



普通高等教育“十一五”国家级规划教材

# 最优化方法 第二版

■ 施光燕 钱伟懿 庞丽萍



高等教育出版社  
HIGHER EDUCATION PRESS

0224/29=2

2007

普通高等教育“十一五”国家级规划教材

# 最 优 化 方 法

第二版

施光燕 · 钱伟懿 庞丽萍

高等教育出版社

## 内容提要

本书内容包括优化模型、线性规划、约束和无约束非线性规划、多目标规划、离散型优化问题以及遗传算法,涵盖了工程技术人员所需要的最基本的优化方法。此外,还以附录的方式介绍了线性规划和整数规划应用案例。本书是模块式结构,可以任意取舍,对各算法均配有框图,并有 MATLAB 优化工具箱的使用介绍。

本书可作为高等学校工科各专业本科生与硕士生的教材,也可供理科专业选用和社会读者阅读。

### 图书在版编目(CIP)数据

最优化方法/施光燕,钱伟懿,庞丽萍. —2 版. 北京:  
高等教育出版社, 2007. 8  
ISBN 978 - 7 - 04 - 021941 - 8

I. 最… II. ①施…②钱…③庞… III. 最佳化 -  
高等学校 - 教材 IV. O224

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 088637 号

|      |     |      |     |      |     |
|------|-----|------|-----|------|-----|
| 策划编辑 | 张长虹 | 责任编辑 | 张耀明 | 封面设计 | 王凌波 |
| 责任绘图 | 吴文信 | 版式设计 | 王艳红 | 责任校对 | 朱惠芳 |
| 责任印制 | 毛斯璐 |      |     |      |     |

出版发行 高等教育出版社  
社 址 北京市西城区德外大街 4 号  
邮政编码 100011  
总 机 010 - 58581000

经 销 蓝色畅想图书发行有限公司  
印 刷 北京宏伟双华印刷有限公司

购书热线 010 - 58581118  
免费咨询 800 - 810 - 0598  
网 址 <http://www.hep.edu.cn>  
<http://www.hep.com.cn>  
网上订购 <http://www.landraco.com>  
<http://www.landraco.com.cn>  
畅想教育 <http://www.widedu.com>

开 本 787 × 960 1/16  
印 张 11.75  
字 数 210 000

版 次 1999 年 1 月第 1 版  
2007 年 8 月第 2 版  
印 次 2007 年 8 月第 1 次印刷  
定 价 15.20 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

物料号 21941 - 00

## 第二版前言

本书自 1999 年出版发行以来,不少学校采用它作为本科生或硕士生的教材。在使用中不少教师和读者对本书提出了宝贵意见。在他们的帮助下,于 2004 年本书第 6 次印刷时,对本书的一些印刷错误作了比较集中的改正,而还有一些意见当时未及考虑。在执行“十一五”国家级教材规划之际,在继续保持本书原有风格和使本书更适宜于教学的前提下,结合读者的一些意见编写本书的第二版。

具体的改动有

1. 删去了不合实际教学需要的上机实习部分,更换了原需较强专业知识的例子。
2. 考虑到线性规划的对偶单纯形法不仅是一种解法,而还涉及“对偶”的概念,“对偶”乃是数学研究中常用的方法,故把其从习题移至正文中。
3. 在约束非线性规划中增加了序列二次规划方法,因考虑到源于它可得到一些其他的实用算法。
4. 为使全书的风格更趋于一致,改写了整个多目标规划部分。
5. 增写了第七章遗传算法,以满足一些读者的需要。

