高联考研

2008年 高联考研

数学

练习题集粹

概率论与数理统计篇

○编著 龚兆仁

国家行政学院出版社

2008 年高联考研

数学

练习题集粹

概率论与数理统计篇

编著　龚兆仁

国家行政学院出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学练习题集粹．概率论与数理统计篇/龚兆仁编著．北京:国家行政学院出版社,2007.6
ISBN 978-7-80140-599-9

Ⅰ．数… Ⅱ．龚… Ⅲ．①高等数学-研究生-入学考试-习题②概率论-研究生-入学考试-习题③数理统计-研究生-入学考试-习题 Ⅳ．013-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 094444 号

书　　名 数学练习题集粹·概率论与数理统计篇
作　　者 龚兆仁
责任编辑 李锦慧
出版发行 国家行政学院出版社
(北京市海淀区长春桥路 6 号　100089)
电　　话 (010)88517082
经　　销 新华书店
印　　刷 北京市朝阳印刷厂
版　　次 2007 年 7 月北京第 1 版
印　　次 2007 年 7 月北京第 1 次印刷
开　　本 787 毫米×1092 毫米　16 开
印　　张 9
字　　数 220 千字
书　　号 ISBN 978-7-80140-599-9/O·53
定　　价 12.80 元

前　言

本书是作者积累了十几年考研辅导的材料和经验,依据最新硕士研究生入学考试数学大纲编著而成。

作者经过多年精心研究与筛选,设计与编排了300余道典型练习题。为了帮助考生通过演练真正巩固学习成果,本书中不选已考试题。

本书具有以下鲜明特点:

1. 独创性与实用性。本书许多题属于作者原创,所总结的规律和方法是作者教学经验的结晶。书中讲授了许多新的解题方法、技巧,能让考生最大程度地提高解题速度和正确率。

2. 条理清楚、重点突出,技巧性强。本书针对“考纲”要求重点掌握的概念、公式、定理,均通过试题的形式予以强化,尤其是考生感到比较难理解和掌握的问题,按本书中所给的思路、方法去分析,问题会迎刃而解。

3. 针对性强,覆盖面广。书中试题涵盖了新大纲考查的所有知识点;还分析总结了一些在一般教材上并没有作为定理或结论出现,但在研究生入学考试中却可直接使用的内容。

4. 步骤清晰、解答详细,思路开阔。本书对每一道题都进行了详细的解答;有些题目还提供了多种解法,以便考生开阔解题思路,从而提高考生的应试水平。

本书中每一道题在知识点的涵盖和解题的方法技巧上都极具典型性;考生如果能把书中的题目加以研读、练习,能够更加全面系统地掌握所学知识,迅速提高综合解题能力,在考试中一定能取得好成绩。

在本书出版过程中,国家行政学院出版社的李锦慧作为本书的责任编辑,作了认真细致地工作,在此表示感谢。

本书在编写、编辑和出版过程中,尽管我们抱着对广大考生认真负责的精神,高质量、严要求,但由于时间紧、任务重,加上我们水平有限,难免有许多不足、不尽人意之处,敬请广大读者和专家同行不吝赐教、批评指正。

祝考生复习顺利,心想事成,考研成功!

龚兆仁

2007 年 7 月

目　录

上篇　概率论与数理统计练习题集粹

下篇　概率论与数理统计练习题详解

上　篇

概率论与数理统计练习题集粹

第一章　随机事件和概率

一、选择题

1. 现有一批电子元件,系统初始先由一个元件工作,当其损坏时立即更换一个新元件接替工作,如果用 X_i 表示第 i 个元件寿命,那么事件 A = "到时刻 T 为止,系统仅更换一个元件"可以表示为

(A)　$A = \{X_1 + X_2 > T\}$.　　(B)　$A = \{0 \leqslant X_1 < T, 0 \leqslant X_2 < T\}$.

(C)　$A = \{0 \leqslant X_1 < T, X_1 + X_2 < T\}$.　　(D)　$A = \{0 \leqslant X_1 < T, X_1 + X_2 > T\}$.

2. 将一均匀骰子随意投掷4次,记 A = "4次投掷最大点数为5". 下列有 A 的4个不同的表示:①A = "4次投掷点5至少出现一次";②A = "4次投掷点6都不出现";③A = "4次投掷点5至少出现一次且点6不出现";④A = "4次投掷最大点数不小于5" - "4次投掷最大点数为6". 其中有2个是与 A 等价的表示,它们是

(A)　①与②.　　(B)　②与③.　　(C)　③与④.　　(D)　④与①.

3. 设 A,B 为随机事件,则下列与 $A \supset B$ 不等价的是

(A)　$A \cup B = A$.　　(B)　$B - A = \varnothing$.

(C)　$A - B = \varnothing$.　　(D)　$AB = B$.

4. 假设 A,B,C 为随机事件,则下列结论正确的是

(A)　若 A 与 B 互不相容,B 与 C 互不相容,则 A 与 C 互不相容.

(B)　若 A 与 B 独立,B 与 C 独立,则 A 与 C 独立.

(C)　若 A 包含 B,B 包含 C,则 A 包含 C.

(D)　若 A 与 B 对立,B 与 C 对立,则 A 与 C 对立.

5. 设事件 A 与 B 满足条件 $AB = \overline{A}\,\overline{B}$,则

(A)　$A \cup B = \varnothing$.　　(B)　$A \cup B = \Omega$.

