21世纪高等学校规划教材
Textbook Series of 21st Century

运筹学模型与实验

YUNCHOUXUE MOXING
YU SHIYAN

张 杰 周 硕 主 编
郭丽杰 副主编

中国电力出版社
http://jc.cepp.com.cn

21 世纪高等学校规划教材
Textbook Series of 21st Century

运筹学模型与实验

YUNCHOUXUE MOXING
YU SHIYAN

主　编　张　杰　周　硕
副主编　郭丽杰
编　写　邢丽君　李鹏松
　　　　常志文　郭新辰
主　审　王文杰

中国电力出版社
http://jc.cepp.com.cn

内 容 提 要

本书为21世纪高等学校规划教材。本书主要介绍了运筹学在科学研究、工程技术、管理决策中各种实际问题的数学模型、求解方法、应用实例以及LINGO软件实现。全书共11章，内容包括线性规划模型、运输问题模型、整数规划模型、多目标规划模型、图与网络模型、动态规划模型、存储模型、排队模型、决策模型、对策模型、评价模型。书中将运筹学理论、数学建模教育以及LINGO软件的使用融为一体，并配有大量练习题。与此同时，还有与之配套的多媒体课件以及全程授课录像，不仅适用于教学，而且便于读者自学。

本书可作为高等院校数学、管理及工科各专业本科学生的教材，也可作为数学建模培训用书，还可供工程技术人员参考使用。

图书在版编目（CIP）数据

运筹学模型与实验/张杰，周硕主编；邢丽君等编写. —北京：中国电力出版社，2007

21世纪高等学校规划教材

ISBN 978-7-5083-5870-3

Ⅰ.运…　Ⅱ.①张…　②周…　③邢…　Ⅲ.运筹学－数学模型－高等学校－教材　Ⅳ.022

中国版本图书馆CIP数据核字（2007）第094331号

中国电力出版社出版、发行

（北京三里河路6号　100044　http://jc.cepp.com.cn）

北京市铁成印刷厂印刷

各地新华书店经售

*

2007年8月第一版　2007年8月北京第一次印刷

787毫米×1092毫米　16开本　19.25印张　466千字

印数0001—3000册　定价**29.00**元

前　言

运筹学是20世纪40年代开始形成的一门应用科学，它用科学的方法研究现实世界运行系统的现象和其中具有典型意义的优化问题，从中提出具有共性的模型，寻求求解模型的方法。

“运筹”在中文意义上即运算筹划、以策略取胜的意思。运筹学是指用数学方法研究经济、社会和国防等部门在内外环境的约束条件下合理调配人力、物力、财力等资源，使实际系统有效运行的技术科学。它可以用来预测系统发展趋势、制订行动规划或优选可行方案。第二次世界大战中，盟军科学家在研究如何有效地使防空作战系统运行，合理配置雷达站，使整个空军作战系统协调配合在有效地防御德军波音机入侵的过程中发展形成运筹学。二战以后，研究军事运筹学的科学家纷纷转向民用部门，加速并促进了运筹学在社会经济领域中的应用。运筹学模型在各个领域中的广泛应用，确立了它在现代科学技术、生产实践以及经济管理中的重要地位。现在运筹学已经成为数学、管理类等专业的专业基础课，也是一些工科专业的必修课。

“运筹学”主要是利用数学工具研究、解决实际问题，因此这门课程本身不同于一般的数学课程，它具有“五多一少”的特点，即模型多、算法多、表格多、图形多、案例多、理论推导少。本书是在总结多年的《运筹学》教学经验基础上编写而成的，同时固化了教学改革成果并体现了数学建模思想。在编著过程中，根据课程的特点，以建立数学模型为主线，介绍各种模型算法为载体，最终以解决实际问题为目的，结合数学软件的使用，使学生学以致用，学用结合。与此同时，由于这门课程有大量的表格及图形，采用传统的授课方式效率低下，因此还研制了与本教材相配套的多媒体课件。“运筹学多媒体课件”经过六年的完善和使用，现已日臻成熟，具有图面美观、动态感强、与讲授同步、可二次开发以及操作简单等特点，深受广大师生的喜爱。与此同时，为了实现模型的求解，在各部分结合实际算例分别介绍了LINGO软件在求解模型中的应用以及源程序，使读者可以根据算例的源程序非常容易地求解其他模型，达到“即学即用”的目的。

