素养,如何加强数学应用能力的训练都是近年来本门课程教学改革的重要内容。由于我们国家地域辽阔,学校类型很多,编写适合自己情况而又有特色的教材是一件有意义的工作。

郑州牧业工程高等专科学校的《高等数学》课程是该校的精品课程。以课程主持人陆宜清教授为首的一些资深教师,在认真学习兄弟院校高等数学课程教学改革的经验、分析研究大量国内外教材的基础上,编写了自己的《高等数学》教材。该教材已应用了多年,经反复修改,现由郑州大学出版社出版,这是一件值得庆贺的大好事情。

本教材定位在“加强基础,突出应用”的平台上,在基本维护系统性与连贯性的原则上,对内容体系做了适当调整,以适宜高职高专学校的使用。本教材突出的特点是在加强应用能力的培养上下了工夫,增加了不少实用的数学方法和颇为有趣的应用实例和习题。其次,本教材教学内容与数学软件密切配合,在每章之后均附有“演示与实验”,恰当使用会使课程增色。另外,与传统教材相比,不少地方的面貌有了较大的变化。对于数学概念和理论,尽量从实际问题引入并从几何与数值方面进行分析。对于定理的推导尽可能简捷,对于计算着重于方法和规律的介绍。

本教材立足于学校的特点,专业的需要,合理地组织安排教学内容,力求恰当地处理传授知识与素质教育的关系。

本教材是一本有特色的很好的高等数学教材。

郑州大学数学系 李梦如

2007.3.22

# 前 言

微积分是近代数学最伟大的成就。由于它在各个领域的广泛应用,以微积分为主要内容的高等数学成为大学中最重要的基础课程之一。它不仅为后续课程和科技工作提供了必备的数学工具,而且对学生科学素质的形成和分析解决问题能力的培养产生了重要而深远的影响。但是多年来在高等数学教学中,存在着偏向向学生传授微积分的概念、理论、运算规则和技巧,忽略微积分的数学思想、方法及其与实际紧密联系的现象,不够注重该课程在学生的素质与能力的培养方面的积极作用。

进入 21 世纪,教学内容和课程体系的改革在全国更加深入地开展。一些思路比较新颖且包含有“数学实验”的新教材陆续出现,对教学改革起到了积极的推动作用。在郑州牧业工程高等专科学校数学教师多年教学改革实践的基础上,我们查阅了国内外一批教材和资料,参照全国高等农林专科《高等数学课程教学基本要求》,经过反复研讨,编写了这本教材。我们尽力把改革设想和思路体现在教材中。本教材有以下特点:

1. 从实际问题出发,引入数学概念和理论,让学生体会到微积分来源于实际,又能指导实际。在教材中我们尽量从不同方面给出实际例子并加入简单的数学模型,让学生初步体会到微积分与现实世界中的客观现象有密切联系;在习题中也适当加大应用问题的比例,以便学生能尝试利用所学微积分知识来分析和解决一些简单的实际问题。

2. 合理调整和安排教材中的概念与理论、方法与技巧和应用与实践这三部分内容,加强从几何和数值方面对数学概念的分析,从多方面培养学生的理性思维;增加用表格和图形表示的函数及其运算的介绍,注意克服偏重分析运算和运算技巧的倾向;加强实践环节,重视应用能力的培养。

3. 随着计算机技术的发展,数学教学从传统的自然科学传授走进了与计算机技术相结合的教学过程。本教材引入 Mathematica 教学软件,以发挥辅助教学的作用。在每一章后附有“演示与实验”,一方面通过数学软件的直观演示加深学生对一些重要概念和定理的理解,另一方面让学生学习使用数学软件进行各种运算、绘制图形,培养学生的动手能力,使学生有机会尝试利用数学知识和计算机解决实际问题。