本书第一版的作者之一董加礼教授,已不幸去世,这次特邀董老师的学生、大连理工大学副教授庞丽萍博士参加本书的修订。另一作者钱伟懿博士系渤海大学教授。

热切期望专家、同行和广大读者继续关注本书和提出宝贵意见。

施光燕

2007.1 于大连

# 第一版前言

在国民经济各部门和科学技术的各个领域中都普遍存在着最优化问题。最优化问题的解就是从所有可能的方案中选择出最合理的、以达到最优目标的方案——最优方案,搜寻最优方案的方法就是最优化方法。随着计算机科学的发展和应用,应用最优化方法解决问题的领域不断扩大,解决问题的深度不断深化,最优化的理论和方法也不断地得到普及和发展。最优化方法的基本知识已成为新的工程技术、管理人员所必备的基础知识。因此,最优化方法已是目前各院校普遍开设的一门数学课程。本书可作为各专业本科学生以及研究生所用的教材,学时可控制在 32~48 学时,也可作为高等学校教师、工程技术人员和科研人员自学参考用书。

本书是作为教育部“高等教育面向 21 世纪教学内容和课程体系改革计划”立项项目《工科数学系列课程教学内容和课程体系改革的研究与实践》的研究成果之一。本书在编写时力求实现课题组提出的“以方法为主,不追求理论的系统性和完整性,方法要注意实用性和先进性以及结构模块化便于教学”等要求,具体有如下特点:

1. 本书以工科学生所具备的数学基础知识为起点,尽量采用从几何直观入手讲清方法思路,适当进行理论证明的方法,例如线性规划单纯形法的实质和非线性规划的最优性条件等,既避开纯形式的理论推演,却又能使学生理解、掌握方法的实质。

2. 努力体现实用性,我们认识到工科最优化方法课程应该突出两个方面,一是如何将一个实际问题提炼成最优化问题;二是如何求解,最后要落实到一个“用”字上来。第一方面的问题仅依靠本课程是不可能完全解决的,但本书尽量举一些实际例子使读者从中能得到领悟,同时又选编了一些上机实习和应用的案例。关于第二方面的问题,我们则对教材的内容进行精选,本书容纳了最优化方法中几个最主要的分支,而对每个分支却选择应用广泛、通用性大的方法作为重点讲授,而这些却又正包含了工程技术人员所需要的最基本的优化方法。本书采纳了专家的审稿意见,将这些方法计算机化,给出了算法的框图。

3. 在注意实用的同时又注意思维的启迪。本书不是单纯地把各个方法端出来,而是尽量讲清思路、各种方法之间的联系和关于方法发展历程的体会,使读者能够联想导出另外的方法或针对实际问题将各种方法结合使用,在本书中

特意选编这种类型的习题。另外,本书对一些非主要内容采用分析“示例”的方法以达到介绍“入门”,或让其在“门外看一看”的办法,使各类读者根据需要能顺着各种思路继续学习,如对动态规划、图论中一些问题的处理。本书还介绍了近年所发展的遗传算法等。

4. 本书的叙述尽量简明,我们认为这样既可使教师有很多发挥的余地,又使读者易于抓住重点。

5. 本书对目前流行的 MATLAB 语言工具箱中的优化工具箱的使用进行了介绍。

本书是几经教学试点、修改而成的,参加本书教学试点的除编者外,还有大连理工大学的邹春苓副教授,吉林工业大学的黄万风、张士科、方沛辰、刘庆怀、孙喜梅、褚铭、姚国凤各位副教授,他们对本书的完成起了重要的作用,编者借此机会对他们表示衷心的感谢。我们特别感谢主审人谭泽光教授和傅万涛教授,他们提出了许多宝贵的意见和建议,对提高本书的质量起了十分重要的作用。

本书得到原国家教委教学改革基金的资助,还得到大连理工大学教务处和吉林工业大学教务处的关怀和资助,借此机会向他们一并表示感谢。

限于编者的水平,不妥与错误之处在所难免,殷切期望专家、同行和广大读者批评指正。

编者

1999年3月

## 郑 重 声 明

高等教育出版社依法对本书享有专有出版权。任何未经许可的复制、销售行为均违反《中华人民共和国著作权法》,其为人将承担相应的民事责任和行政责任,构成犯罪的,将被依法追究刑事责任。为了维护市场秩序,保护读者的合法权益,避免读者误用盗版书造成不良后果,我社将配合行政执法部门和司法机关对违法犯罪的单位和个人给予严厉打击。社会各界人士如发现上述侵权行为,希望及时举报,本社将奖励举报有功人员。

