高职高专公共基础课“十一五”规划教材

新编高等数学

XIN BIAN GAO DENG SHU XUE

王宗传 ◎ 主编

机械工业出版社

CHINA MACHINE PRESS

高职高专公共基础课“十一五”规划教材

新编高等数学

主　编　王宗传
副主编　李玉霞　刘洪霞
参　编　段春媚　邵正芝
主　审　王　新

机械工业出版社

本书以高等数学应用为主导，体现了高职高专教育的特点，在内容的选材上以“必需、够用”为原则，删略了部分定理的证明，增加了数学软件 Mathematica 的应用介绍；在内容的叙述上力求简洁贴切，通俗易懂。本书主要内容包括：函数及其图形、极限与连续、导数与微分、中值定理与导数的应用、不定积分、定积分及其应用、向量代数与空间解析几何、数学软件 Mathematica 应用简介，共八章。每章均配有习题并附有习题答案。

本书可以作为高职院校及各类成人高校的教学用书和参考读物，也可以作为自学教材供广大读者使用.

图书在版编目(CIP)数据

新编高等数学/王宗传主编.—北京：机械工业出版社，2007.1

高职高专公共基础课“十一五”规划教材

ISBN 7-111-20227-9

Ⅰ.新… Ⅱ.王… Ⅲ.高等数学—高等学校:技术学校—教材 Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第126971号

机械工业出版社(北京市百万庄大街22号 邮政编码100037)

策划编辑：宋学敏 李大国 责任编辑：李大国

版式设计：霍永明 责任校对：刘志文

封面设计：王伟光 责任印制：李 妍

北京铭成印刷有限公司印刷

2007年1月第1版第1次印刷

169mm×239mm · 7.125印张 · 274千字

0001—3000册

定价：18.00元

前　　言

随着我国高等教育体制改革的不断深化，以培养应用型、实用技术型人才为重点的高职教育正在蓬勃发展．高职教育理论教学应定位在“以应用为目的，以必需、够用为度，以掌握概念、强化应用为重点”上。为适应和满足这一新的教学模式的要求，我们组织编写了这本《新编高等数学》，以供机电类、数控技术类等专业的学生使用。本书的内容深入浅出，论证简洁，易于教，便于学，体现了数学工具的实用性与应用的广泛性。

全书共八章。内容包括：函数及其图形、极限与连续、导数与微分、中值定理与导数的应用、不定积分、定积分及其应用、向量代数与空间解析几何、数学软件 Mathematica 应用简介。在每章、节后都配有一定数量的习题和复习题，以供教师和学生选用。书末附有部分习题答案。本书可供一个学期使用，也可以根据不同专业的需要灵活选择教学内容。

参加本书编写工作的人员有：李玉霞(第一、二章)、段春媚(第三章)、王宗传(第四、五、六、八章)、刘洪霞(第七章)、邵正芝(参与了部分习题的编写工作)。本书由王宗传主编。王新副教授对本书提出了指导性意见，修改并审阅了全书。

本书在编写过程中得到了有关领导及同事的关心与支持，并参阅了许多教材和资料，在此一并表示衷心的感谢！由于编者水平有限，书中难免有考虑不周之处，所以希望得到各位专家、同行和读者的批评指正，使本书能够在教学实践中不断得以完善。

编　者

目　　录

第一章　函数及其图形

初等数学研究的基本上是不变的量，而高等数学则以变量作为研究对象，并着重考察变量之间的相依关系(即所谓的函数关系). 本章将介绍函数的基本概念及相关内容，这些内容是学习本课程必须掌握的基础知识.

第一节　集　　合

一、集合的概念

集合是一个只能描述而难以精确定义的概念. 这里只给出集合的一种描述：**集合**是指所考察的具有确定性质的对象的总体. 组成这个集合的每一个对象称为该集合的**元素**.

例如，我军战士的全体构成一个集合；空军女干部的全体构成一个集合；某校一年级男大学生的全体构成一个集合. 又如，非负整数构成一个集合；平面上的所有直角三角形构成一个集合.

通常以大写英文字母表示集合，用小写英文字母表示集合中的元素.