(C)　$A \cup B = A$.　　(D)　$A \cup B = B$.

6. 已知 A 与 B 是任意两个互不相容的事件,则下列结论正确的是

(A)　如果 $P(A) = 0$,则 $P(B) = 0$.　　(B)　如果 $P(A) = 0$,则 $P(B) = 1$.

(C)　如果 $P(A) = 1$,则 $P(B) = 0$.　　(D)　如果 $P(A) = 1$,则 $P(B) = 1$.

7. 已知事件 A 发生必导致 B 发生,且 $0 < P(B) < 1$,则 $P(A \mid \overline{B})$ 等于

(A)　0.　　(B)　$\frac{1}{4}$.　　(C)　$\frac{1}{2}$.　　(D)　1.

8. 已知随机事件 A 与 B 互不相容,$0 < P(A) < 1, 0 < P(B) < 1$,则

(A)　$P(A \cup \overline{B}) = P(A)$.　　(B)　$P(A - \overline{B}) = P(A)$.

(C)　$P(A\overline{B}) = P(A)$.　　(D)　$P(A \mid \overline{B}) = P(A)$.

9. 设 A,B 为事件,则下列与 $P(A) + P(B) = 1$ 不等价的是

(A)　$P(A \cup B) = P(\overline{A} \cup \overline{B})$.　　(B)　$P(A - B) = P(\overline{A} - \overline{B})$.

(C)　$P(AB) = P(\overline{A}\,\overline{B})$.　　(D)　$P(\overline{A} \mid B) = P(B \mid \overline{A})\,(P(B\overline{A}) > 0)$.

10. 已知事件 A 与 B 中只有 A 发生 B 不发生的概率与只有 B 发生 A 不发生的概率相等且不为零,又 $0 < P(A) < 1, 0 < P(B) < 1$,则下列等式不成立的是

(A)　$P(A - B) = P(B - A)$.　　(B)　$P(A \mid B) = P(B \mid A)$.

(C)　$P(A \mid \overline{B}) = P(B \mid \overline{A})$.　　(D)　$P(A \mid \overline{B}) = P(\overline{A} \mid B)$.

11. 设 A、B 为随机事件,则

(A) $P(A\cup B)\geqslant P(A)+P(B)$.

(B) $P(A-B)\geqslant P(A)-P(B)$.

(C) $P(AB)\geqslant P(A)P(B)$.

(D) $P(A\mid B)\geqslant \dfrac{P(A)}{P(B)}(P(B)>0)$.

12. 设 A、B 为随机事件，且 $P(A)>0$，则下列与 $P(B\mid A)=1$ 不等价的是

(A) $P(A-B)=0$.

(B) $P(A\cup B)=P(B)$.

(C) $P(AB)=P(A)$.

(D) $P(B)=1$.

13. 设 A、B 为任意随机事件，已知 $0<P(A)<1$，则

(A) 若 $A\subset B$，则 A、B 一定不独立.

(B) 若 $B\subset A$，则 A、B 一定不独立.

(C) 若 $AB=\varnothing$，则 A、B 一定不独立.

(D) 若 $A=\overline{B}$，则 A、B 一定不独立.

14. 设事件 A 与 B 独立，$0<P(A)<1,0<P(B)<1$，则下列结论不正确的是

(A) A 与 AB 一定不独立.

(B) A 与 $A\cup B$ 一定不独立.

(C) A 与 $A-B$ 一定不独立.

(D) A 与 $B-A$ 一定不独立.

15. 设 A,B 为随机事件，$0<P(A)<1,0<P(B)<1$，则 A 与 B 相互独立的充要条件是

(A) $P(A\mid B)+P(\overline{A}\mid B)=1$.

(B) $P(A\mid B)+P(A\mid \overline{B})=1$.

(C) $P(A\mid B)+P(\overline{A}\mid \overline{B})=1$.

(D) $P(A\mid \overline{B})+P(\overline{A}\mid \overline{B})=1$.

16. 将一枚硬币随意独立掷两次，记事件 $A=$“第一次掷出正面”，$B=$“第二次掷出反面”，$C=$“正面最多掷出一次”，则

(A) A、B、C 两两独立.

(B) A 与 BC 独立.

(C) B 与 AC 独立.

(D) C 与 AB 独立.

17. 已知随机变量 X 在 $(0,1)$ 上服从均匀分布，事件 $A=\left\{0<X<\dfrac{1}{2}\right\}$，$B=\left\{\dfrac{1}{4}<X<\dfrac{3}{4}\right\}$，则

(A) A 与 B 互不相容.

(B) B 包含 A.

(C) A 与 B 对立.

(D) A 与 B 独立.

18. 在区间 $(0,1)$ 上随意取出两个数 X 与 Y，记事件 $A=\{0<X<\dfrac{1}{2}\}$，则下列与 A 不相互独立的随机事件是

(A) $B_1=\{\dfrac{1}{4}<X<\dfrac{3}{4}\}$.

(B) $B_2=\{\dfrac{1}{2}<X<\dfrac{3}{4}\}$.

(C) $B_3=\{\dfrac{1}{4}<Y<\dfrac{3}{4}\}$.

(D) $B_4=\{\dfrac{1}{2}<Y<\dfrac{3}{4}\}$.

