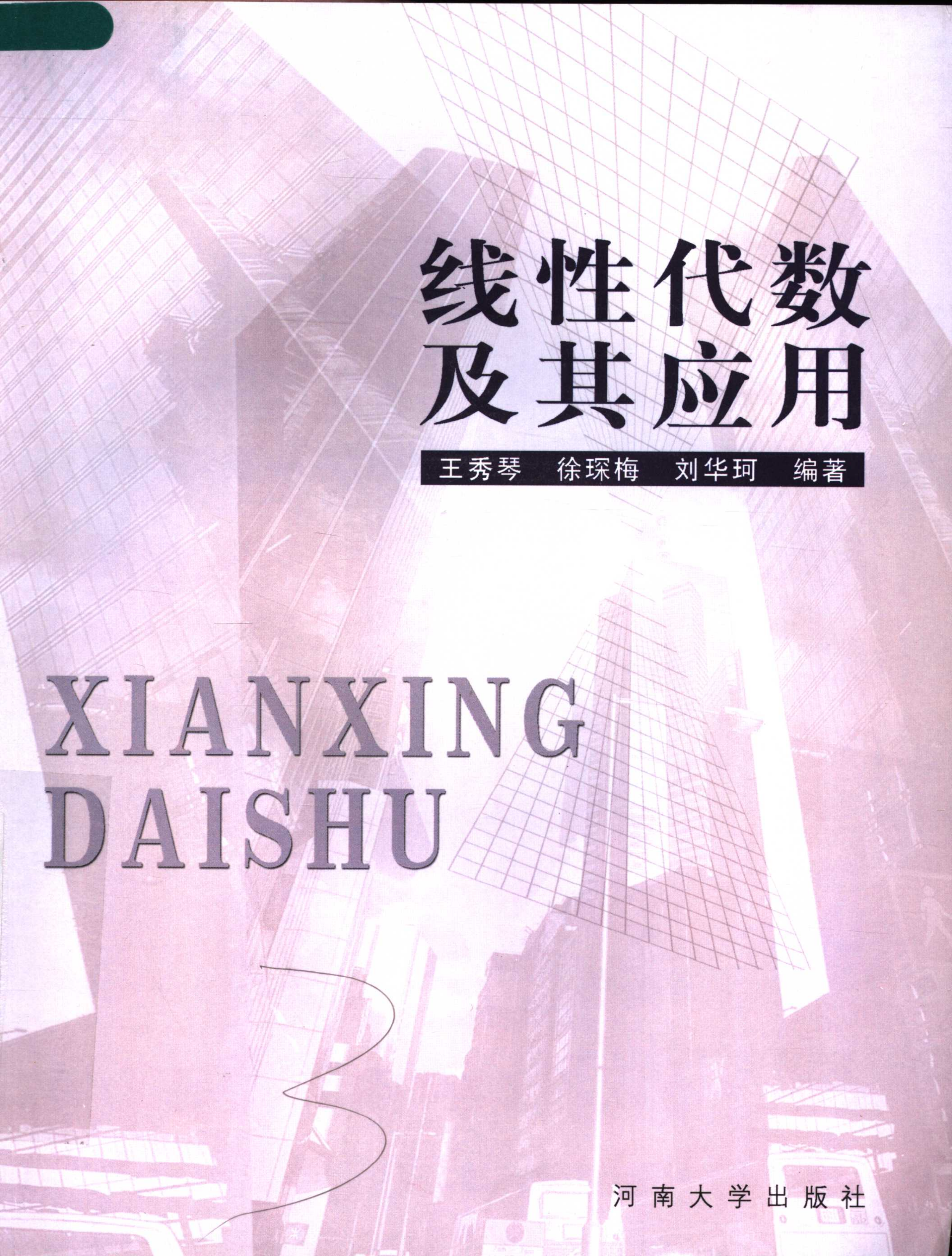


线性代数及其应用

王秀琴　徐琛梅　刘华珂　编著

XIANXING DAISHU

河南大学出版社

线性代数及其应用

XIANXING
DAISHU

O151.2/314
2007

河南大学教学改革项目资助

线性代数及其应用

王秀琴 徐琛梅 刘华珂 编著

河南大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

线性代数及其应用 / 王秀琴，徐琛梅，刘华珂编著. —开封：河南大学出版社，2007.9

ISBN 978-7-81091-662-2

Ⅰ.线… Ⅱ.①王… ②徐… ③刘… Ⅲ.线性代数—高等学校—教材 Ⅳ.O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 140604 号