事物 a 是集合 M 的元素，记作 $a \in M$；事物 a 不是集合 M 的元素，记作$a \notin M$.

一个集合，若其元素的个数是有限的，则称作**有限集**；否则，就称作**无限集**. 通常用 $\mathbf{N}$ 表示自然数集；用 $\mathbf{Z}$ 表示整数集；用 $\mathbf{Q}$ 表示有理数集；用 $\mathbf{R}$ 表示实数集；用 $\mathbf{C}$ 表示复数集.

集合的表示方法有两种：一种是**列举法**，即把集合中的元素一一列举出来，写在大括号里. 例如，由小于 9 的正偶数所组成的集合，可以表示为 $A=\{2,4,6,8\}$. 用列举法表示集合时，必须列出集合中的所有元素，既不能遗漏也不能重复. 另一种方法是**描述法**，即把集合中的元素所具有的属性写在大括号里. 例如上述集合中 A 也可以表示为 $A=\{x \mid x\text{ 是小于 9 的正偶数}\}$.

不含任何元素的集合称为空集. 空集记作$\varnothing$.

如果集合 A 的元素都是集合 B 的元素，即若 $x \in A$，则必有 $x \in B$，就说 A 是 B 的**子集**. 记作 $A \subseteq B$ 或者 $B \supseteq A$. 若 A 是 B 的子集且 B 中至少有一个元素不属于 A，那么集合 A 就叫做集合 B 的**真子集**，记为 $A \subsetneqq B$ 或 $B \supsetneqq A$. 若 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq$

A，则称 A 与 B 相等，记作 $A=B$ 或 $B=A$.

二、区间

区间和点的邻域是常用的数集.

实数集 $\{x \mid a<x<b\}$ 称为**开区间**，记作 (a,b)；实数集 $\{x \mid a\leqslant x\leqslant b\}$ 称为**闭区间**，记作 $[a,b]$；实数集 $\{x \mid a\leqslant x<b\}$、$\{x \mid a<x\leqslant b\}$ 称为**半开半闭区间**，分别记作 $[a,b)$、$(a,b]$. a、b 称为区间的**端点**.

三、集合的运算

集合有三种基本运算，即并、交、差.

设 A、B 都是集合 S 的真子集，则集合

$$A\cup B=\{x \mid x\in A \text{ 或 } x\in B\},$$
$$A\cap B=\{x \mid x\in A \text{ 且 } x\in B\},$$
$$A\setminus B=\{x \mid x\in A \text{ 但 } x\notin B\},$$

分别称为 A 和 B 的并集、交集、差集.

当 $A\subseteq S$ 时，$S\setminus A$ 称为 A 在 S 中的余集或补集，记为 $\complement_A S$，即

$$\complement_A S=\{x \mid x\in S, x\notin A, A\subseteq S\}.$$

集合的这些运算具有以下性质：

(1) 交换律　$A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$.

(2) 结合律　$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$,
$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$.

(3) 分配率　$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$,
$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$.

(4) 幂等律　$A\cup A=A$，$A\cap A=A$.

(5) 吸收律　$A\cup(A\cap B)=A$，$A\cap(A\cup B)=A$.

(6) 对偶定律　$\complement_{A\cup B}S=\complement_A S\cap\complement_B S$,
$\complement_{A\cap B}S=\complement_A S\cup\complement_B S\ (A\subseteq S, B\subseteq S)$.

四、实数的绝对值

对于任意一个实数 x，它的绝对值为 $|x|=\begin{cases}x & x\geqslant 0\\ -x & x<0\end{cases}$.

绝对值 $|x|$ 有明显的几何意义：实数 x 的绝对值 $|x|$ 等于数轴上的点 x 到原点的距离.

绝对值有如下性质（以下 x,y 为任意实数）：

(1) $|x|=\sqrt{x^2}$；　　　　(2) $|x|\geqslant 0$，仅当 $x=0$ 时，$|x|=0$；

(3) $|-x| = |x|$;　　(4) $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$;

(5) $|x+y| \leqslant |x| + |y|$;　　(6) $||x| - |y|| \leqslant |x-y|$;

(7) $|xy| = |x||y|$;　　(8) $\left|\dfrac{y}{x}\right| = \dfrac{|y|}{|x|}$.