4. 本教材注意“简易性”,尽量做到通俗易懂,由浅入深,富于启发,便于自学。

总之,本教材力求恰当地处理归纳与演绎、数学的发现与知识的传授,加强理论分析与实际应用能力的培养之间的关系,以提高学生的综合分析能力和创新能力。

本教材内容覆盖面比较广,教师可根据不同专业特点进行取舍。课内教学需 100 ~ 120 学时,建议可在课外再安排 20 ~ 30 学时上机实验。另外,加“\*”部分为选学内容。

本教材由郑州牧业工程高等专科学校陆宜清任主编,黄宝贞、林大志、张慧、徐香勤任副主编。参加本书编写的还有郑州牧专的张思胜、薛春明,郑州大学数学系周世国、李镇,

解放军信息工程大学电子技术学院张小勇、郑州经济管理干部学院张学凌、河南省会计学校苗晓红、漯河医学高等专科学校万志超等同志。这些编写者都在高校任教多年,有着丰富的教学经验,也是郑州牧业工程高等专科学校所承担的全国高等学校教学研究中心“21世纪农林类数理化基础课程的创新与实践”课题子课题、河南省教育科学“十一五”规划课题“农林专科高等数学精品课程的建设与实践”的主要成员。本书内容既汇聚了编者的教学经验,也吸收了该课题的研究成果。

在本书的编写和出版过程中,得到了有关学校的领导和相关专家的大力支持和帮助,以及郑州大学出版社有关同志的热心帮助和指导,尤其是国家级名师郑州大学数学系李梦如教授在百忙之中为本书作了序,在此一并表示诚挚的谢意!

限于编者水平,教材中难免存在不妥之处,恳请广大读者批评指正。

编者

2007年3月



# 目 录

<b>第一章 函数、极限与连续</b> .....	(1)
<b>第一节 函数</b> .....	(1)
一、集合、区间与邻域 .....	(1)
二、函数的概念 .....	(4)
三、函数的几种特性 .....	(6)
四、反函数 .....	(8)
<b>第二节 初等函数</b> .....	(10)
一、基本初等函数 .....	(10)
二、复合函数、初等函数 .....	(14)
三、建立函数关系 .....	(14)
<b>第三节 数列的极限</b> .....	(16)
一、数列的概念 .....	(16)
二、数列极限的概念 .....	(17)
三、收敛数列的性质 .....	(20)
<b>第四节 函数的极限</b> .....	(20)
一、当 $x \rightarrow \infty$ 时函数 $y = f(x)$ 的极限 .....	(21)
二、当 $x \rightarrow x_0$ 时函数 $y = f(x)$ 的极限 .....	(22)
三、函数极限的性质 .....	(24)
<b>第五节 极限运算法则</b> .....	(25)
<b>第六节 极限存在准则 两个重要极限</b> .....	(27)
一、极限存在准则 .....	(28)
二、两个重要极限 .....	(28)
<b>第七节 无穷小与无穷大</b> .....	(30)
一、无穷小 .....	(30)
二、无穷大 .....	(31)
三、无穷小的比较 .....	(32)
<b>第八节 函数的连续性与间断点</b> .....	(33)
一、函数的连续性 .....	(33)
二、函数的间断点 .....	(36)

三、闭区间上连续函数的性质 .....	(38)
* 第九节 演示与实验 .....	(40)
一、数学软件 Mathematica 使用简介 .....	(40)
二、用 Mathematica 作二维图形 .....	(44)
三、曲线拟合 .....	(45)
四、用数值与图形方式演示数列极限过程 .....	(46)
五、用 Mathematica 内建函数求函数极限 .....	(46)
六、用两分法求方程在某个区间的根 .....	(47)
复习题一 .....	(48)
<b>第二章 导数与微分</b> .....	(50)
<b>第一节 导数的概念</b> .....	(50)
一、两个引例 .....	(50)
二、导数的概念 .....	(52)
三、导数的几何意义 .....	(54)
四、可导与连续的关系 .....	(55)
<b>第二节 函数的求导法则</b> .....	(56)
一、导数的四则运算 .....	(57)
二、反函数的导数 .....	(59)
三、复合函数的求导法则 .....	(60)
<b>第三节 隐函数的导数 对数求导法 参数方程的求导</b> .....	(63)
一、隐函数的导数 .....	(63)
二、对数求导法 .....	(63)
三、参数方程确定的函数的导数 .....	(64)
四、基本初等函数的导数公式 .....	(65)
<b>第四节 高阶导数</b> .....	(66)
<b>第五节 函数的微分</b> .....	(69)
一、微分的概念 .....	(69)
二、微分与导数的关系 .....	(70)
三、微分的几何意义 .....	(71)
四、微分公式与运算法则 .....	(71)
五、微分在近似计算中的应用 .....	(73)
* 第六节 演示与实验 .....	(74)
一、导数的定义 .....	(74)
二、利用 Mathematica 求函数的导数 .....	(75)
三、用微分方法进行数学建模 .....	(75)
复习题二 .....	(78)
<b>第三章 中值定理与导数的应用</b> .....	(80)