二、填空题

19. 设事件 A,B 和 $A+B$ 的概率分别为 0.2,0.3 和 0.4，则 $P(A\overline{B})=$ ________.

20. 已知 $P(A)=0.4,P(B\mid A)=0.5,P(A\mid B)=0.25$，则 $P(B)=$ ________.

21. 设事件 A、B 仅发生一个的概率为 0.3，且 $P(A)+P(B)=0.5$，则 A、B 至少有一个不发生的概率为________.

22. 已知 $P(A)=a,P(B)=b$，A 与 B 独立，如果 C 发生必然导致 A 与 B 同时发生，则 A、B、C 都不发生的概率为________.

23. 已知事件 A、B 仅有一个发生的概率为 $\dfrac{2}{5}$，A 与 B 同时发生的概率为 $\dfrac{1}{5}$，则 A 与 B 至少有一个发生的概率为________.

24. 设一个工人用同一台机器独立地加工出 3 个零件，第 k 个零件为不合格的概率是 $\dfrac{p}{k}(k=1,2,3)$，已知加工出的 3 个零件至少有一件是合格品的概率为 $\dfrac{11}{12}$，则 $p=$ ________.

25. 设二阶行列式的每一个元素均以$\frac{1}{2}$的概率取 0 或 1，各元素选取何值是相互独立的，则这个行列式的值为正数的概率 $p=$ ________.

26. 设 X,Y 为随机变量且 $P\{X\geqslant 0,Y\geqslant 0\}=\frac{3}{7}$，$P\{X\geqslant 0\}=P\{Y\geqslant 0\}=\frac{4}{7}$，$A=\{\max(X,Y)\geqslant 0\}$，$B=\{\max(X,Y)<0,\min(X,Y)<0\}$，$C=\{\max(X,Y)\geqslant 0,\min(X,Y)<0\}$，则 $P(A)=$ ________，$P(B)=$ ________，$P(C)=$ ________.

27. 设 30 件产品中有 3 件次品，现逐个检查，则查完 20 件产品正好查出 3 件次品的概率为________.

28. 从 n 阶行列式展开式中任取一项，已知此项不含第 1 行、第 1 列元素 a_{11} 的概率为$\frac{8}{9}$，那么此行列式的阶数 $n=$ ________.

29. 某种产品由自动生产线进行生产，一旦出现不合格品就立即对其进行调整，经过调整后生产出的产品为不合格品的概率是 0.1，则两次调整之间至少生产 3 件产品的概率为________.

30. 对同一目标接连进行 3 次独立重复射击，假设至少命中目标一次的概率为 7/8，则每次射击命中目标的概率 $p=$ ________.

31. 设事件 A 在每次试验中出现的概率为 p，则在 n 次独立重复试验中事件 A 最多只出现一次的概率 $\alpha=$ ________.

32. 已知每次试验只有三个结果：A、B、C，各个结果在每次试验中发生的概率都不变且分别为 $p=P(A)$，$q=P(B)$，$r=P(C)$，$p+q+r=1$，现独立重复进行一系列试验，则事件 A 发生在事件 B 发生之前的概率为________.

33. 已知甲袋中装有 4 个白球 1 个黑球，乙袋中装有 3 个白球 2 个黑球．从甲、乙两袋中各取出一球交换后放回袋中，称为一次交换，则经过一次交换甲袋白球数不变的概率为________；经过二次交换甲袋有 5 个白球的概率为________.

34. 已知 10 件产品中一等品 5 件，二等品 3 件，三等品 2 件，现从中逐个取出产品（取后不放回），则（Ⅰ）不连续取出 2 个三等品的概率 $\alpha=$ ________；（Ⅱ）取到三等品之前取到一等品的概率 $\beta=$ ________.

35. 已知 40 件产品中有 3 件次品，现从中随意取出两件产品，如果：
(1) 第一次取到次品的概率 p_1；第二次取到次品的概率 p_2；第二次才取到次品的概率为 p_3.
(2) 取出两件产品至少有件是次品的概率 p_4；
(3) 取出两件产品中至少有一件是次品，那么另一件也是次品的概率 p_5；
(4) 已知取出两件产品中第一件是次品，那么第二件也是次品的概率 p_6；
则 p_i 分别为________$(i=1,\cdots,6)$.

36. 将一枚硬币重复掷 5 次，则正、反面都至少出现二次的概率为________.

37. 将一硬币连续投掷 4 次，若记"正面出现 3 次"的概率为 p_1；"正面至少出现 3 次"的概率为 p_2；"正面恰好连续出现三次"的概率为 p_3；"正面至少连续出现 3 次"的概率为 p_4，则 $p_i=$ ________$(i=1,\cdots,4)$.

38. 做一系列独立试验，每次试验成功的概率都是 p．事件 $A=$"4 次失败在第 3 次成功之前"，$B=$"成功 10 次之前至多失败 2 次"，则 $P(A)=$ ________；$P(B)=$ ________．现进行 n 次重复试验，则在没有全部"失败"的条件下，"成功"不止一次的概率 $q=$ ________.

39. （Ⅰ）在区间 $(0,a)\ (a>0)$ 中随意取两个数，则"两数之积小于$\frac{a^2}{4}$"的概率为________；
（Ⅱ）分别在区间$(0,\frac{1}{2})$与$(\frac{1}{2},1)$中随意取出一数，则"两数之和不小于$\frac{5}{6}$"的概率为________.