责任编辑 程 庆
封面设计 马 龙

出 版 河南大学出版社
地址：河南省开封市明伦街 85 号　　邮编：475001
电话：0378-2864669（行管部）　　0378-2825001（营销部）
网址：www.hupress.com　　E-mail:bangong@hupress.com
印 刷 河南省瑞光印务股份有限公司
版 次 2007 年 9 月第 1 版　　**印次** 2007 年 9 月第 1 次印刷
开 本 787mm×1092mm 1/16　　**印张** 12.5
字 数 270 千字　　**印数** 1—2085 册

定 价 26.00 元

（本书如有印装质量问题，请与河南大学出版社营销部联系调换）

前 言

在人们的传统观念里，数学只是理工类大学生解决专业实际问题的一个工具，因此学生学习数学时仅仅满足于学习算法，会套用模式进行计算．然而随着时代的进步，科学技术、计算技术的飞速发展，数学的应用取得了许多重要进展．数学在高科技、提高生产力以及加强系统管理乃至社会生活科学化等方面的重要性日益被人们所认识，数学思想、数学方法比任何时候都更受到人们的关注．数学素质被作为当代大学生素质的一个重要组成部分而受到重视．在数学教育中，培养学生的数学素养，提高学生学习能力、应用能力已成为更多数学教育工作者自觉担负的一项重要使命．我们编写本书的指导思想是：希望学生在学习线性代数基本知识的同时，了解学习线性代数的意义、知识的应用情况及应用方法，以便在教学中培养他们从实践中抽象数学问题的能力和解决实际问题的能力．本书根据我们多年从事线性代数、运筹学、数学模型教学和实践活动的经历编写而成，是教育部《新世纪高等教育教学改革工程本科教育教学改革项目》研究成果之一，同时也受到河南大学教学改革项目的资助．

在编写方面，我们坚持以突出主线、分散难点为原则，力求内容充实，论理严谨，难易适当．前三章以矩阵为主线展开讨论，内容涵盖线性代数课程的基本要求．第 1 章包括矩阵的运算、行列式、初等变换和秩；第 2 章介绍线性方程组和向量空间的基本概念；第 3 章介绍矩阵的特征值、特征向量和二次型．这种整合使学生在学习向量秩的概念之前，对“秩”的概念有一个直观认识，从而降低学习难度．第 4 、第 5 两章是为适应不同专业需要而编写的．其中第 4 章包括常用线性代数数值计算方法，第 5 章介绍用线性代数方法解决实际问题的有关内容，包括投入产出分析、线性规划和层次分析法．每章末介绍的 Matlab 知识，可以作为相关知识入门的阅读材料，也可以在教师指导下有计划地学习．这些内容对于提高学生解决实际问题的能力是有帮助的．

本书在内容取舍方面参考了近年全国统考高等数学内容，在习题处理方面也做了相应考虑．前三章中设立的附加题，既为学生进一步理解和掌握线性代数内容所需，又可为学生考研复习所用．

在编写过程中，我们特别注意了以下几个方面：

1. 突出数学思想，尽量从实例和相关知识点引入概念，以便读者了解数学概念是怎样来源于实践并服务于实践的，这对于掌握从实践中抽象数学问题和理解抽象的数学概念是很有帮助的．

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

2. 内容紧凑，主线突出，适应当前课时较少的教学环境.

3. 本书介绍了目前较为流行的 Matlab 语言入门知识，这一数学工具对于理、工、经、管等专业学生解决实际问题，应是比较有帮助的.

4. 章前摘录数学家简介，章末附相关阅读材料. 这些内容对于读者了解数学家的奋斗经历，学习他们的人生经验，了解该章知识的有关应用以及提高学习数学的兴趣都会起到积极作用.

本教材的编写得到教育部高教司新世纪高等教育教学改革工程本科教育教学改革立项项目和河南大学第七批教学改革项目的支持，受到清华大学姜启源教授的热情鼓励和支持. 河南大学近年参加全国大学生数学建模竞赛的部分同学认真阅读全书稿，他们中肯的建议使本书更切合当今大学生的实际情况. 河南大学出版社程庆、王四朋同志对本书的出版给予了大力支持和热情帮助，编者在此一并向他们表示诚挚的感谢.

编者谫陋，不当之处恳请读者批评指正.

王秀琴 2007.6.