**反盗版举报电话:** (010)58581897/58581896/58581879

**传 真:** (010)82086060

**E - mail:** dd@hep.com.cn

**通信地址:** 北京市西城区德外大街 4 号

高等教育出版社打击盗版办公室

**邮 编:** 100011

**购书请拨打电话:** (010)58581118

# 目 录

|                               |    |
|-------------------------------|----|
| 第一章 概论 .....                  | 1  |
| § 1.1 模型举例 .....              | 1  |
| § 1.2 优化模型的分类和一些术语 .....      | 9  |
| 一、数学规划 .....                  | 10 |
| 二、组合优化 .....                  | 10 |
| 三、图论、网络流 .....                | 11 |
| 四、动态规划 .....                  | 11 |
| § 1.3 MATLAB 优化工具箱介绍 .....    | 14 |
| 习题一 .....                     | 16 |
| 第二章 线性规划 .....                | 19 |
| § 2.1 线性规划解的几何特征 .....        | 19 |
| § 2.2 线性规划的标准形 .....          | 20 |
| § 2.3 线性规划的基本定理 .....         | 22 |
| § 2.4 单纯形法 .....              | 23 |
| § 2.5 大 M 法 .....             | 28 |
| § 2.6 对偶单纯形法 .....            | 30 |
| 一、对偶单纯形法 .....                | 30 |
| 二、对偶线性规划 .....                | 31 |
| § 2.7 灵敏度分析 .....             | 35 |
| § 2.8 应用 MATLAB 解线性规划举例 ..... | 37 |
| 附:凸多面体顶点代数特征的证明 .....         | 38 |
| 定理 2.1 的证明 .....              | 39 |
| 线性规划的多项式算法 .....              | 40 |
| 习题二 .....                     | 41 |
| 第三章 无约束非线性规划 .....            | 44 |
| § 3.1 最优性条件 .....             | 44 |
| § 3.2 一维搜索 .....              | 47 |
| 一、平分法 .....                   | 47 |
| 二、0.618 法(黄金分割法) .....        | 48 |
| 三、牛顿法 .....                   | 50 |
| § 3.3 最速下降法和共轭梯度法 .....       | 51 |

|                                   |            |
|-----------------------------------|------------|
| 一、最速下降法 .....                     | 51         |
| 二、共轭梯度法 .....                     | 53         |
| § 3.4 牛顿法和拟牛顿法(变尺度法) .....        | 57         |
| 一、牛顿法 .....                       | 57         |
| 二、拟牛顿法(变尺度法) .....                | 58         |
| § 3.5 信赖域法 .....                  | 60         |
| § 3.6 应用 MATLAB 解无约束非线性规划举例 ..... | 62         |
| 习题三 .....                         | 64         |
| <b>第四章 约束非线性规划</b> .....          | <b>66</b>  |
| § 4.1 最优性条件 .....                 | 67         |
| 一、等式约束极小的最优性条件 .....              | 67         |
| 二、一般非线性规划的最优性条件 .....             | 69         |
| § 4.2 二次规划 .....                  | 72         |
| § 4.3 可行方向法 .....                 | 77         |
| § 4.4 惩罚函数法 .....                 | 81         |
| 一、外点法 .....                       | 82         |
| 二、内点法 .....                       | 84         |
| 三、乘子法 .....                       | 86         |
| § 4.5 序列二次规划法 .....               | 91         |
| 一、搜索方向 $d$ 的确定 .....              | 91         |
| 二、步长的确定 .....                     | 92         |
| § 4.6 复形法 .....                   | 94         |
| § 4.7 应用 MATLAB 解约束非线性规划举例 .....  | 96         |
| 附:Farkas 引理及其证明 .....             | 100        |
| 习题四 .....                         | 101        |
| <b>第五章 多目标规划</b> .....            | <b>105</b> |
| § 5.1 概述 .....                    | 105        |
| § 5.2 偏差概念的运用 .....               | 106        |
| § 5.3 多目标规划解的概念 .....             | 108        |
| § 5.4 多目标线性规划的解法 .....            | 109        |
| 一、转化为一个单目标问题的解法 .....             | 109        |
| 二、分层排序法 .....                     | 110        |
| 习题五 .....                         | 115        |
| <b>第六章 离散型优化问题</b> .....          | <b>117</b> |
| § 6.1 线性整数规划 .....                | 117        |
| § 6.2 0-1 规划的隐枚举法 .....           | 122        |
| § 6.3 网络优化 .....                  | 127        |
| 一、网络的基本意义 .....                   | 127        |