三、解答题

40. 设事件 A,B,C 两两独立，且 $P(A)=P(B)=P(C)$.

(Ⅰ)若 A,B,C 至少有一个发生的概率为 $\frac{23}{25}$，A,B,C 至少有一个不发生的概率为 $\frac{14}{25}$，求 $P(A)$.

(Ⅱ)若 $P(ABC)=0$，通过计算 $P(A-B-C)$ 证明：$P(A)\leqslant\frac{1}{2}$.

41. 设 A,B,C 为随机事件，

(Ⅰ)求证：$P(A)\geqslant P(AB)+P(AC)-P(BC)$；

(Ⅱ)如果 $P(A)=x,P(B)=2x,P(C)=3x,P(AB)=P(BC)=y$，求证：$x\leqslant\frac{1}{4},y\leqslant\frac{1}{4}$.

(Ⅲ)求证：$P(AB)=P(\overline{A}\ \overline{B})$ 的充要条件是 $P(A)+P(B)=1$.

42. 设 A,B,C 为随机事件，$0<P(C)<1$，如果 $P(A\mid C)\geqslant P(B\mid C)$，$P(A\mid\overline{C})\geqslant P(B\mid\overline{C})$，求证：$P(A)\geqslant P(B)$.

43. 每次从数集 $\{1,2,3,4,5,6\}$ 中随意取出一个数(取后放回)，共取 2 个数. 记事件 A = "第一次取出的数为 2 或 5"，B = "取出 2 个数之和至少为 7"，C = "取出 2 个数最小数字为 2"，试计算 $P(A)$、$P(B)$、$P(C)$；并问 A 与 B 是否独立.

44. 从 5 双不同的鞋中任取 4 只，求这 4 只鞋中至少有两只能配成一双的概率.

45. 甲袋有 3 个白球 5 个黑球，乙袋有 4 个白球 5 个黑球，依据下面两种不同的随机试验：(Ⅰ)从甲、乙两袋中各取一球，交换后放回袋中；(Ⅱ)先从甲袋中取一球放入乙袋，再从乙袋中取一球放回甲袋. 试求甲袋白球数不变的概率.

46. 甲袋中有 3 个白球 2 个黑球，乙袋中有 4 个白球 4 个黑球，现从甲袋中任取 2 球放入乙球，再从乙袋中取一球，求取出球是白球的概率 p；如果已知从乙袋中取出的球是白球，求从甲袋中取出的球是一白一黑的概率 q.

47. 已知甲袋中有 2 个黑球，3 个白球，乙袋中有 1 个黑球，4 个白球，丙袋中有 3 个黑球，2 个白球，先从甲、乙两袋各取一球放入丙袋，求：(Ⅰ)丙袋中白球数 X 的取值及其相应的概率；(Ⅱ)从丙袋中任取一球是白球的概率.

48. 一批产品，每箱装 20 件，已知每箱不含次品的概率为 80%，含一件次品的概率为 20%，在购买时，随意选一箱，从中随意逐个选出产品进行检查，如果发现次品就退回，如果检查 2 个还未发现次品就买下. 试求：(Ⅰ)顾客买下该箱产品的概率 α；(Ⅱ)在顾客买下的一箱中，确实没有次品的概率 β.

49. 假设某自动生产线上产品的不合格品率为 0.02，试求：随意抽取的 30 件中，

(Ⅰ)不合格品不少于两件的概率 α；

(Ⅱ)在已经发现一件不合格品的条件下，不合格品不少于两件的概率 β.

50. 每箱产品有 10 件，其中次品数从 0 到 2 是等可能的，开箱检验时，从中任取一件，如果检验为次品，则认为该箱产品不合格而拒收. 由于检验误差，一件正品被误判为次品的概率为 2%，一件次品被误判为正品的概率为 10%. 求：(Ⅰ)检验一箱产品能通过验收的概率 p；(Ⅱ)检验 10 箱产品通过率不低于 90% 的概率 q.

51. 已知装有同种零件的产品两箱，第一箱内装 50 件产品，其中一等品 10 件；第二箱内装 30 件产品，其中一等品 18 件. 现从两箱中随意挑选一箱，试求：(Ⅰ)从中先后取出两件产品(取后不放回)，先取出产品是一等品的概率 p；已知先取出产品是一等品，那么第二次取出产品仍然是一等品的概率 q. (Ⅱ)从中任取一件产品，检查结果是一等品，现将其放回箱中，再从箱中任取一件产品，求它不是一等品的概率 r.

52. 工厂生产某种产品次品率为 10%，现随意从中任选一件产品进行检验，由于检验有误，一件正品被误判为次品的概率为 10%，一件次品被误判为正品的概率为 20%.

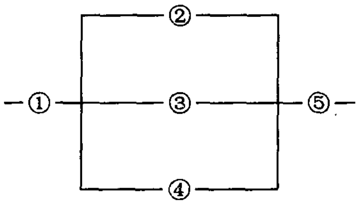
(Ⅰ)试求取出产品经检验被认定为正品的概率 α；

（Ⅱ）试求取出产品经检验为正品，该产品确实为正品的概率 β；

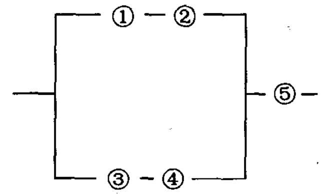
（Ⅲ）为慎重起见，对取出产品进行二次独立性检验，检验结果都认为是正品，试求该产品确实为正品的概率 r.