目 录

第1章 矩 阵

数学家华罗庚

华罗庚（1910~1985），蜚声中外的中国数学家，曾任中科院学部委员，中科院副院长，美国科学院外籍院士，第三世界科学院院士，德国巴伐利亚科学院院士．他把自己毕生的精力，投入到发展祖国的科学事业、特别是数学研究事业之中．他的研究成果被国际数学界命名为“华氏定理”、“布劳威尔-加当-华定理”、“华-王方法”．他是我国最早把数学理论研究和生产实践紧密结合做出巨大贡献的科学家．他的名字已载入国际著名科学家的史册．

华罗庚名言：

✧ 科学的灵感，决不是坐等可以等来的．如果说，科学上的发现有什么偶然机遇的话，那么这种“偶然的机遇”只能给那些学有素养的人，给那些善于独立思考的人，给那些具有锲而不舍精神的人，而不是给懒汉．

✧ 科学上没有平坦的大道，真理长河中有无数礁石险滩．只有不畏攀登的采药者，只有不怕巨浪的弄潮儿，才能登上高峰采得仙草，深入水底觅得骊珠．

✧ 凡是较有成就的科学工作者，毫无例外地都是利用时间的能手，也都是决心在大量时间中投入大量劳动的人．

✧ 人做了书的奴隶，便把活人带死了．把书作为人的工具，则书本上的知识便活了，有了生命力了．

本章基本概念

矩阵、行列式、初等变换、初等方阵、矩阵的秩、可逆矩阵．

本章基本运算

矩阵的加法、数乘、转置、乘法运算；方阵的行列式、逆矩阵、矩阵秩的计算方法．

本章基本要求

在掌握基本概念的基础上，熟练掌握矩阵的各种运算；

熟练计算数字行列式，熟练掌握求矩阵秩的方法．

矩阵理论是线性代数的主要研究对象之一，是在自然科学、社会科学、经济管理等领域中有着广泛应用背景的简便数学工具．矩阵也是贯穿本书的一个基本概念．

1.1 矩阵的概念

实践中人们经常会遇到各种各样的数字表格，它们所代表的实际意义千差万别，但它们在形式、性质方面却有着某些共同点．请看下面几个例子．

1.1.1 几个产生矩阵问题的例子

例 1 某种物资从 3 个生产地 A_1，A_2，A_3 运往 4 个城市 B_1，B_2，B_3，B_4 销售，其调运方案可用如下形式的“运输方案表”表示：

销地 / 产地	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}
A_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}
A_3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}

其中 $a_{ij}(i=1,2,3; j=1,2,3,4)$ 表示从生产地 A_i 运往销售地 B_j 的货物数量．

例 2 5 支球队的比赛结果可用如下的表格形式表示：

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
A_1	0	3	2	−2	1
A_2	−3	0	1	2	−1
A_3	−2	−1	0	2	1
A_4	2	−2	−2	0	2
A_5	1	1	−1	−2	0

表中第 i 行、第 j 列 $(i,j=1,2,\cdots,5)$ 的数表示第 i 个球队 A_i 赢第 j 个球队 A_j 的分数．

例 3 某企业用原料 A，B，C 加工生产甲、乙两种产品，每种产品所需原料及原料供应量、产品的单位利润如下表所示：

产品 / 原料	甲	乙	供应量（kg）
A	2	4	16
B	4	3	18
C	2	5	12
单位利润（百元）	3	2	

以上这些例子，人们都用“数表”的形式给出所需要的信息．这些数表有一个共同特点：排列有序且不能随意交换位置．人们关心的是这些数字以及它们之间的顺序关系或更深层的含义．因此人们从这类特征中抽象出排列有序的矩形数表，以便用数学方法进行深入的研究，这就产生了矩阵的概念．

“矩阵”一词是英国著名数学家西尔维斯特于 1850 年首先使用的．

1.1.2 矩阵定义

定义 1.1 由数域 P 中 $m\times n$ 个数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$按一定次序排成的一个 m 行 n 列数表

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

称为 P 上一个 m 行 n 列**矩阵**，简称为 $m\times n$ 矩阵．

矩阵中的数称为矩阵的**元素**，其中第 i 行与第 j 列交叉点上的数称为矩阵的 i-j 元．

通常用大写黑体字母 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 或缩写符号(a_{ij})等表示一个矩阵．当需要说明矩阵的行数 m 和列数 n 时，可用符号 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 或 $(a_{ij})_{m\times n}$ 表示．

元素都是实数的矩阵称为**实矩阵**，元素中有虚数的矩阵称为**复矩阵**．

两个矩阵的行数、列数都分别相等时，称它们是**同型矩阵**．

例 4 初等数学中介绍的三元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3, \end{cases}$$

又称为线性方程组，其中未知量的系数按照它们在方程组中的位置构成一个 3×3 矩阵

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},$$

称为此方程组的**系数矩阵**；未知量的系数和常数项构成一个 3×4 矩阵

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{bmatrix},$$

称为此方程组的**增广矩阵**．

定义 1.2 对于两个同型矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$，当且仅当 $a_{ij}=b_{ij}$

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

$(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$ 时，称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相等，记为 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

例如
$$\begin{bmatrix} a & 3 & 2 \\ -1 & b & c \\ 1 & 5 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & d & f \\ -1 & 0 & 1 \\ g & 5 & 9 \end{bmatrix},$$
当且仅当 $a=2$，$b=0$，$c=1$，$d=3$，$f=2$，$g=1$ 时成立.