---

|                               |     |
|-------------------------------|-----|
| 二、最短路问题 .....                 | 129 |
| 三、网络流问题 .....                 | 130 |
| 习题六 .....                     | 133 |
| <b>第七章 遗传算法</b> .....         | 136 |
| § 7.1 遗传算法概述 .....            | 136 |
| § 7.2 遗传算法的不同实现技术举例 .....     | 141 |
| 习题七 .....                     | 145 |
| <b>附录 线性规划和整数规划应用案例</b> ..... | 146 |
| <b>算法框图</b> .....             | 153 |
| <b>习题答案</b> .....             | 166 |
| <b>参考文献</b> .....             | 175 |

# 第一章 概 论

随着生产、经济、技术的发展,工程技术、管理人员在实际工作中,肯定会面临这样的一类问题:工程设计中怎样选择参数,使得设计既满足要求又能降低成本;资源分配中,怎样的分配方案既能满足各方面的基本要求,又能获得好的经济效益;生产计划安排中,选择怎样的计划方案才能提高产值和利润;原料配比问题中,怎样确定各种成分的比例才能提高质量、降低成本;城建规划中,怎样安排工厂、机关、学校、商店、医院、住宅和其他单位的合理布局,才能方便群众,有利于城市各行各业的发展;在各个领域中,诸如此类问题,不胜枚举.这一类问题的共同特点,就是要在所有可能的方案中,选出最合理的,达到事先规定的最优目标的方案,这个方案可称为**最优方案**,寻找最优方案的方法称为**最优化方法**.

最优化问题是个古老的课题.早在17世纪已经提出(我们在高等数学课程中亦已见到)极值问题.到20世纪40年代以来,由于生产和科学研究突飞猛进发展,特别是电子计算机日益广泛应用,使最优化问题不仅成为一种迫切需要,而且有了求解的有力工具.最优化理论和算法也就迅速发展起来,形成一个新的学科,并在实际应用中发挥越来越大的作用.因此,有关最优化方法的基本知识已成为新的工程技术、管理人员所必备的基础知识之一.本教材就是以此为目标,向工科、管理各专业的学生介绍最典型的优化模型及其应用背景、相关的优化理论和最常用的算法.在内容的编写上,我们并不想把众多的具体算法一一介绍给读者,而只是讲清在优化计算中所要考虑的问题、要注意的地方、解决问题的主要思路 and 主要算法构造的出发点.

## § 1.1 模 型 举 例

当量化地求解一个实际的最优化问题时,首先要把这个问题转化为一个数学问题,即建立数学模型.这是非常重要的一环.要建立一个合适的数学模型,必须对实际问题有很好的了解,经过分析、研究抓住其主要因素,理清其相互的联系,然后综合利用有关学科的知识 and 数学知识才能完成.下面仅举几个专业性不强的简单例子,以便对建模过程中数学处理上的一般步骤和本教材所论方法的实际应用背景有所了解.

### 例 1.1 配棉问题

棉纺厂的主要原料是棉花,一般要占总成本的 70% 左右.棉花的品种、等级不同,价格也不同.因此,若采用品种好、等级高、价格贵的棉花来纺成一种质量要求一般的棉纱,势必提高成本.所谓配棉问题,就是要根据棉纱的质量指标,采用各种价格不同的棉花,按一定比例配制成纱,使其既达到质量指标,又使总成本最低.