53. 一个系统是由 n 个元件组成，已知每个元件正常工作的概率为 $p(0 < p < 1)$，各元件是否正常工作是相互独立的，系统只有在半数以上元件正常工作时系统才能正常工作．问 p 取何值，3 个元件构成的系统比由 5 个元件构成的系统正常工作的概率更大.

54. 如果构成系统的第 i 个元件正常工作的概率为 $p_i(0 < p_i < 1)$，各个元件是否正常工作是相互独立的，试求下列系统正常工作的概率.



（系统一）



（系统二）

第二章　随机变量及其分布

一、选择题

1. 下列 p_n 能成为概率分布的是

(A) $p_n=\frac{1}{n}(n\geq 2)$.　　(B) $p_n=\frac{1}{n(n-1)}(n\geq 2)$.

(C) $p_n=\frac{1}{n^2}(n\geq 2)$.　　(D) $p_n=\frac{1}{n(n+1)}(n\geq 2)$.

2. 设随机变量 X 服从正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$，且满足 $P\{X<\sigma\}>P\{X>\sigma\}$，则比值 μ/σ

(A) 小于1.　　(B) 等于1.　　(C) 大于1.　　(D) 不确定.

3. 假设随机变量 X 的概率密度 $f(x)$ 是偶函数，分布函数为 $F(x)$，则

(A) $F(x)$ 是偶函数.　　(B) $F(x)$ 是奇函数.

(C) $F(x)+F(-x)=1$.　　(D) $2F(x)-F(-x)=1$.

4. 假设 $F(x)$ 是随机变量 X 的分布函数，则下列结论不正确的是

(A) 如果 $F(a)=0$，则对任意 $x\leq a$ 有 $F(x)=0$.

(B) 如果 $F(a)=1$，则对任意 $x\geq a$ 有 $F(x)=1$.

(C) 如果 $F(a)=\frac{1}{2}$，则 $P\{X\leq a\}=\frac{1}{2}$.

(D) 如果 $F(a)=\frac{1}{2}$，则 $P\{X\geq a\}=\frac{1}{2}$.

5. 假设随机变量 X_1,X_2 的分布函数、概率密度分别为 $F_1(x),F_2(x);f_1(x),f_2(x)$，如果 $a>0,b>0,c>0$，则下列结论中不正确的是

(A) $aF_1(x)+bF_2(x)$ 是某一随机变量分布函数的充要条件是 $a+b=1$.

(B) $cF_1(x)F_2(x)$ 是某一随机变量分布函数的充要条件是 $c=1$.

(C) $af_1(x)+bf_2(x)$ 是某一随机变量概率密度的充要条件是 $a+b=1$.

(D) $cf_1(x)f_2(x)$ 是某一随机变量概率密度的充要条件是 $c=1$.

6. 假设 X 是只可能取两个值的离散型随机变量，Y 是连续型随机变量，则随机变量 $X+Y$ 的分布函数

(A) 是连续函数.　　(B) 是阶梯函数.

(C) 恰有一个间断点.　　(D) 至少有二个间断点.

7. 设随机变量 X 服从正态分布 $N(1,\sigma^2)$，其分布函数为 $F(x)$，则对任意实数 x，有

(A) $F(x)+F(-x)=1$.　　(B) $F(1+x)+F(1-x)=1$.

(C) $F(x+1)+F(x-1)=1$.　　(D) $F(1-x)+F(x-1)=1$.

8. 假设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)$，密度函数 $f(x)$ 是 x 的连续函数. 如果 X 与 $-X$ 有相同的分布函数，则

(A) $F(x)=F(-x)$.　　(B) $F(x)=-F(-x)$.

(C) $f(x)=f(-x)$.　　(D) $f(x)=-f(-x)$.

9. 假设随机变量 X 与 Y 具有相同的分布函数 $F(x)$，$Z=X+Y$ 的分布函数为 $G(z)$，则对任意实数 x，有

(A) $G(2x)>2F(x)$.　　(B) $G(2x)=2F(x)$.

(C) $G(2x)\leq 2F(x)$.　　(D) 以上结论都不对.

10. 已知离散型随机变量 X_i 分别服从参数为 $p_i(i=1,2)$ 的0-1分布，其分布函数分别为 $F_1(x),F_2(x)$，则对任意 $x\in R$

(A) 当 $p_1 < p_2$ 时,$F_1(x) \leqslant F_2(x)$.　　(B) 当 $p_1 > p_2$ 时,$F_1(x) \leqslant F_2(x)$.

(C) 当 $p_1 = p_2$ 时,$F_1(x) < F_2(x)$.　　(D) 当 $p_1 = p_2$ 时,$F_1(x) > F_2(x)$.

11. 已知随机变量 X 的密度函数为 $f(x) = \begin{cases} Ae^{-x}, & x > \lambda, \\ 0, & x \leqslant \lambda \end{cases}$ $(\lambda > 0)$,则概率 $P\{\lambda < X < \lambda + a\}$ $(a > 0)$ 的值

(A) 与 a 无关随 λ 的增大而增大.　　(B) 与 a 无关随 λ 的增大而减小.