书中将运筹学理论与数学建模教育融为一体，并配有大量的基本技能训练和实践能力训练题，同时还有与之配套的《运筹学习题集》，供师生选用。为了配合数学建模训练，培养学生的实践创新能力，还编写了《运筹学案例库》，供学生课程设计以及建模竞赛培训使用。

在使用本书作为运筹学课程的教材时，线性规划模型、运输问题模型、整数规划模型这三部分是运筹学的基础，如果使用电子教案授课，需要20学时左右。其余部分相对独立，可以根据学时和专业的不同，选择不同的章节讲授。

由于运筹学应用的广泛性以及解决实际问题的有效性，它也是数学建模训练及各种数学建模竞赛必不可少的基础。本书可以作为数学建模活动的培训用书，也是参赛学生的必备参考书。

王文杰教授凭借二十多年的《运筹学》教学经验及其独到见解，在百忙之中认真、细致

地审阅了本书的全部书稿，并提出了许多非常中肯、宝贵的意见和修改建议，使得教材能够在保证质量的前提下顺利出版，在此表示衷心的感谢！

编写组的同仁们为本书的出版付出了艰辛的努力，在此表示诚挚的谢意！

由于编者水平有限，书中难免存在疏漏和不足，敬请读者批评指正。

编者

2007 年 3 月

目　录

第1章 线性规划模型
(Linear Programming)

线性规划是运筹学的一个重要分支，是近60年发展起来的一种数学规划方法，也是生产、科研和企业管理中应用广泛有效的一种优化技术。

在经济决策中，经常会遇到诸如在有限的资源（如人、原材料、资金等）情况下，如何合理安排生产，使效益达到最大；或者对给定的任务，如何统筹安排现有资源，能够完成给定的任务，使花费最小这类问题。这类现实中的优化问题，大都可以用线性规划的数学模型来描述。

1.1 线性规划模型实例

【例1-1】 （生产计划问题）某企业计划生产Ⅰ、Ⅱ两种产品。这两种产品都要分别在A、B、C、D四个不同设备上加工。按工艺资料规定，生产每件产品Ⅰ需占用各设备分别为2、1、4、0h，生产每件产品Ⅱ需占用各设备分别为2、2、0、4h。已知各设备计划期内用于生产两种产品的能力分别为12、8、16、12h，又知每生产一件产品Ⅰ企业能获得2元利润，每生产一件产品Ⅱ企业能获得3元利润，如表1-1所示。问该企业应如何安排生产，才能使总的利润最大。

表1-1

产品 \ 设备	A	B	C	D	利润（元/件）
Ⅰ	2	1	4	0	2
Ⅱ	2	2	0	4	3
生产能力（h）	12	8	16	12	

解 设x_1和x_2分别表示Ⅰ、Ⅱ两种产品在计划期内的产量。因设备A在计划期内的有效时间为12h，不允许超过，因此有$2x_1+2x_2\leqslant 12$。

对设备B、C、D也可列出类似的不等式$x_1+2x_2\leqslant 8$，$4x_1\leqslant 16$，$4x_2\leqslant 12$。

企业的目标是在各种设备允许的情况下，使总的利润收入$z=2x_1+3x_2$为最大。因此，该问题可归结为如下的数学模型

$$\max z = 2x_1 + 3x_2$$

$$\text{s. t.} \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \leqslant 12 \\ x_1 + 2x_2 \leqslant 8 \\ 4x_1 \leqslant 16 \\ 4x_2 \leqslant 12 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

【例 1-2】 （能源利用问题）假设某电厂以甲、乙、丙三种煤作为燃料煤，已知这三种煤的含硫量、发热量及价格，见表 1-2。现在要将上述三种煤混合燃烧，按锅炉要求，发热量不能低于 17000kJ/t；按环保要求，含硫量不能超过 0.025%。问应按什么比例将煤混合，才能使混合煤的价格最低？试建立其数学模型。