棉纱的质量指标一般由棉结和品质指标来决定.这两项指标都可用数量形式来表示.一般来说,棉结粒数越少越好,品质指标越大越好.但在具体生产过程中,它受棉花品种的现有量、生产技术、设备条件等多方面的制约.

一个年纺纱能力为 15 000 锭的小厂在采用最优化方法配棉前,某一种产品 32D 纯棉纱的棉花配比、质量指标及单价如下:

| 原料品名   | 单价<br>元/t | 混合比<br>% | 棉结<br>粒 | 品质指标  | 混棉单价<br>元/t |
|--------|-----------|----------|---------|-------|-------------|
| 国棉 131 | 8 400     | 25       | 60      | 3 800 | 2 100       |
| 国棉 229 | 7 500     | 35       | 65      | 3 500 | 2 625       |
| 国棉 327 | 6 700     | 40       | 80      | 2 500 | 2 680       |
| 平均合计   |           | 100      | 70      | 3 175 | 7 405       |

有关部门对 32D 纯棉纱规定的质量指标为棉结不多于 70 粒,品质指标不小于 2 900.

为运用最优化方法解决该品种的配棉问题,我们来建立其数学模型.

首先,根据问题的需要设置变量:设  $x_1, x_2, x_3$  分别为国棉 131, 229, 327 的棉花配比.然后用所设置的变量把所追求的目标和所受的约束,用数学语言表达出来,就得到该问题的数学模型.

本例的目标是混棉单价最小,用  $x_1, x_2, x_3$  即可表为

$$\min z = (8\,400x_1 + 7\,500x_2 + 6\,700x_3).$$

本例关于 32D 纯棉纱的质量指标要求可作为约束条件表出,即有

$$60x_1 + 65x_2 + 80x_3 \leq 70,$$

$$3\,800x_1 + 3\,500x_2 + 2\,500x_3 \geq 2\,900,$$

再由变量  $x_1, x_2, x_3$  的实际意义,它们都应是一个百分数,而且它们之和应为 100%,因此也应把它们作为约束条件提出

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1,$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0,$$

所以,32D 纯棉纱配棉问题的数学模型为

$$\begin{aligned}
 \min z &= (8\,400x_1 + 7\,500x_2 + 6\,700x_3), \\
 \text{s. t. (满足于)} &60x_1 + 65x_2 + 80x_3 \leq 70, \\
 &3\,800x_1 + 3\,500x_2 + 2\,500x_3 \geq 2\,900, \\
 &x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\
 &x_1, x_2, x_3 \geq 0.
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

运用第二章的方法可解得  $x_1 = 0, x_2 = 0.667, x_3 = 0.333$ , 混棉单价降低为 7 233 元/t.

### 例 1.2 资金使用问题

设有 400 万元资金, 要求 4 年内使用完, 若在一年内使用资金  $x$  万元, 则可得效益  $\sqrt{x}$  万元 (效益不能再使用), 当年不用的资金可存入银行, 年利率为 10%. 试制订出资金的使用规划, 以使 4 年效益之总和为最大.

很明显, 不同的使用方案, 所取得效益之总和是不同的. 如第一年就把 400 万元全部用完, 则效益总和为  $\sqrt{400} = 20.0$  (万元); 若前三年均不用而存入银行, 则第四年把本息和:  $400 \times (1.1)^3 = 532.4$  (万元) 全部用完, 则效益总和为  $\sqrt{532.4} = 23.07$  (万元), 比第一方案效益大 3 万多元. 但若应用最优化方法, 可得到如下的最优方案:

|      | 万元   |       |       |       |
|------|------|-------|-------|-------|
|      | 第一年  | 第二年   | 第三年   | 第四年   |
| 现有资金 | 400  | 345.2 | 265.1 | 152.8 |
| 使用金额 | 86.2 | 104.2 | 126.2 | 152.8 |

效益总和为  $\sqrt{86.2} + \sqrt{104.2} + \sqrt{126.2} + \sqrt{152.8} = 43.1$  (万元), 是第一方案效益总和的两倍多. 这个例子非常生动地反映出进行定量的优化计算的作用. 所以, 一些工业界人士称最优化方法为不需增加投入而能增加产出的手段.