下面引入在高等数学中常用的某点“邻域”的概念.

设 δ 是一个正数，我们把满足不等式 $|x - x_0| < \delta$ 的点的全体，称为**点 x_0 的 δ 邻域**，记作 $U(x_0,\delta)$. 即

$$U(x_0,\delta) = \{x \mid |x - x_0| < \delta\}.$$

而　　$|x - x_0| < \delta \Leftrightarrow -\delta < x - x_0 < \delta \Leftrightarrow x_0 - \delta < x < x_0 + \delta \Leftrightarrow x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

所以，点 x_0 的 δ 邻域就是以 x_0 点为圆心，以 δ 为半径的开区间$(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$，如图 1-1 所示.

在 x 的 δ 邻域中去掉点 x_0，所得集合称为点 x_0 的**去心邻域**，记作 $U(\hat{x}_0,\delta)$. 即 $U(\hat{x}_0,\delta) = \{x \mid 0 < |x - x_0| < \delta\}$，或用区间的并集表示为$(x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$，如图 1-2 所示.

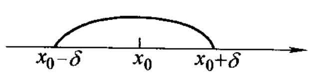


图　1-1

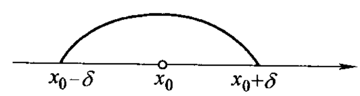


图　1-2

习题 1-1

1. 设 $A = \mathbf{N}$，B 为负整数集合，$C = \{0\}$，$D = \{2n \mid n \in \mathbf{Z}\}$，试写出

(1) $A \cup B \cup C$;　　(2) $A \cap B$;　　(3) $(B \cap D) \cup C$;　　(4) $D \cap C$.

2. 用区间表示变量的变化范围.

(1) $3 \leqslant x \leqslant 5$;　　(2) $|x+1| < 2$;

(3) $x < 5$;　　(4) $0 < |x| < 2$.

第二节　函　　数

一、函数概念

在同一个问题中，往往同时有几个变量在发生变化. 这几个变量并不是孤立地改变，而是按照一定的规律相互联系着. 比如，圆的面积 A 是随着半径 r 的变化而变化的，其变化规律是 $A = \pi r^2$. 当半径 r 任意取定一个非负值时，由上式就可以确定面积 A 的相应数值. 又如，在任何一个确定的地点，某天一昼夜间的

气温 T 是随着时间 t 的变动而变化的. 给定0点到24点之间的任一时刻 t_0，气温 T 都有一个确定的值 T_0 与它对应，尽管这个对应规律很难用一个式子精确地加以表达. 现实世界中广泛存在着变量之间的这种类型的相依关系.

定义1 设 x 和 y 是两个变量，D 是一个给定的数集. 如果按照某个对应法则 f，对于每一个数 $x(x\in D)$，变量 y 都有唯一确定的值与之对应，则称这个对应法则 f 为定义在 D 上的**函数**. 数集 D 称为这个函数的**定义域**，x 称为**自变量**，y 称为**因变量**.

与自变量 x 对应的因变量 y 的值记作 $f(x)$，称为函数 f 在点 x 处的函数值. 比如，当 x 取值 $x_0(x_0\in D)$ 时，y 的对应值就是 $f(x_0)$. 当 x 取遍定义域 D 的所有数值时，由对应的全体函数值所组成的集合

$$W=\{y\mid y=f(x),\ x\in D\}$$

称为函数的**值域**.

需要指出，按照上述定义，f 和 $f(x)$ 的含义是有区别的：前者表示自变量 x 和因变量 y 之间的函数关系，而后者表示与自变量 x 对应的函数值. 但为了叙述方便，习惯上也常用 $f(x)$ 或 $y=f(x)$ 来表示函数.

函数的记号 f 也可改用其他字母表示，例如 φ，F 等. 相应地，函数可记作 $y=\varphi(x)$，$y=F(x)$ 等. 有时还可直接利用因变量的记号来表示函数，即把函数记作 $y=y(x)$. 这时字母 y 既表示因变量，又表示函数.