表 1-2

电厂	含硫量（%）	发热量（kJ/t）	价格（元/t）
甲	0.01	16000	80
乙	0.05	20000	70
丙	0.03	18000	76

解 设单位混合煤中甲、乙、丙种煤所占比例分别为 x_1、x_2、x_3，则有 $x_1+x_2+x_3=1$，且 x_1、x_2、x_3 均为非负值。

由锅炉对混合煤的要求，有

$$16000x_1+20000x_2+18000x_3 \geqslant 17000$$

由环保对混合煤的要求，有

$$0.01x_1+0.05x_2+0.03x_3 \leqslant 0.025$$

该问题的目标是在满足上述约束条件下使每吨混合煤的价格最低。用 z 表示其价格，则

$$z=80x_1+70x_2+76x_3$$

因此，该问题可归结为如下的数学模型

$$\min z=80x_1+70x_2+76x_3$$

$$\text{s. t.}\begin{cases}16000x_1+20000x_2+18000x_3 \geqslant 17000\\0.01x_1+0.05x_2+0.03x_3 \leqslant 0.025\\x_1+x_2+x_3=1\\x_1,x_2,x_3 \geqslant 0\end{cases}$$

【例 1-3】 （运输问题）假设某电力系统有三个火电厂 B1、B2、B3，它们每月需燃料煤分别为 10、20、25 万 t。供应这三个电厂燃料煤的煤矿有三个，即 A1、A2、A3，它们每月分别可供该电力系统燃料煤 15、25、15 万 t。已知各煤矿到各电厂的运输距离（单位：km），如表 1-3 所示。问如何确定调运方案，使总的运输量（总万吨公里数）最少？试建立其数学模型。

表 1-3

运距 / 电厂 / 煤矿	B1	B2	B3
A1	80	100	120
A2	70	120	90
A3	100	80	150

解 设煤矿 $A_i(i=1,2,3)$ 每月供给电厂 $B_j(j=1,2,3)$ 燃料煤 x_{ij} 万 t。

该问题的目标是在满足供需平衡的条件下使总运输量最少。设 z 表示总运输量，则该运

输问题的数学模型为

$$\min z = 80x_{11} + 100x_{12} + 120x_{13} + 70x_{21} + 120x_{22} + 90x_{23} + 100x_{31} + 80x_{32} + 150x_{33}$$

$$\text{s. t.}\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} = 15 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 25 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} = 15 \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} = 10 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 20 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 25 \\ x_{ij} \geqslant 0(i = 1,2,3; j = 1,2,3) \end{cases}$$

【例 1 - 4】 （配料问题）某染料厂要用甲、乙、丙三种原料混合配制出 A、B、C 三种不同的产品。原料甲、乙、丙每天的最大供应量分别为 100、100、60kg，每千克单价分别为 65、25、35 元。由于 A、B、C 三种产品的质量限制，要求产品 A 中含原料甲不少于 50%，含原料乙不超过 25%；产品 B 中含原料甲不少于 25%，含原料乙不超过 50%；产品 C 的原料配比没有限制，产品 A、B 含原料丙比例没有限制。产品 A、B、C 每千克的售价分别为 50、35、25 元。问应如何安排生产，才能使所获利润达到最大。

解　所谓安排生产，就是确定每天三种产品的产量以及每种产品中所用各种原料的数量。先将该“配料问题”描述为表 1 - 4 的形式。

表 1 - 4

含量 原料 / 产品	甲	乙	丙	千克售价（元）
A	⩾50%	⩽25%		50
B	⩾25%	⩽50%		35
C				25
千克单价（元）	65	25	35	
日供应量上限（kg）	100	100	60	

变量的假设见表 1 - 5。

表 1 - 5

原料 / 产品	甲	乙	丙
A	x_{11}	x_{12}	x_{13}
B	x_{21}	x_{22}	x_{23}
C	x_{31}	x_{32}	x_{33}

其中 x_{ij} 表示第 i 种产品中含第 j 种原料的数量。则此问题的数学模型为

$$\max z = 50(x_{11} + x_{12} + x_{13}) + 35(x_{21} + x_{22} + x_{23}) + 25(x_{31} + x_{32} + x_{33})$$
$$- 65(x_{11} + x_{21} + x_{31}) - 25(x_{12} + x_{22} + x_{32}) - 35(x_{13} + x_{23} + x_{33})$$

$$
\text{s. t.}\begin{cases}
\left.\begin{aligned}
&x_{11} \geqslant 50\% \times (x_{11}+x_{12}+x_{13})\\
&x_{12} \leqslant 25\% \times (x_{11}+x_{12}+x_{13})\\
&x_{21} \geqslant 25\% \times (x_{21}+x_{22}+x_{23})\\
&x_{22} \leqslant 50\% \times (x_{21}+x_{22}+x_{23})
\end{aligned}\right\}\text{原料配比约束}\\
x_{11}+x_{21}+x_{31} \leqslant 100, x_{12}+x_{22}+x_{32} \leqslant 100, x_{13}+x_{23}+x_{33} \leqslant 60 \quad \text{日供应量约束}\\
x_{ij} \geqslant 0 (i,j=1,2,3)
\end{cases}
$$