为了得出上述最优方案, 首先要将该问题转化为数学问题, 即建立它的数学模型. 我们还是首先根据问题所需要的回答, 设变量  $x_i (i=1, 2, 3, 4)$  分别表示第  $i$  年所使用的资金数. 于是, 所追求的目标——4 年的效益总和最大, 即可表为

$$\max z = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \sqrt{x_3} + \sqrt{x_4},$$

所受到的约束即为每年的使用数额既不能为负数又不能超过当年资金拥有数. 具体地即为

$$\text{第一年 } 0 \leq x_1 \leq 400.$$

$$\text{第二年 } 0 \leq x_2 \leq (400 - x_1) \times 1.1 \text{ (第一年未使用资金存入银行一年后的本}$$

利和).

第三年  $0 \leq x_3 \leq [(400 - x_1) \times 1.1 - x_2] \times 1.1$ .

第四年  $0 \leq x_4 \leq \{[(400 - x_1) \times 1.1 - x_2] \times 1.1 - x_3\} \times 1.1$ .

资金使用问题的数学模型为

$$\begin{aligned} \max z &= (\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \sqrt{x_3} + \sqrt{x_4}), \\ \text{s. t. } x_1 &\leq 400, \\ 1.1x_1 + x_2 &\leq 440, \\ 1.21x_1 + 1.1x_2 + x_3 &\leq 484, \\ 1.331x_1 + 1.21x_2 + 1.1x_3 + x_4 &\leq 532.4, \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0. \end{aligned} \quad (1.2)$$

### 例 1.3 Sylvester 问题

设平面上有  $m$  个点, 找覆盖这  $m$  个点的最小圆盘.

设这  $m$  个点为  $p_i (i=1, 2, \dots, m)$ , 平面上任一点  $x$  到各点的距离则分别为  $\|x - p_i\| (i=1, 2, \dots, m)$

若以  $f(x)$  表示点  $x$  至  $m$  个点  $p_i$  的最大距离, 即

$$f(x) = \max_{1 \leq i \leq m} \|x - p_i\|,$$

则以  $x$  为圆心、以  $f(x)$  为半径的圆盘即能覆盖这  $m$  个点. 于是问题即转化为解

$$\min_{x \in \mathbb{R}^2} f(x). \quad (1.3)$$

这是一个无约束条件的优化问题.

### 例 1.4 电站建设最优方案问题

某地区在制定 10 年电力发展规划时, 其备选方案和有关数据如下:

| 备选方案 | 工程     | 前期   | 单机 | 单机    | 允许 | 资本      | 年运行      | 负荷   |
|------|--------|------|----|-------|----|---------|----------|------|
|      | 特点     | 投资   | 设备 | 容量    | 装机 | 回收      | 成本       | 因子   |
|      |        | (百万) | 投资 | (万千瓦) | 台数 | 因子      | (百万元/亿度) |      |
| 1    | 扩建旧火电站 | /    | 21 | 10    | 5  | 0.103   | 4.11     | 0.66 |
| 2    | 新建水电站  | 504  | 70 | 25    | 4  | 0.057 8 | 2.28     | 0.4  |
| 3    | 新建火电站  | 240  | 65 | 30    | 4  | 0.103   | 3.65     | 0.7  |

说明: 回收因子是由使用年限和年利率计算出每一元投资、每一年应回收的值.

负荷因子系全年满功率运行天数与全年总天数之比.

现要求 10 年后发电装机容量需增加 180 万千瓦,年发电量需增加 100 亿度,要从备选方案中选取既能实现目标又经济效果最优的建设方案.

下面建立此问题的数学模型.