从函数的定义可以看到，函数概念有两个要素：定义域和对应法则. 如果两个函数的定义域相同，对应法则也相同，那么这两个函数就是相同的；否则，就是不同的.

例1 下列各对函数是否相同？为什么？

(1) $f(x)=\lg x^2$，$g(x)=2\lg x$；

(2) $f(x)=x$，$g(x)=\sqrt{x^2}$；

(3) $f(x)=1$，$g(x)=\sin^2x+\cos^2x$.

解 (1) 不相同，因为 $f(x)$ 的定义域是 $(-\infty,+\infty)$，而 $g(x)$ 的定义域是 $(0,+\infty)$，两个函数的定义域不相同，因此 $f(x)$ 与 $g(x)$ 不相同.

(2) 不相同，因为这两个函数的对应法则不同，所以 $f(x)$ 与 $g(x)$ 不相同.

(3) 相同，因为两函数定义域都是 $(-\infty,+\infty)$，对应法则也相同，因此 $f(x)$ 与 $g(x)$ 相同.

在实际问题中，函数的定义域是根据问题的实际意义确定的. 例如，圆面积公式 $A=\pi r^2$ 的定义域 $D=(0,+\infty)$；某天一昼夜温度 T 随时间 t 变化的规律 $T=T(t)$ 的定义域 $D=[0,24]$.

在数学中，有时并不考虑函数的实际意义，而抽象地研究用算式表达的函数. 这时我们约定：函数的定义域就是由自变量所能取的使算式有意义的一切实

数所组成的集合(这样约定的定义域有时也称为函数的**自然定义域**). 例如,函数 $y=\sqrt{1-x^2}$ 的定义域是闭区间 $[-1,1]$,函数 $y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 的定义域是开区间 $(-1,1)$.

例 2 求下列函数的定义域.

(1) $y=\log_{(x-1)}(16-x^2)$; (2) $y=\arcsin\dfrac{2x-1}{7}+\dfrac{\sqrt{2x-x^2}}{\ln(2x-1)}$.

解 求函数的定义域,即解下列不等式组.

(1) $\begin{cases}16-x^2>0\\ x-1>0\\ x-1\neq 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}|x|<4\\ x>1\\ x\neq 2\end{cases}\Rightarrow 1<x<2$ 及 $2<x<4$;

即函数定义域为 $(1,2)\cup(2,4)$.

(2) $\begin{cases}\left|\dfrac{2x-1}{7}\right|\leqslant 1\\ 2x-x^2\geqslant 0\\ 2x-1>0\\ 2x-1\neq 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-6\leqslant 2x\leqslant 8\\ x(x-2)\leqslant 0\\ 2x>1\\ x\neq 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-3\leqslant x\leqslant 4\\ 0\leqslant x\leqslant 2\\ x>\dfrac{1}{2}\\ x\neq 1\end{cases}\Rightarrow\dfrac{1}{2}<x<1$ 及 $1<x\leqslant 2$.

即函数定义域为 $\left(\dfrac{1}{2},1\right)\cup(1,2]$.

中学数学中已经讨论过许多函数,如幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数等,这些函数在以后的讨论中将反复出现.

二、函数的几种特性

1. 函数的有界性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,数集 $X\subset D$. 如果存在正数 M,使得对于任意的 $x\in X$,都有 $|f(x)|\leqslant M$,就称函数 $f(x)$ 在 X 内**有界**;如果这样的 M 不存在,就称函数 $f(x)$ 在 X 内**无界**.

例如,函数 $f(x)=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是有界的,因为无论 x 取任何实数,$|\sin x|\leqslant 1$ 都成立. 这里 $M=1$(当然也可取大于 1 的任何数作为 M,使得 $|\sin x|\leqslant M$ 成立). 函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在开区间 $(0,1)$ 内是无界的,因为不存在这样的正数 M,使 $\left|\dfrac{1}{x}\right|\leqslant M$ 对于 $(0,1)$ 内的一切 x 都成立. 但是 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在区间 $(1,2)$ 内是有界的,例如可取 $M=1$,使得 $\left|\dfrac{1}{x}\right|\leqslant 1$ 对于区间 $(1,2)$ 的一切 x 值都成立.