第一节 中值定理	(80)
一、罗尔中值定理	(80)
二、拉格朗日中值定理	(82)
三、柯西中值定理	(84)
第二节 洛必达法则	(85)
一、 $\frac{0}{0}$ 型未定式的极限求法	(85)
二、 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式的极限求法	(87)
第三节 泰勒公式	(89)
第四节 函数单调性的判定	(92)
第五节 函数的极值及其求法	(94)
第六节 最大值、最小值问题	(97)
第七节 曲线的凹凸与拐点	(100)
第八节 函数图形的描绘	(103)
一、渐近线	(103)
二、函数图形的描绘	(104)
*第九节 曲率	(106)
一、弧微分	(106)
二、曲率及其计算公式	(107)
三、曲率圆与曲率半径	(109)
*第十节 导数在经济学中的应用	(110)
一、边际与边际分析	(110)
二、弹性与弹性分析	(112)
*第十一节 演示与实验	(115)
一、拉格朗日中值定理演示	(115)
二、利用导数对函数单调性、凹凸性和渐近线的分析	(116)
三、局部极值命令介绍	(118)
复习题三	(119)
第四章 不定积分	(121)
第一节 不定积分的概念与性质	(121)
一、原函数与不定积分的概念	(121)
二、基本积分表	(123)
三、不定积分的性质	(124)
第二节 换元积分法	(127)
一、第一类换元法	(128)
二、第二类换元法	(132)

第三节 分部积分法 .....	(137)
第四节 几种特殊类型函数的积分 .....	(141)
一、有理函数的积分 .....	(141)
二、三角函数有理式的积分 .....	(143)
三、简单无理函数的积分 .....	(144)
* 第五节 积分表的使用 .....	(146)
* 第六节 演示与实验 .....	(149)
复习题四 .....	(150)
<b>第五章 定积分</b> .....	(151)
第一节 定积分的概念与性质 .....	(151)
一、两个引例 .....	(151)
二、定积分的定义 .....	(153)
三、定积分的几何意义 .....	(155)
四、定积分的性质 .....	(155)
第二节 微积分的基本公式 .....	(158)
一、变上限定积分 .....	(158)
二、微积分的基本公式 .....	(160)
第三节 定积分的换元积分法和分部积分法 .....	(163)
一、定积分的换元积分法 .....	(163)
二、定积分的分部积分法 .....	(165)
第四节 广义积分 .....	(168)
一、无穷区间上的广义积分 .....	(168)
二、无界函数的广义积分 .....	(170)
* 第五节 演示与实验 .....	(172)
一、定积分的定义 .....	(172)
二、微积分第一基本定理 .....	(173)
三、用 Mathematica 计算定积分 .....	(175)
复习题五 .....	(176)
<b>第六章 定积分的应用</b> .....	(177)
第一节 平面图形的面积 .....	(177)
一、元素法 .....	(177)
二、平面图形面积 .....	(178)
第二节 体积 .....	(183)
一、平行截面面积为已知的立体体积 .....	(183)
二、旋转体的体积 .....	(185)
第三节 平面曲线的弧长 .....	(190)