(C) 与 λ 无关随 a 的增大而增大.　　(D) 与 λ 无关随 a 的增大而减小.

12. 假设一个设备在任何长为 t 的时间内发生故障次数 $N(t)$ 服从参数为 λt 的泊松分布($\lambda > 0$),T 表示相继两次故障之时间间隔,则对任意 $t > 0$,概率 $P\{T > t\}$ 等于

(A) 0.　　(B) λt.　　(C) $e^{-\lambda t}$.　　(D) $1 - e^{-\lambda t}$.

13. 设随机变量 X 与 Y 相互独立且都服从标准正态分布 $N(0,1)$,则

(A) $P\{X + Y \geqslant 0\} = \dfrac{1}{4}$.　　(B) $P\{X - Y \geqslant 0\} = \dfrac{1}{4}$.

(C) $P\{\max(X,Y) \geqslant 0\} = \dfrac{1}{4}$.　　(D) $P\{\min(X,Y) \geqslant 0\} = \dfrac{1}{4}$.

二、填空题

14. (Ⅰ) 设随机变量 X 的分布函数 $F(x) = \begin{cases} 0, & x < -1, \\ \dfrac{1}{8}, & x = -1, \\ ax + b, & -1 < x < 1, \\ 1, & x \geqslant 1, \end{cases}$ 且 $P\{X = 1\} = \dfrac{1}{4}$,

则 $a =$ ________;$b =$ ________.

(Ⅱ) 假设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)$,已知 $F(0) = \dfrac{1}{8}$,且密度函数 $f(x) = af_1(x) + bf_2(x)$,其中 $f_1(x)$ 是正态分布 $N(0,\sigma^2)$ 的密度函数,$f_2(x)$ 是参数为 λ 的指数分布的密度函数,则 $a =$ ________;$b =$ ________.

15. 假设 X 是在区间(0,1)内取值的连续型随机变量,而 $Y = 1 - X$. 已知 $P\{X \leqslant 0.29\} = 0.75$,则满足 $P\{Y \leqslant k\} = 0.25$ 的常数 $k =$ ________.

16. (Ⅰ) 设 $f(x) = ke^{-|x|}$ $(-\infty < x < +\infty)$ 是一概率密度,则 $k =$ ________.

(Ⅱ) 设 $f(x) = ke^{-x^2+2x-3}$ $(-\infty < x < +\infty)$ 是一概率密度,则 $k =$ ________.

17. (Ⅰ) 设 X 的概率密度 $f(x) = \begin{cases} 4x^3, & 0 < x < 1, \\ 0, & 其他, \end{cases}$ 若常数 a,使得 $P\{X > a\} = P\{X < a\}$,则 $a =$ ________.

(Ⅱ) 设随机变量 X 的密度函数 $f(x) = \begin{cases} Ax, & 1 < x < 2, \\ B, & 2 \leqslant x < 3, \\ 0, & 其他, \end{cases}$ 且 $P\{1 < X < 2\} = P\{2 < X < 3\}$,则常数 $A =$ ________;$B =$ ________;概率 $P\{2 < X < 4\} =$ ________;分布函数 $F(x) =$ ________;

(Ⅲ) 设 X 服从参数为 λ 的泊松分布,$P\{X = 1\} = P\{X = 2\}$,则概率 $P\{0 < X^2 < 3\} =$ ________.

(Ⅳ) 已知 X 的概率密度 $f(x) = Ae^{-\left(\frac{x+1}{2}\right)^2}$ 且 $aX + b \sim N(0,1)$ $(a > 0)$,则 $A =$ ________;$a =$ ________;$b =$ ________.

18. (Ⅰ) 已知随机变量 ξ 在[0,5]上服从均匀分布,则方程 $4x^2 + 4\xi x + \xi + 2 = 0$ 有实根的概率 $\alpha =$ ________.

(Ⅱ) 已知随机变量 $\xi \sim N(\mu,\sigma^2)$,且方程 $x^2+x+\xi=0$ 有实根的概率为$\frac{1}{2}$,则未知参数 $\mu=$ ________.

(Ⅲ) 已知 $X \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$,$P\{Y=-\frac{1}{2}\}=1$,又 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关,则 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3$,$X\boldsymbol{\alpha}_3+Y\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性相关的概率为________.

(Ⅳ) 一枚硬币连续投掷8次正反面出现的次数分别为 X,Y,则一元二次方程 $t^2+Xt+Y=0$ 有实根的概率 $\alpha=$ ________;有重根的概率 $\beta=$ ________.

19. 已知随机变量 X 服从参数为 λ 的指数分布,且 X 落入区间 $(1,2)$ 内的概率达到最大,则未知参数 $\lambda=$ ________.

20. 设随机变量 X 服从参数为1的指数分布,已知事件 $A=\{a<X<5\}$ 与 $B=\{0<X<3\}$ 相互独立,则 $a=$ ________ $(0<a<3)$.

21. 已知随机变量 X 服从参数为 λ 的指数分布,则概率 $P\{\max(X,\frac{1}{X})\leqslant 2)\}=$ ________.

22. 已知随机变量 X 的概率密度 $f(x)=\begin{cases} -x, & -1<x<0, \\ 1-x, & 0<x<1, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$ 则 $P\{|X|>5X-2\}=$ ________.

23. 设汽车发动机无故障工作的时间服从指数分布,平均无故障工作的时间为100小时,则其实际无故障工作的时间不少于80小时的概率等于________.