函数有界的定义也可以这样表述：如果存在常数 M_1 和 M_2，使得对于任意 $x(x\in X)$，都有$M_1\leqslant f(x)\leqslant M_2$，就称 $f(x)$ 在 X 上有界，并分别称 M_1 和 M_2 为 $f(x)$ 在 X 上的一个**下界**和一个**上界**.

2. 函数的单调性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I\subset D$. 如果对于区间 I 内任意两点 x_1 和 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 内是**单调增加**的；如果对于区间 I 内任意两点 x_1 和 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 内是**单调减少**的.

例如，函数 $f(x)=x^2$ 在区间 $[0,+\infty)$ 内是单调增加的，在区间 $(-\infty,0)$ 内是单调减少的；在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内函数 $f(x)=x^2$ 不是单调的. 因此，讨论函数单调性的时候，必须指明它在哪个区间上是单调增加或单调减少的.

3. 函数的奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称（即若 $x\in D$，则必有 $-x\in D$）. 如果对于任意的 $x\in D$，$f(-x)=-f(x)$ 恒成立，则称 $f(x)$ 为**奇函数**. 如果对于任意的 $x\in D$，$f(-x)=f(x)$ 恒成立，则称 $f(x)$ 为**偶函数**.

例如，$f(x)=x^2$ 是偶函数，$f(x)=x^3$ 是奇函数，而 $f(x)=\sin x+\cos x$ 既非奇函数，又非偶函数.

奇函数的图形是关于原点对称的；偶函数的图形是关于 y 轴对称的.

例 3 讨论函数 $y=\log_a(x+\sqrt{x^2+1})$ 的奇偶性.

解 因为
$$\begin{aligned}
f(-x)&=\log_a(-x+\sqrt{(-x)^2+1})\\
&=\log_a(-x+\sqrt{x^2+1})\\
&=\log_a\frac{(-x+\sqrt{x^2+1})(x+\sqrt{x^2+1})}{(x+\sqrt{x^2+1})}\\
&=\log_a\frac{1}{(x+\sqrt{x^2+1})}\\
&=-\log_a(x+\sqrt{x^2+1})\\
&=-f(x)
\end{aligned}$$
所以 $y=\log_a(x+\sqrt{x^2+1})$ 是奇函数.

4. 函数的周期性

对于函数 $f(x)$，如果存在一个不为零的数 T，对于定义域内的任意 x 值，$x\pm T$ 仍在定义域内，且关系式 $f(x\pm T)=f(x)$ 恒成立，则 $f(x)$ 叫做**周期函数**，T 叫做 $f(x)$ 的周期（通常，周期函数的周期是指**最小正周期**）.

例如，函数 $\sin x$，$\cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数；函数 $\tan x$ 是以 π 为周

期的周期函数.

根据周期函数图形的特点，只要作出函数在长度为周期 T 的一个区间上的图形，就可以通过图形的平移画出整个函数的图形.

三、反函数与复合函数

1. 反函数

函数 $y=f(x)$ 反映了两个变量之间的对应关系，当自变量在定义域 D 内取定一个值后，因变量 y 的值也随之唯一确定. 但是，这种因果关系并不是绝对的. 例如，在自由落体运动中，如果已知物体下落时间 t 而要求出下落距离 s，则可以利用公式 $s=\frac{1}{2}gt^2(t\geqslant 0, g$ 为重力加速度)，这里时间 t 是自变量而距离 s 是因变量. 我们也常常需要考虑反过来的问题，即已知下落距离 s 来求出下落时间 t，这时，可以从上式解得 $t=\sqrt{\frac{2s}{g}}(s\geqslant 0)$，这里距离 s 成为自变量而时间 t 成为因变量. 在数学上，把这个新的函数称为原来函数的反函数.

设函数 $y=f(x)$ 的定义域是数集 D，值域是数集 W. 若对于每一个 $y(y\in W)$，都有唯一的 $x(x\in D)$ 与之相对应从而得到一个定义在 W 上的新函数，则这个新的函数称为 $y=f(x)$ 的**反函数**，记作 $x=f^{-1}(y)$. 这个函数的定义域为 W，值域为 D.