1.1.3 几类特殊形式的矩阵

每个元素都是零的矩阵称为**零矩阵**. 本书中用 $\boldsymbol{0}$ 表示零矩阵.

行数 m 和列数 n 相等的矩阵称为 n 阶**方阵**，n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 可以用符号 $\boldsymbol{A}_n$ 表示. 在 n 阶方阵中，自左上角至右下角的元素构成的对角线称为该方阵的**主对角线**. 主对角线上（下）侧元素都是零的矩阵称为**下（上）三角矩阵**. 主对角线两侧元素都是零的矩阵称为**对角矩阵**. 例如
$$\begin{bmatrix} 9 & 5 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$
分别是 4 阶上三角矩阵和 4 阶下三角矩阵，其中第三个矩阵的形式较特殊，称为一个 4 阶的若当块. 而
$$\begin{bmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$$
是 n 阶对角矩阵，这样的对角矩阵可简记为 $\operatorname{diag}(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，即
$$\operatorname{diag}(a_1,a_2,\cdots,a_n) = \begin{bmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{bmatrix}.$$

主对角线上元素都是 1 的 n 阶对角矩阵称为 n 阶**单位矩阵**，用 $\boldsymbol{E}$ 表示，
$$\boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix}_n .$$

单位矩阵和零矩阵将在矩阵运算中起特殊作用.

只有一行（一列）的矩阵也称为 n 维行（列）向量（n 是这个向量中元素的个数）. 显然，一个 m 行、n 列的矩阵中包含 m 个 n 维行向量和 n 个 m 维列向量. 行向量的元素间常用逗号隔开，如 $[a_1, a_2, \cdots, a_n]$ 表示一个 n 维行向量.

习 题 1-1

1. 写出一个 3×4 矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{3\times4}$，其中 $a_{ij}=2j-i$，$(i=1,2,3;\quad j=1,2,3,4)$.

2. 分别写出一个 4 阶上三角形矩阵和一个 4 阶下三角形矩阵，使其对角线上的元素均不为零.

3. 据统计，三种食品 A_1，A_2，A_3 在四家商店 B_1，B_2，B_3，B_4 中的销售数量如下表所示：

商店 \ 食品	A_1	A_2	A_3
B_1	9	7	18
B_2	30	8	17
B_3	13	14	8
B_4	29	19	10

用矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$形式表示表中的数量信息，其中 a_{ij} 表示第 i 种食品 A_i 在第 j 个商店 B_j 的销售量.

4. 分别写出下列方程组的系数矩阵和增广矩阵：

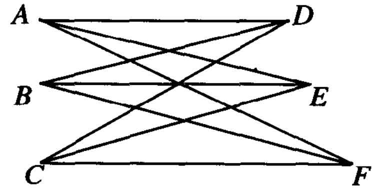
$$(1)\ \begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=2, \\ \qquad\ \ x_2+\ \ x_3=1, \\ \qquad\qquad\quad x_3=5; \end{cases} \qquad (2)\ \begin{cases} 3x_1-\ \ x_2+x_3-\ \ x_4=1, \\ \ \ x_1+3x_2\qquad\ \ +\ \ x_4=5, \\ \qquad\quad x_2+x_3+5x_4=4. \end{cases}$$

5. 已知矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 3 & a & b \\ c & -2 & 5 \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} x & 2 & 5 \\ -2 & -2 & y \end{bmatrix},$$

当 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$ 时，求 a，b，c，x，y.

6. 一些城市间的公路网如右图所示. 图中 A，B，C 代表 a 省的 3 个城市，D，E，F 代表 b 省的 3 个城市，两点间的连线代表一条公路. 请在线旁标出数字表示这条公路的长度，并用矩阵形式表示该图



提供的信息.

7. 从你的专业课程中找一个可以用矩阵描述的问题，仿照第 3 题编写一个例子，并列出相应的矩阵.