第四节 旋转曲面的表面积	(192)
* 第五节 物理上的应用	(194)
一、功	(194)
二、液体的静压力	(198)
* 第六节 其他应用举例	(200)
一、由边际函数求原函数	(200)
二、收入流和支出流的现值与将来值	(202)
三、消费者剩余和生产者剩余	(204)
* 第七节 演示与实验	(206)
一、近似计算旋转体体积	(206)
二、利用数学软件求解实际问题	(207)
复习题六	(208)
<b>第七章 常微分方程</b>	(210)
第一节 微分方程的基本概念	(210)
第二节 可分离变量的微分方程	(213)
一、可分离变量的微分方程	(213)
二、齐次方程	(215)
第三节 一阶线性微分方程	(218)
一、线性方程	(218)
二、伯努利方程	(221)
第四节 可降阶的高阶微分方程	(224)
一、 $y^{(n)} = f(x)$ 型的微分方程	(224)
二、 $y'' = f(x, y')$ 型的微分方程	(224)
三、 $y'' = f(y, y')$ 型的微分方程	(225)
第五节 二阶常系数齐次线性微分方程	(226)
一、二阶齐次线性微分方程的解的结构	(227)
二、二阶常系数齐次线性微分方程的解法	(228)
* 第六节 二阶常系数非齐次线性微分方程	(232)
一、二阶非齐次线性微分方程的解的结构	(232)
二、二阶常系数非齐次线性方程的解法	(233)
* 第七节 演示与实验	(236)
一、微分方程的符号解法	(236)
二、微分方程的数值解法	(237)
复习题七	(238)
<b>第八章 多元函数微分学</b>	(240)
第一节 空间解析几何简介	(240)

一、空间直角坐标系 .....	(240)
二、向量及其运算 .....	(242)
三、平面及其方程 .....	(247)
四、空间直线及其方程 .....	(248)
五、曲面及其方程 .....	(249)
六、二次曲面 .....	(250)
<b>第二节 多元函数的基本概念</b> .....	(252)
一、区域 .....	(252)
二、多元函数的概念 .....	(253)
三、二元函数的极限与连续 .....	(254)
<b>第三节 偏导数</b> .....	(256)
一、偏导数 .....	(256)
二、高阶偏导数 .....	(260)
<b>第四节 全微分及其应用</b> .....	(262)
一、全微分的定义 .....	(262)
二、全微分在近似计算中的应用 .....	(264)
<b>第五节 多元复合函数、隐函数的微分法及其几何应用</b> .....	(265)
一、复合函数的微分法 .....	(265)
二、隐函数的微分法 .....	(267)
三、多元函数微分法的几何应用 .....	(268)
<b>第六节 多元函数的极值及其求法</b> .....	(272)
一、多元函数的极值 .....	(272)
二、多元函数的最大值、最小值 .....	(274)
三、条件极值与拉格朗日乘法 .....	(275)
<b>*第七节 演示与实验</b> .....	(278)
一、向量及其运算 .....	(278)
二、空间曲面的绘制 .....	(279)
三、多元函数的偏导数和全微分的计算 .....	(282)
<b>复习题八</b> .....	(283)
<b>第九章 重积分</b> .....	(285)
<b>第一节 二重积分的概念与性质</b> .....	(285)
一、二重积分的概念 .....	(285)
二、二重积分的性质 .....	(287)
<b>第二节 二重积分的计算</b> .....	(288)
一、利用直角坐标计算二重积分 .....	(288)
二、利用极坐标计算二重积分 .....	(292)
<b>第三节 三重积分的概念及其计算</b> .....	(297)