在函数式 $x=f^{-1}(y)$ 中，字母 y 表示自变量，字母 x 表示因变量. 但习惯上一般用 x 表示自变量，而用 y 表示因变量，因此，常把它改写成 $y=f^{-1}(x)$.

例 4 求函数 $y=-\sqrt{x-1}(x\geqslant 1)$ 的反函数.

解 由函数 $y=-\sqrt{x-1}$ 解出 x，得到所求反函数

$$x=y^2+1(y\leqslant 0),$$

但习惯上改写为

$$y=x^2+1(x\leqslant 0).$$

函数 $y=f(x)$ 的图形与它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形是关于直线 $y=x$ 对称的. 例如，指数函数 $y=a^x(a>0, a\neq 1)$ 和它的反函数——对数函数 $y=\log_a x$ 的图形是关于直线 $y=x$ 对称的，如图 1-3 所示.

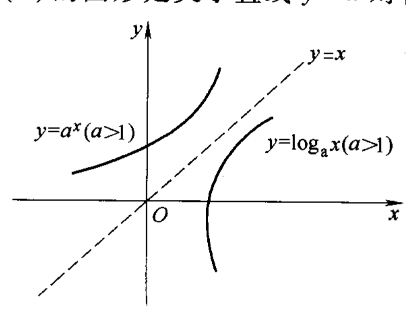


图 1-3

一般地，有如下的关于反函数存在性的**充分条件**.

若函数 $y=f(x)$ 定义在某个区间 I 上，并且在该区间上单调增加(或减少)，则它一定存在反函数.

事实上，若设函数 $y=f(x)(x\in I)$ 的值域为 W，则由 $f(x)$ 在 I 上的单调性可知，对于任意一个数值 $y(y\in W)$，I 内必定只有唯一的 x 值与之相对应，且满足 $f(x)=y$，从而推得 $y=f(x)(x\in I)$ 必存在反函数.

2. 复合函数

先举一个例子.

设 $y=\sqrt{u}$，$u=1+x^2$，将 $u=1+x^2$ 代入 $y=\sqrt{u}$，得 $y=\sqrt{1+x^2}$. 由于函数 $y=\sqrt{1+x^2}$ 是由 $y=\sqrt{u}$ 及 $u=1+x^2$ 复合而成的，所以称它为**复合函数**. 而 u 一般称为复合函数的**中间变量**.

又如，函数 $y=\arctan(x^2)$ 可以看作是由 $y=\arctan u$ 及 $u=x^2$ 复合而成的.

复合函数也可以由两个以上的函数经过复合构成. 一般说来，复合次数越多，函数越复杂，但不管多么复杂，总可以通过中间变量来把它分解.

例 5 设 $f(x)=x^3$，$g(x)=\mathrm{e}^x$，求 $f(g(x))$.

解 $f(g(x))=[g(x)]^3=(\mathrm{e}^x)^3$.

例 6 设 $y=\sqrt{u}$，$u=\cot v$，$v=\dfrac{x}{2}$，则得复合函数 $y=\sqrt{\cot\dfrac{x}{2}}$，这里 u 及 v 都是中间变量.

四、初等函数

由基本初等函数和常数经过有限次的四则运算和复合运算并能用一个式子表示的函数，称为**初等函数**. 例如

$$y=\sqrt{1-x^2},\ y=\sin^2 x,\ y=\sqrt{\cot\frac{x}{2}}$$

都是初等函数.

下面五类函数称为**基本初等函数**.

(1) **幂函数** $y=x^\mu$（μ 是常数）.

幂函数的定义域随 μ 而定. 例如

$\mu=1$ 时，幂函数 $y=x$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，它的图形是一条平分第一、三象限的直线.

$\mu=2$ 时，幂函数 $y=x^2$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，它的图形是一条二次抛物线.

$\mu=3$ 时，幂函数 $y=x^3$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，它的图形是一条三次抛物线.

$\mu=\dfrac{1}{2}$ 时，幂函数 $y=x^{\frac{1}{2}}$ 的定义域为 $[0,+\infty)$，它的图形是一条二次抛物线的一支.