1.2 线性规划问题的数学模型

规划问题的数学模型包含三个组成要素：

1）决策变量，指问题中要确定的未知量。

2）目标函数，指问题所要达到的目标要求，表示为决策变量的函数。

3）约束条件，指决策变量取值时应满足的一些限制条件，表示为含决策变量的等式或不等式。

如果在规划问题的模型中，决策变量为可控变量，且取值是连续的，目标函数及约束条件都是线性的，这类模型叫做线性规划模型。

1.2.1 线性规划模型的一般表达形式

1. 一般形式

$$\max \text{或} (\min) z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

$$
\text{s. t.}\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leqslant (=, \geqslant) b_1\\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leqslant (=, \geqslant) b_2\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leqslant (=, \geqslant) b_m\\
x_1, x_2, \cdots, x_n \geqslant 0
\end{cases}
$$

此模型的简写形式为

$$\max \text{或} (\min) z = \sum_{j=1}^{n} c_jx_j$$

$$
\text{s. t.}\begin{cases}
\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant (=, \geqslant) b_i (i=1,\cdots,m)\\
x_j \geqslant 0 (j=1,\cdots,n)
\end{cases}
$$

2. 向量形式

$$\max \text{或} (\min) z = \boldsymbol{CX}$$

$$
\text{s. t.}\begin{cases}
\sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{P}_jx_j \leqslant (=, \geqslant) \boldsymbol{b}\\
x_j \geqslant 0 (j=1,\cdots,n)
\end{cases}
$$

式中：$\boldsymbol{C}=(c_1, c_2, \cdots, c_n)$；$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$；$\boldsymbol{P}_j=\begin{pmatrix}a_{1j}\\a_{2j}\\\vdots\\a_{mj}\end{pmatrix}$，$(j=1, 2, \cdots, n)$；$\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_m\end{pmatrix}$

3. 矩阵形式

$$\max \text{或}(\min) z = \boldsymbol{CX}$$

$$\text{s. t.} \begin{cases} \boldsymbol{AX} \leqslant (=, \geqslant) \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{X} \geqslant 0 \end{cases}$$

其中

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

式中：$\boldsymbol{A}$ 为约束方程组（约束条件）的系数矩阵。

1.2.2 线性规划模型的标准形式

为了研究问题的方便，规定线性规划问题的标准形式为

$$\max z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\text{s. t.} \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i & (i = 1, \cdots, m) \\ x_j \geqslant 0 & (j = 1, \cdots, n) \end{cases}$$

对标准形式说明如下：

1. 标准形式的线性规划模型中的要求

（1）目标函数为求最大值（有些文献上规定是求最小值）。

（2）约束条件全为等式，约束条件右端常数项 b_i 全为非负值。

（3）变量 x_j 的取值全为非负值。

2. 非标准形式的线性规划问题化为标准形式的方法

（1）目标函数为求最小值

$$\min z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

只需令 $z' = -z$，则目标函数化为 $\max z' = -\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ 。

（2）约束条件为不等式。

1）当约束条件为"≤"时，例如 $2x_1 + 2x_2 \leqslant 12$。

可令 $x_3 = 12 - 2x_1 - 2x_2$ 或者 $2x_1 + 2x_2 + x_3 = 12$。显然 $x_3 \geqslant 0$，称 x_3 为松弛变量。

2）当约束条件为"≥"时，例如 $10x_1 + 12x_2 \geqslant 18$。

令 $x_4 = 10x_1 + 12x_2 - 18$ 或者 $10x_1 + 12x_2 - x_4 = 18$。显然 $x_4 \geqslant 0$，称 x_4 为剩余变量。

松弛变量和剩余变量在实际问题中分别表示未被利用的资源数和短缺的资源数，均未转化为价值和利润。因此在目标函数中，松弛变量和剩余变量的系数均为零。

（3）无约束变量。设 x 为无约束变量，则令 $x = x' - x''$，$x' \geqslant 0$，$x'' \geqslant 0$ 即可。

无约束变量的实际含义：若变量 x 代表某产品当年计划数与上一年计划数之差，则 x 的取值可正可负。

【例 1-5】 将下述线性规划模型化为标准形式

$$\min z = -x_1 + 2x_2 + 3x_3$$

$$\text{s. t.}\begin{cases}2x_1+x_2+x_3\leqslant 9\\3x_1+x_2+2x_3\geqslant 4\\3x_1-2x_2-3x_3=-6\\x_1,x_2\geqslant 0,x_3\text{ 取值无约束}\end{cases}$$