24. 设一本书的各页上的印刷错误个数服从泊松分布律.已知有一个和两个印刷错误的页数相同,则随意抽查的4页中无印刷错误的概率 $p=$ ________.

25. 袋中有8个球,其中有3个白球,5个黑球.现从中随意取出4个球,如果4个球中有2个白球2个黑球,试验停止,否则将4个球放回袋中重新抽取4个球,直至取到2个白球2个黑球为止.用 X 表示抽取次数,则 $P\{X=k\}=$ ________ $(k=1,2,\cdots)$.

26. 已知某自动生产线加工出的产品次品率为0.01,检验人员每天检验8次,每次从已生产出的产品中随意取10件进行检验,如果发现其中有次品就去调整设备,那么一天至少要调整设备一次的概率为________. $(0.99^{80}\approx 0.4475)$

27. 已知 X 的分布函数为 $F(x)$,概率密度为 $f(x)$,当 $x\leqslant 0$ 时 $f(x)$ 连续且 $f(x)=F(x)$,若 $F(0)=1$,则 $F(x)=$ ________;$f(x)=$ ________.

三、解答题

28. (Ⅰ)10件产品中有3个次品,现逐个取出直至取到正品为止,试求抽取次数 X 的概率分布;

(Ⅱ)10件产品中有3个次品,每次从中取出一个产品同时放入一个正品,直至取到正品为止,试求抽取次数 X 的概率分布.

29. 已知袋中有3个白球2个黑球,每次从袋中任取一球,记下它的颜色再将其放回,直到记录中出4个白球为止.试求抽取次数 X 的概率分布.

30. 抛掷一枚不均匀的硬币,出现正面的概率为 $p(0<p<1)$,以 X 表示一直掷到正、反面都出现时所需要投掷的次数,求 X 的概率分布.

31. 已知厂家生产每台仪器为合格品的概率为80%,为提高产品的合格率,决定对不合格品进行调试.假设不合格品调试后为合格品的概率是70%,现生产100台这种仪器,试求经调试后100台产品至多有一台不合格品的概率 α,并用泊松分布近似计算结果.

32. 假设有10台设备,每台的可靠性(无故障工作的概率)为0.92,每台出现故障时需要由一人进行调整.问为保证在95%的情况下当设备出现故障时都能及时得到调整,至少需要安排几个人值班?

33. 设随机变量 X 服从参数为 λ 的指数分布,求:

(Ⅰ) $Y = \max(X, \frac{1}{X})$ 的分布函数.

(Ⅱ) $Y = \begin{cases} e^X, & X \leqslant 1, \\ 1, & X > 1 \end{cases}$ 的分布函数.

34. 向直线上掷一随机点,假设随机点落入区间 $(-\infty, 0]$, $(0,1]$ 和 $(1,\infty)$ 的概率分别等于 0.2, 0.5 和 0.3,并且随机点在区间 $(0,1]$ 上分布均匀. 已知随机点落入 $(-\infty, 0]$ 得0分,落入 $(1,\infty)$ 得1分,落入 $(0,1]$ 坐标为 x 的点得 x 分. 试求得分 X 的分布函数 $F(x)$.

35. 假设随机变量 X 在区间 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 上服从均匀分布,试求 $Y = \sin X$ 和 $Y = |\sin X|$ 的概率密度.

36. 已知随机变量 $X \sim N(0,1)$,(Ⅰ)令 $Y = \begin{cases} -1, & X < 1, \\ 1, & X \geqslant 1, \end{cases}$ 求 Y 的分布函数;(Ⅱ)求 $Y = e^X$ 的概率密度;(Ⅲ)求 $Y = |X|$ 的概率密度.(结果可以用标准正态分布函数 $\Phi(x)$ 表示).

37. (Ⅰ)已知 X 在 $(0,1)$ 上服从均匀分布,求 $Y = -2\ln X$ 的概率密度;

(Ⅱ)已知 X 的概率密度 $f(x) = \frac{1}{\pi(1 + x^2)}$,求 $Y = 1 - \sqrt[3]{X}$ 的概率密度;

(Ⅲ)已知 $Y = \ln X \sim N(\mu, \sigma^2)$,求 X 的概率密度.

38. 已知随机变量 X 的分布函数 $F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 1, \\ 1 - x^{-\lambda}, & x > 1 \end{cases}$ $(\lambda > 0)$, $Y = \ln X$.(Ⅰ)求 Y 的概率密度 $f_Y(y)$;(Ⅱ)计算 $\sum_{k=0}^{\infty} P\{Y \geqslant k\}$.

39. 已知 X 为随机变量, $Y = X^2 + X + 1$.

(Ⅰ)已知 X 的概率分布为 $P\{X = -1\} = P\{X = 0\} = P\{X = 1\} = \frac{1}{3}$,试求 Y 的分布函数 $F_Y(y)$.

(Ⅱ)已知 X 的分布函数 $F_X(x)$,求 Y 的分布函数 $F_Y(y)$.

(Ⅲ)已知 X 在 $(0,1)$ 上服从均匀分布,求 Y 的概率密度 $f_Y(y)$.

40. 已知随机变量 X 的概率密度

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leqslant x < 1, \\ 2 - x, & 1 \leqslant x < 2, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

求分布函数 $F(x)$;若令 $Y = F(X)$,求 Y 的分布函数 $F_Y(y)$.