一、三重积分的概念 .....	(297)
二、三重积分的计算 .....	(298)
* 第四节 重积分的应用 .....	(300)
一、曲面的面积 .....	(300)
二、平面薄片的重心 .....	(301)
三、转动惯量 .....	(303)
* 第五节 演示与实验 .....	(304)
一、二重积分 .....	(305)
二、三重积分 .....	(307)
复习题九 .....	(308)
<b>第十章 无穷级数</b> .....	(310)
第一节 常数项级数的概念与性质 .....	(310)
一、常数项级数的概念 .....	(310)
二、收敛级数的基本性质 .....	(312)
第二节 常数项级数的审敛法 .....	(315)
一、正项级数及其审敛法 .....	(315)
二、交错级数及其审敛法 .....	(318)
三、绝对收敛与条件收敛 .....	(319)
第三节 幂级数 .....	(320)
一、函数项级数的概念 .....	(320)
二、幂级数及其收敛性 .....	(321)
三、幂级数的计算 .....	(324)
第四节 函数展开成幂级数 .....	(326)
一、泰勒级数 .....	(326)
二、函数展开成幂级数 .....	(328)
* 第五节 傅里叶级数 .....	(332)
一、三角级数 三角函数系的正交性 .....	(332)
二、函数展开成傅里叶级数 .....	(333)
三、正弦级数和余弦级数 .....	(336)
四、周期为 $2l$ 的周期函数的傅里叶级数 .....	(339)
* 第六节 演示与实验 .....	(341)
一、函数展开成泰勒级数与级数求和 .....	(341)
二、傅里叶级数 .....	(342)
复习题十 .....	(346)
<b>附录 积分表</b> .....	(347)
<b>习题答案与提示</b> .....	(355)
第一章 .....	(355)

第二章 .....	(357)
第三章 .....	(359)
第四章 .....	(363)
第五章 .....	(368)
第六章 .....	(370)
第七章 .....	(372)
第八章 .....	(375)
第九章 .....	(378)
第十章 .....	(380)



# 第一章 函数、极限与连续

初等数学的研究对象主要是常量,而高等数学的研究对象主要是变量.变量之间的相互依赖关系,常可抽象为本书所说的函数关系.函数是将实际问题数学化的基本工具.而极限在数学中用以描述变量的变化趋势,是微积分坚实的理论基础.

本章我们将介绍函数、极限和函数的连续性的基本概念,极限的简单计算,以及它们的一些性质,这些知识是以后各章节的基础.

## 第一节 函 数

### 一、集合、区间与邻域

#### (一)集合的概念

集合是数学中的一个基本概念.所谓集合是指具有某种特定性质的事物的总体.组成这个集合的事物称为该集合的元素.如果事物  $a$  是集合  $A$  的元素,就说  $a$  属于  $A$ ,记作  $a \in A$ ;如果事物  $a$  不是集合  $A$  的元素,就说  $a$  不属于  $A$ ,记作  $a \notin A$ .

例1 用  $\mathbf{N}$  表示正整数集,则  $1 \in \mathbf{N}$ ,  $-1 \notin \mathbf{N}$ .

含有无穷多个元素的集合称为无限集;只含有有限个元素的集合称为有限集;不含任何元素的集合称为空集,空集用  $\emptyset$  表示.

例2 方程  $x^2 - 1 = 0$  的实数解集为有限集;方程  $x^2 + 1 = 0$  的实数解集为空集; $\mathbf{N}$  为无限集.

集合有两种表示方法.一种方法是将集合的元素一一列举在  $\{ \}$  内,称为列举法.例如

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\},$$

$$B = \{1, 3, 5, 7, \dots\}$$

都是用的列举法.另一种方法是利用元素的特性描述集合,记作

$$A = \{x \mid x \text{ 所具有的特性}\},$$

称为描述法.

例3 抛物线  $y = x^2$  上的所有点组成的集合可记作

$$A = \{(x, y) \mid y = x^2, x, y \text{ 为实数}\}.$$

以后用到的集合主要是数集,即元素都是数的集合.如果没有特别声明,以后提到的数都是实数.习惯上,用  $\mathbf{R}$  表示实数集,  $\mathbf{N}$  表示自然数集,  $\mathbf{Z}$  表示整数集,  $\mathbf{Q}$  表示有理数集.