解 令 $z'=-z$，$x_3=x_3'-x_3''(x_3'\geqslant 0,\ x_3''\geqslant 0)$，$x_4=9-2x_1-x_2-x_3'+x_3''$

$$x_5=3x_1+x_2+2x_3'-2x_3''-4,\ -3x_1+2x_2+3x_3'-3x_3''=6$$

按上述规则将问题转化为

$$\max z'=x_1-2x_2-3x_3'+3x_3''+0x_4+0x_5$$

$$\text{s. t.}\begin{cases}2x_1+x_2+x_3'-x_3''+x_4=9\\3x_1+x_2+2x_3'-2x_3''-x_5=4\\-3x_1+2x_2+3x_3'-3x_3''=6\\x_1,x_2,x_3',x_3'',x_4,x_5\geqslant 0\end{cases}$$

1.3 求解线性规划模型的图解法

线性规划模型的基本解法有图解法和单纯形法两种。图解法直观明了，但是只适用于两个变量的问题，目前常用的是单纯形法。

1.3.1 图解法步骤

第 1 步 画出由约束条件所确定的区域。

第 2 步 对任意确定的 z，画出目标函数所代表的直线。

第 3 步 平移目标函数直线，确定最优解。

1.3.2 实例

【例 1 - 6】 用图解法求例 1 - 1 的最优解

$$\max z=2x_1+3x_2$$

$$\text{s. t.}\begin{cases}2x_1+2x_2\leqslant 12\\x_1+2x_2\leqslant 8\\4x_1\leqslant 16\\4x_2\leqslant 12\\x_1,x_2\geqslant 0\end{cases}$$

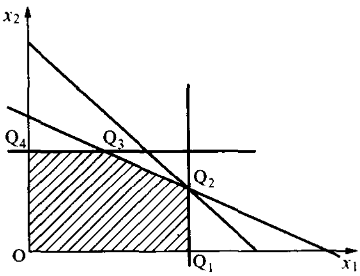

图 1 - 1 例 1 - 6 图（一）

解 由 4 个约束条件所确定的区域为图 1 - 1 的阴影部分：

目标函数 $z=2x_1+3x_2$ 表示一族直线，向右上方平移直线，与阴影区域的最后一个交点 Q_2 即为最优解点，如图 1 - 2 所示。此问题有惟一最优解。

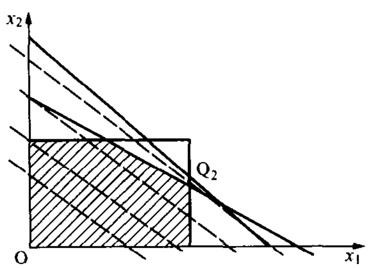

图 1 - 2 例 1 - 6 图（二）

【例 1 - 7】 将例 1 中的目标函数 $\max z=2x_1+3x_2$ 改为 $\max z=2x_1+4x_2$，则线性规划问题的最优解为图 1 - 3 中线段 Q_3Q_2 上的所有点。此问题有无穷多个最优解。

$$\max z = 2x_1 + 4x_2$$

$$\text{s. t.}\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \leqslant 12 \\ x_1 + 2x_2 \leqslant 8 \\ 4x_1 \leqslant 16 \\ 4x_2 \leqslant 12 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

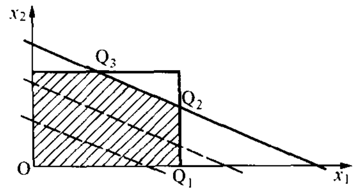

图 1-3　例 1-7 图

【例 1-8】　用图解法求下列线性规划问题的最优解

$$\max z = x_1 + 2x_2$$

$$\text{s. t.}\begin{cases} 2x_1 - x_2 \leqslant 4 \\ x_1 \leqslant 2 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