首先设置变量,备选方案 1 无前期土建工程,而第 2、3 备选方案要进行前期土建工程而和装机台数无关,故用 0-1 变量(即只取值 0 或 1 的变量) $x_4$ 、 $x_5$  表示第 2、3 方案中的前期工程是否施工.用变量  $x_1$  表示第 1 方案中的装机台数,故其只取 0—5 中的整数值. $x_2$ 、 $x_3$  分别表示第 2、3 方案中的装机台数,故取 0—4 中的任一整数值.

根据规划要求,建立变量所应满足的条件:

1. 满足装机容量的要求

$$10x_1 + 25x_2 + 30x_3 \geq 180. \quad (1.4)$$

2. 满足年发电量的要求

$$(0.66 \times 8\,760 \times 10)x_1 + (0.4 \times 8\,760 \times 25)x_2 + (0.7 \times 8\,760 \times 30)x_3 \geq 1\,000\,000 \text{ (百万度)}. \quad (1.5)$$

(每台机组年发电量等于单机容量乘全年小时数 8 760,再乘以负荷因子.)

3. 每个备选方案最多装机台数

$$\begin{aligned} x_1 &\leq 5, \\ x_2 &\leq 4x_4, \\ x_3 &\leq 3x_5. \end{aligned} \quad (1.6)$$

4. 变量取值限制

$$\begin{aligned} x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \text{ 且为整数}, \\ x_4, x_5 &= \begin{cases} 0, & \text{前期土建工程不施工}, \\ 1, & \text{前期土建工程施工}. \end{cases} \end{aligned} \quad (1.7)$$

建立目标函数

将最好的经济效果设计为年成本费用最低,成本包括可变成本与不变成本.

不变成本包括前期土建工程投资和装机设备投资,将其按年分摊(总费用乘回收因子).

方案 1、2、3 单机的年不变成本分别为

$$21 \times 0.103 = 2.163 \text{ (百万元)},$$

$$70 \times 0.0578 = 4.046 \text{ (百万元)},$$

$$65 \times 0.103 = 6.695 \text{ (百万元)}.$$

方案 2、3 的前期投资,按年分摊为

$$504 \times 0.0578 = 29.131 \text{ (百万元)},$$

$$240 \times 0.103 = 24.72 \text{ (百万元)}.$$

方案 1、2、3 每发一亿度电的运行成本分别为 4.11、2.28、3.65(百万元).

因此,目标为

$$\begin{aligned}\min z = & 2.163x_1 + 4.046x_2 + 6.695x_3 + 29.131x_4 + \\ & 24.72x_5 + 4.11 \times 0.66 \times 8\,760 \times 10 \times x_1 / 10\,000 + \\ & 2.28 \times 0.4 \times 8\,760 \times 25 \times x_2 / 10\,000 + \\ & 3.65 \times 0.7 \times 8\,760 \times 30 \times x_3 / 10\,000.\end{aligned}\quad (1.8)$$

### 例 1.5 投资的收益和风险(1998 年全国大学生建模竞赛题)

市场上有几种资产(如股票、债券、…)  $S_i (i=1, 2, \dots, n)$  供投资者选择, 某公司有数额为  $M$  的一笔相当大资金可用作一个时期的投资. 公司财务分析人员对几种资产进行了评估, 估算出在这一时期内购买  $S_i$  的平均收益率为  $r_i$ , 并预测出购买  $S_i$  的风险损失率为  $q_i$ . 考虑到投资越分散, 总的风险越小, 公司决定, 当用这笔资金购买若干种资产时, 总体风险可用所投资的  $S_i$  中最大的一个风险来度量.

购买  $S_i$  要付交易费, 费率为  $p_i$ , 并且当购买不超过给定值  $u_i$  时, 交易费按购买  $u_i$  计算(不买当然无须付费). 另外, 假定同期存款利率是  $r_0 (r_0 = 5\%)$ , 且既无交易费又无风险.