$\mu=-1$ 时，幂函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，它的图形是双曲线.

还可举出许多其他 μ 值对应的幂函数，但上述这些幂函数是常用的. 不论 μ 取何值，幂函数在 $(0,+\infty)$ 内都有定义，且其图形都经过点 $(1,1)$. 图 1-4 表示出了这些函数在 $x\geqslant 0$ 时的图形.

（2）**指数函数**　$y=a^x$（a 是常数，$a>0$，$a\neq 1$）.

指数函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $(0,+\infty)$，其图形都通过点 $(0,1)$，当 $a>1$ 时，函数单调增加；当 $0<a<1$ 时，函数单调减少，如图 1-5 所示.

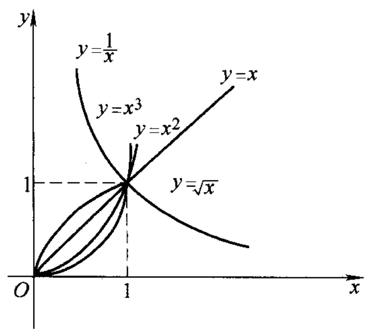


图　1-4

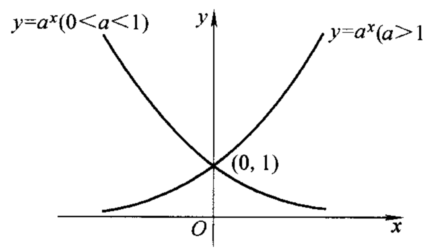


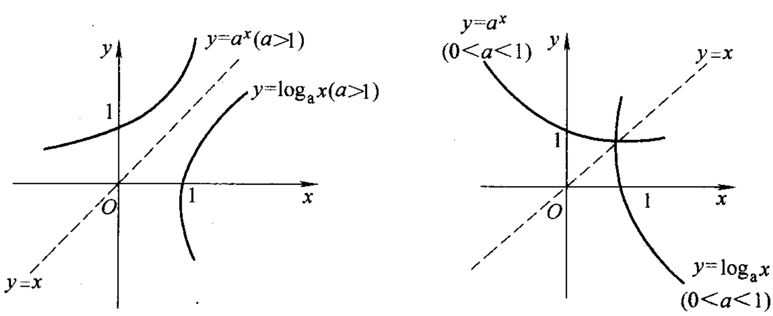
图　1-5

（3）**对数函数**　$y=\log_a x$（a 是常数，$a>0$，$a\neq 1$）.

它是指数函数 $y=a^x$ 的反函数，对数函数的定义域为 $(0,+\infty)$，值域为 $(-\infty,+\infty)$，其图形和指数函数 $y=a^x$ 的图形关于 $y=x$ 对称. 如图 1-6 所示. $y=\log_a x$ 的图形总在 y 轴的上侧，且通过点 $(1,0)$. 当 $a>1$ 时，函数单调增加；当 $0<a<1$ 时，函数单调减少.

以 e 为底的对数函数，记作 $y=\ln x$，称为**自然对数函数**.

（4）**三角函数**



a)　　b)

图　1-6

三角函数有以下 6 种：

正弦函数：$y=\sin x$，它的定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域为$[-1,1]$，它是以2π为周期的有界的奇函数，如图 1-7 所示.

余弦函数：$y=\cos x$，它的定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域为$[-1,1]$，它是以2π为周期的有界的偶函数，如图 1-8 所示.

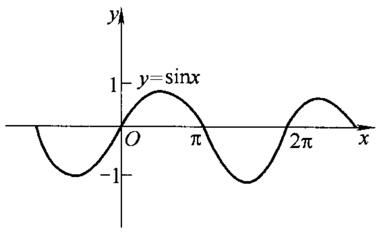


图 1-7

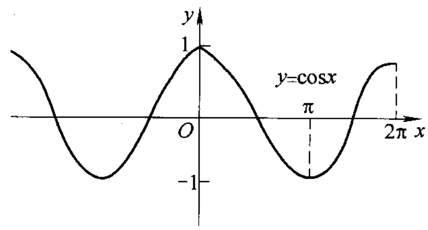


图 1-8

正切函数：$y=\tan x$，它在$x=k\pi+\frac{\pi}{2}(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$处无定义，值域为$(-\infty,+\infty)$，它是以$\pi$为周期的奇函数，如图 1-9 所示.