解　用图解法求解，如图 1-4 所示，此问题具有无界解（或称无最优解）。

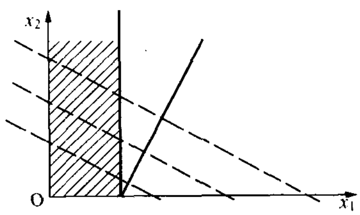

图 1-4　例 1-8 图

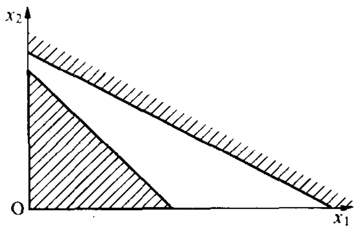

图 1-5　例 1-9 图

【例 1-9】　用图解法求下列线性规划问题的最优解

$$\max z = 2x_1 + 3x_2$$

$$\text{s. t.}\begin{cases} x_1 + x_2 \leqslant 6 \\ x_1 + 2x_2 \geqslant 14 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

解　用图解法求解，如图 1-5 所示，此问题无可行解。

对图解法给出以下三点说明：

(1) 对于例 1-8 和例 1-9，从理论上讲没有什么疑问。然而如果是某个实际问题的数学模型，就要考虑模型是否有误。前者可能缺少必要的约束条件，而后者则可能存在相互矛盾的约束条件。

(2) 从图解法可以直观地看到，当线性规划问题满足约束条件和非负限制的点集（可行域）非空时，它是有界或无界凸多边形。若线性规划问题存在最优解，则它一定在有界可行域的某个顶点达到。若在两个顶点同时达到最优解，则它们连线上的所有点都是最优解，即此时模型有无穷多最优解。

(3) 图解法虽然直观、简便，但是当变量数大于两个时，它就无能为力了。因此，下一节将介绍求解线性规划模型的代数方法——单纯形法。

1.4　单　纯　形　法

假设所要研究的线性规划模型的形式为

$$\max z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqslant b_i & (i = 1, \cdots, m) \\ x_j \geqslant 0 & (j = 1, \cdots, n) \end{cases}$$

这里要求所有约束条件都为"$\leqslant$"形式，约束条件为其他形式的线性规划模型的求解将在本章 1.5 中讨论。

1.4.1 标准形式及其解的若干说明

1. 标准形式

在第 i 个约束条件左端加上松弛变量 $x_{si}(i=1, 2, \cdots, m)$，化为标准形式

$$\max z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + 0 \sum_{i=1}^{m} x_{si}$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_{si} = b_i & (i = 1, \cdots, m) \\ x_{si}, x_j \geqslant 0 & (j = 1, \cdots, n) \end{cases} \tag{1-1}$$

其系数矩阵为
$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

2. 关于标准型解的若干说明

(1) 标准型有 $n+m$ 个变量，m 个约束行。

(2)"基"的概念：在标准型中，系数矩阵有 $n+m$ 列，即

$$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \cdots, \boldsymbol{P}_{n+m})$$

$\boldsymbol{A}$ 中任一个 m 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{P}_{1'}, \boldsymbol{P}_{2'}, \cdots, \boldsymbol{P}_{m'})$称为该标准型的一个基。$\boldsymbol{P}_{1'}, \boldsymbol{P}_{2'}, \cdots, \boldsymbol{P}_{m'}$称为基向量，与基向量对应的变量称为基变量，记为

$$\boldsymbol{X}_{\mathrm{B}} = (x_{1'}, x_{2'}, \cdots, x_{m'})^{\mathrm{T}}$$

其余的变量称为非基变量，记为

$$\boldsymbol{X}_{\mathrm{N}} = (x_{m+1'}, x_{m+2'}, \cdots, x_{m+n'})^{\mathrm{T}}$$

因此有 $\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{X}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{X}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$。由此可见，线性规划问题式 (1-1) 最多有 c_{m+n}^{m}个基。

(3) 可行解与可行域。满足约束条件和非负条件的解 $\boldsymbol{X}$ 称为可行解，可行解组成的集合称为可行域。

(4) 基本解。令非基变量 $\boldsymbol{X}_{\mathrm{N}}=0$，求得基变量 $\boldsymbol{X}_{\mathrm{B}}$ 的值，称 $\boldsymbol{X}$ 为基本解，其中 $\boldsymbol{X}_{\mathrm{B}}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$。