41. 设随机变量 X 的绝对值不大于1,且 $P\{X = 0\} = \frac{1}{4}$,已知在 $X \neq 0$ 的条件下, X 在其取值范围内服从均匀分布,求 X 的分布函数 $F(x)$.

42. 一水渠出口闸门挡板是边长为1(单位)的正方形. 已知初始水面高为 $\frac{3}{4}$(单位),现发现挡板某一部位出现一个小孔(小孔等可能出现在挡板的任一位置),水经过小孔流出,求剩余液面高度 X 的分布函数 $F(x)$.

43. 一给水设备每次供水时间为2小时,已知设备启动时发生故障的概率为0.001,一旦设备启动,它的无故障工作时间 X 服从指数分布,平均无故障工作时间(EX)为10小时. 试求设备每次启动无故障工作时间 Y 的分布函数 $F_Y(y)$.

第三章　多维随机变量及其分布

一、选择题

1. 已知 X、Y 概率分布分别为 $\boldsymbol{P}\{X=1\}=\boldsymbol{P}\{X=0\}=\dfrac{1}{2}$，$\boldsymbol{P}\{Y=1\}=\dfrac{3}{4}$，$\boldsymbol{P}\{Y=0\}=\dfrac{1}{4}$，且 $\boldsymbol{P}\{XY=1\}=\dfrac{1}{2}$，则 $\boldsymbol{P}\{X=Y\}$ 等于

(A) $\dfrac{1}{4}$.　　(B) $\dfrac{2}{4}$.　　(C) $\dfrac{3}{4}$.　　(D) 1.

2. 已知随机变量 X_1 与 X_2 相互独立且有相同的分布：$\boldsymbol{P}\{X_i=-1\}=\boldsymbol{P}\{X_i=1\}=\dfrac{1}{2}(i=1,2)$，则

(A) X_1 与 X_1X_2 独立且有相同的分布.　　(B) X_1 与 X_1X_2 独立且有不同的分布.

(C) X_1 与 X_1X_2 不独立且有相同的分布.　　(D) X_1 与 X_1X_2 不独立且有不同的分布.

3. 已知 (X,Y) 服从二维正态分布，则 X 与 Y 不相关是 X 与 Y 独立的

(A) 充分非必要条件.　　(B) 必要非充分条件.

(C) 充分必要条件.　　(D) 既非充分也非必要条件.

4. 设二独立随机变量 X 和 Y 之和 $X+Y$ 与 X 和 Y 服从同名概率分布，如果 X 和 Y 都服从

(A) 均匀分布.　　(B) 指数分布.　　(C) 二项分布.　　(D) 泊松分析.

5. 设 (X,Y) 在区域

$$G=\{(x,y):-a\leqslant x\leqslant a,\ -a\leqslant y\leqslant a\}(a>0)$$

上服从均匀分布，则概率 $\boldsymbol{P}\{X^2+Y^2\leqslant a^2\}$

(A) 随 a 的增大而增大.　　(B) 随 a 的增大而减小.

(C) 与 a 无关是个定值.　　(D) 随 a 的变化增减不定.

6. 已知 (X,Y) 的联合密度函数 $f(x,y)=g(x)h(y)$，其中 $g(x)\geqslant 0$，$h(y)\geqslant 0$，$a=\int_{-\infty}^{\infty}g(x)\mathrm{d}x$，$b=\int_{-\infty}^{\infty}h(y)\mathrm{d}y$ 存在且不为零，则 X 与 Y 独立，其密度函数 $f_X(x)$，$f_Y(y)$ 分别为

(A) $f_X(x)=g(x)$，$f_Y(y)=h(y)$.　　(B) $f_X(x)=ag(x)$，$f_Y(y)=bh(y)$.

(C) $f_X(x)=bg(x)$，$f_Y(y)=ah(y)$.　　(D) $f_X(x)=g(x)$，$f_Y(y)=abh(y)$.

7. 已知随机变量 (X,Y) 在区域 $D=\{(x,y):-1<x<1,\ -1<y<1\}$ 上服从均匀分布，则

(A) $\boldsymbol{P}\{X+Y\geqslant 0\}=\dfrac{1}{4}$.　　(B) $\boldsymbol{P}\{X-Y\geqslant 0\}=\dfrac{1}{4}$.

(C) $\boldsymbol{P}\{\max(X,Y)\geqslant 0\}=\dfrac{1}{4}$.　　(D) $\boldsymbol{P}\{\min(X,Y)\geqslant 0\}=\dfrac{1}{4}$.

二、填空题

8. 已知 (X,Y) 的概率分布为 $\boldsymbol{P}\{X=0,Y=0\}=\dfrac{1}{4}$，$\boldsymbol{P}\{X=0,Y=1\}=\dfrac{1}{4}$，$\boldsymbol{P}\{X=1,Y=0\}=\dfrac{1}{6}$，$\boldsymbol{P}\{X=1,Y=1\}=\dfrac{2}{6}$，$(X,Y)$ 的联合分布函数为 $F(x,y)$，则 $F(\dfrac{1}{2},1)=$ ________；$\boldsymbol{P}\{X\geqslant 0,Y\geqslant\dfrac{1}{2}\}=$ ________.

9. 已知随机变量 (X,Y) 的概率分布为