已知  $n=4$  时的相关数据如下:

| $S_i$ | $r_i$<br>% | $q_i$<br>% | $p_i$<br>% | $u_i$<br>元 |
|-------|------------|------------|------------|------------|
| $S_1$ | 28         | 2.5        | 1          | 103        |
| $S_2$ | 21         | 1.5        | 2          | 198        |
| $S_3$ | 23         | 5.5        | 4.5        | 52         |
| $S_4$ | 25         | 2.6        | 6.5        | 40         |

试给该公司设计一种投资组合方案, 即用给定的资金  $M$ , 有选择地购买若干种资产或存银行生息, 使净收益尽可能大, 而总体风险尽可能小.

设变量  $x_i (i=0, 1, 2, 3, 4)$  分别表示存入银行和购买  $S_i$  的金额,  $y_j = 0$  表示不买  $S_j$ ,  $y_j = 1 (j=1, 2, 3, 4)$  表示买  $S_j$ . 目标有两个

$$\text{第一个目标} \quad \max z_1 = \sum_{i=0}^4 r_i x_i - \sum_{i=1}^4 p_i y_i \max \{x_i, u_i\},$$

$$\text{第二个目标} \quad \min z_2 = \max_{1 \leq i \leq 4} \{q_i x_i\}.$$

约束是总资金为  $M$ ,  $\sum_{i=0}^4 x_i \leq M$  和  $x_i \geq 0$ , 以及  $x_i$  和  $y_i$  之间的联系.

最后, 投资的收益和风险的数学模型为

$$\begin{aligned}
 \max z_1 &= \sum_{i=0}^4 r_i x_i - \sum_{i=1}^4 p_i y_i \max \{x_i, u_i\}, \\
 \min z_2 &= \max_{1 \leq i \leq 4} \{q_i x_i\}, \\
 \text{s. t. } \sum_{i=0}^4 x_i &\leq M, \\
 x_i &\geq 0, i = 0, 1, 2, 3, 4, \\
 x_j &\leq M y_j, y_j = 0 \text{ 或 } 1, j = 1, 2, 3, 4.
 \end{aligned} \tag{1.9}$$

### 例 1.6 管路铺设问题

设自来水公司要为四个新居民区供水,已知自来水公司和四个居民区的位置、可供铺设管线的地方及距离,现要选择一个管线总长度最短的铺设方案.

这个问题的条件,很自然能用图 1.1 表示出来,其中点  $V_0$  表示自来水公司,  $V_1, V_2, V_3, V_4$  分别表示四个居民区,各条边分别表示可供铺设管线的位置,边上的数字(称为权数)表示相应的距离.而这个问题就是要从边集中找出一个子集使达到既能使四个居民区  $V_1, V_2, V_3, V_4$  都通上水,又使所选边的权数总和尽量小.

我们再来进一步分析所提的两个要求.为要实现第一个目标,即使四个居民区都能通上水,则只要选择的边的子集能使五个顶点之间都有路相通;为要实现第二个目标,则所选择的边的子集不应构成圈.如选择图 1.2 所示的方案,顾名思义即可知用黑线标出的三条边即是一个圈,很显然在这三个边中任意去掉一条边后仍然达到四个居民区都通上水的目标,因此这个方案显然不是最优方案,我们把各顶点间都有路相通且没有圈的图称为“树”,大家想一下自然界的树就具有特点:各树叶之间都可沿着树枝相通,而所有树枝是不构成圈的.

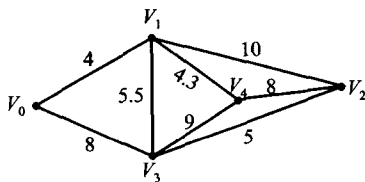


图 1.1

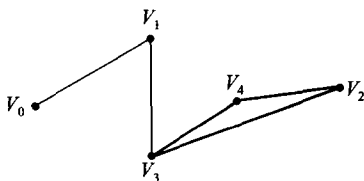


图 1.2

于是,这个管路铺设问题就是要在图 1.1 中找出一棵树,而且要使权数总和尽量小,这样的问题起名为求最小生成树.利用数学上的专有的术语,这个问题的数学模型就是要求图 1.1 的最小生成树.