余切函数：$y=\cot x$，它在$x=k\pi(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$处无定义，值域为$(-\infty,+\infty)$，它是以$\pi$为周期的奇函数，如图 1-10 所示.

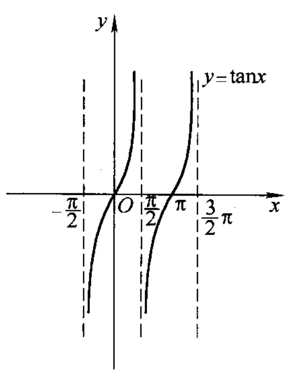


图 1-9

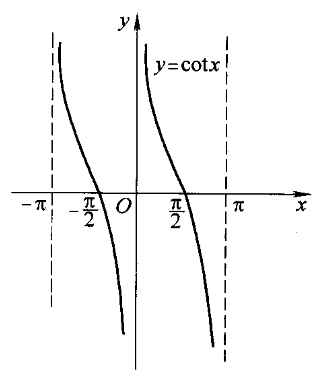


图 1-10

此外，还有**正割函数** $y=\sec x=\frac{1}{\cos x}$，**余割函数** $y=\csc x=\frac{1}{\sin x}$，它们都是以$2\pi$为周期的周期函数.

(5) **反三角函数**

三角函数的反函数称为**反三角函数**. 常用的反三角函数有如下 4 种：

反正弦函数：$y=\arcsin x$，它是正弦函数 $y=\sin x\left(当\ x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]时\right)$的反函

数，它的定义域为$[-1,1]$，值域为$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，在定义域内函数单调增加，如图 1-11 所示.

反余弦函数：$y=\arccos x$，它是余弦函数$y=\cos x$（当$x\in[0,\pi]$时）的反函数，它的定义域为$[-1,1]$，值域为$[0,\pi]$，在定义域内函数单调减少，如图 1-12 所示.

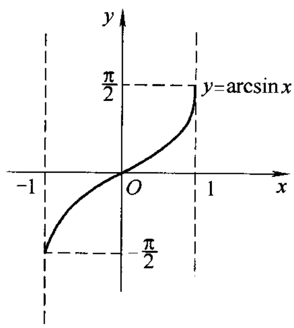


图 1-11

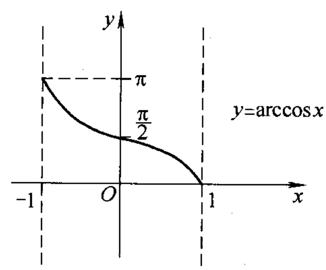


图 1-12

反正切函数：$y=\arctan x$，它是正切函数$y=\tan x\left(当 x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)时\right)$的反函数，定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域为$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，在定义域内函数单调增加，如图 1-13 所示.

反余切函数：$y=\operatorname{arccot} x$，它是余切函数$y=\cot x$（当$x\in(0,\pi)$时）的反函数，定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域为$(0,\pi)$，在定义域内函数单调减少，如图 1-14 所示.

初等函数的表达形式直接明了，研究起来比较方便，所得的结果也可作为研究非初等函数的基础. 本书中讨论的函数主要是初等函数.

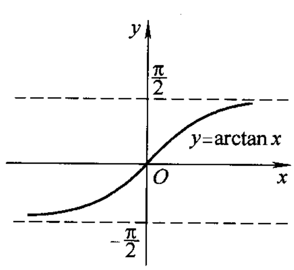


图 1-13

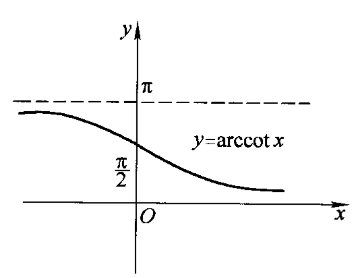


图 1-14