$\boldsymbol{X}$ 是基本解的必要条件为 $\boldsymbol{X}$ 的非零分量个数小于或等于 m。

(5) 基本可行解。基本解 $\boldsymbol{X}$ 的分量都大于或等于 0 时，称为基本可行解；否则称为基本非可行解。

基本可行解的非零分量个数小于 m 时，称为退化解。

1.4.2 单纯形法的理论依据

1. 基本概念

(1) 凸集：设 D 是 n 维欧氏空间的一个点集，如果对点集 D 中的任意两个点 X_1、X_2，

其连线上的所有点也都是点集 D 中的点，则称 D 为凸集。

用数学语言描述如下：若对任意 X_1、$X_2 \in D$，有 $aX_1+(1-a)X_2 \in D$（$0<a<1$），则称 D 为凸集。

下面 4 个图形中，(a)、(b) 为凸集，(c)、(d) 不是凸集。

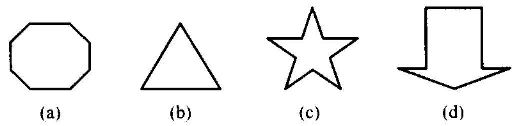

图 1 - 6

(2) 顶点：凸集 D 中满足下述条件的点 X 称为 D 的顶点：在 D 中不存在两个不同的点 X_1、X_2，使 X 为这两个点连线上的一个点。

用数学语言描述为：对任意 $X_1 \in D$，$X_2 \in D$，不存在 a（$0<a<1$），使

$$X = aX_1 + (1-a)X_2 \in D$$

2. 单纯形法的理论证明

定理 1.1　若线性规划问题存在可行解，则问题的可行域是凸集。

证明　设满足线性规划约束条件的所有点组成的集合为 D，下面证明 D 为凸集。

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{P}_j x_j = \boldsymbol{b} \\ x_j \geqslant 0 (j = 1,2,\cdots,n) \end{cases}$$

设 $\boldsymbol{X}_1=(x_{11},\ x_{12},\ \cdots,\ x_{1n})^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{X}_2=(x_{21},\ x_{22},\ \cdots,\ x_{2n})^{\mathrm{T}}$ 为 D 内任意两点，将 X_1、X_2 代入约束条件，有 $\sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{P}_j x_{1j} = \boldsymbol{b}$，$\sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{P}_j x_{2j} = \boldsymbol{b}$。由于 $\boldsymbol{X}_1$、$\boldsymbol{X}_2$ 连线上任意一点可以表示为

$$\boldsymbol{X} = a\boldsymbol{X}_1 + (1-a)\boldsymbol{X}_2 \quad (0 < a < 1)$$

将点 X 代入约束条件，得

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{P}_j x_j &= \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{P}_j [a x_{1j} + (1-a) x_{2j}] = \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{P}_j a x_{1j} + \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{P}_j x_{2j} - \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{P}_j a x_{2j} \\ &= ab + b - ab = b \end{aligned}$$

又因为 $\boldsymbol{X} \geqslant 0$，所以 $\boldsymbol{X}=a\boldsymbol{X}_1+(1-a)\boldsymbol{X}_2 \in D$，因此 D 为凸集。

证毕。

引理 1.1　线性规划问题的可行解 $\boldsymbol{X}=(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)^{\mathrm{T}}$ 为基本可行解的充要条件是 $\boldsymbol{X}$ 的正分量所对应的系数列向量线性无关。

证明　必要性。由基本可行解的定义显然可得。

充分性。不失一般性，若向量 $\boldsymbol{P}_1$，$\boldsymbol{P}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{P}_k$ 线性无关，则必有 $k \leqslant m$。当 $k=m$ 时，它们恰好构成一个基，从而 $\boldsymbol{X}=(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_m,\ 0,\ \cdots,\ 0)^{\mathrm{T}}$ 为相应的基本可行解；当 $k<m$ 时，一定可以从其余列向量中找出 $(m-k)$ 个向量与 $\boldsymbol{P}_1$，$\boldsymbol{P}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{P}_k$ 构成一个基，其对应的解恰好为 $\boldsymbol{X}$，所以由定义可知，它是基本可行解。

证毕。

定理 1.2　线性规划问题的基本可行解 $\boldsymbol{X}$ 对应线性规划问题可行域（凸集）的顶点。

证明　只需证明 $\boldsymbol{X}$ 是可行域的顶点当且仅当 $\boldsymbol{X}$ 是基本可行解，即证明 $\boldsymbol{X}$ 不是可行域的顶点当且仅当 $\boldsymbol{X}$ 不是基本可行解。设可行域为 D。