1.2 矩阵的运算

正如我们已经知道的，对某一个实际问题建立了描述这个问题的数学模型后，需要通过数学运算求出它的解. 同样，对于矩阵，人们关心的问题不仅仅是数据间的排列顺序，更重要的是这些数据间的某种联系. 比如确定了一个运输方案后，需要确定运输费用，或经过一段时间运输后，需计算从各产地到各销地的总调运量. 因此有必要在矩阵间引入相应运算，并研究它们的性质. 这节我们在数的基本运算基础上引入矩阵运算并研究矩阵运算的性质，这包括矩阵的加法、减法、数乘、乘法及矩阵的转置运算.

1.2.1 矩阵的加法运算

定义 1.3 设

$$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix},$$

则 $m\times n$ 矩阵

$$\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{m\times n}=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}=\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}$$

称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的和，记为 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$.

矩阵的加法就是矩阵中对应位置的元素相加，因此只有同型矩阵才能相加.

例如 $$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

由于矩阵的加法归结为它们的元素相加，也就是数的加法，所以不难验证，对任意 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$，有:

(1) 结合律：$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$；

(2) 交换律：$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$；

(3) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{A}$，其中 $\boldsymbol{0}$ 是 $m\times n$ 零矩阵.

如下形式的矩阵

$$\begin{bmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{m1} & -a_{m2} & \cdots & -a_{mn} \end{bmatrix}$$

称为矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 的**负矩阵**，记作 $-\boldsymbol{A}$．显然，

$$\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{0}.$$

其中 $\boldsymbol{0}$ 是 $m\times n$ 零矩阵.

有了负矩阵概念，我们还可以定义矩阵减法为

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B}),$$

从而移项法则对矩阵加法成立，即

(4) 若 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$，则 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}-\boldsymbol{A}$.

例 1 将同一种物资从产地 A_1，A_2，A_3，A_4，A_5 运往四个城市 $\boldsymbol{B}_1$，$\boldsymbol{B}_2$，$\boldsymbol{B}_3$，$\boldsymbol{B}_4$ 时的两个调运方案分别为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 2 & 8 & 1 & 6 & 3 \\ 5 & 1 & 6 & 2 & 4 \\ 6 & 2 & 4 & 4 & 6 \\ 3 & 4 & 3 & 5 & 2 \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 3 & 3 & 2 & 5 & 1 \\ 6 & 4 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & 5 & 3 & 1 & 6 \\ 4 & 1 & 2 & 4 & 3 \end{bmatrix},$$

则

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 2+3 & 8+3 & 1+2 & 6+5 & 3+1 \\ 5+6 & 1+4 & 6+3 & 2+2 & 4+5 \\ 6+5 & 2+5 & 4+3 & 4+1 & 6+6 \\ 3+4 & 4+1 & 3+2 & 5+4 & 2+3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5 & 11 & 3 & 11 & 4 \\ 11 & 5 & 9 & 4 & 9 \\ 11 & 7 & 7 & 5 & 12 \\ 7 & 5 & 5 & 9 & 5 \end{bmatrix}.$$

矩阵 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 中第 i 行第 j 列处的元素，代表了从 A_i 到 $\boldsymbol{B}_j$ 两次调运物资数量之和.

1.2.2 矩阵的数乘运算

定义 1.4 矩阵

$$\begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{bmatrix}$$

称为数 k 与矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 的**乘积**，记为 $k\boldsymbol{A}$.

数 k 乘矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的结果，就是把 $\boldsymbol{A}$ 中每个元素都乘以 k 后得到的矩阵．由此不难验证，矩阵的数乘运算适合以下 4 条运算规律：

(5) $(k+l)\boldsymbol{A}=k\boldsymbol{A}+l\boldsymbol{A}$；

(6) $k(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=k\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{B}$；

(7) $(kl)\boldsymbol{A}=k(l\boldsymbol{A})$；

(8) $1\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$．

其中 k，l 是任意数，$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 是任意 $m\times n$ 矩阵．

当需要针对同一物资调运方案计算运输价钱时，如果每条线路上的单位运价都一样，就会用到矩阵的数乘运算．

1.2.3 矩阵的乘法运算

定义 1.5 设

$$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n},\quad \boldsymbol{B}=(b_{ij})_{n\times t},$$

那么矩阵 $\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{m\times t}$ 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 之积，记为 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}$，其中

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj},\quad i=1,2,\cdots,m;\quad j=1,2,\cdots,t.$$

显然在两个矩阵相乘时，只有当左因子 $\boldsymbol{A}$ 的列数与右因子 $\boldsymbol{B}$ 的行数相等时，两个矩阵相乘才有意义．矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 乘积的 i-j 元是左因子 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行与右因子 $\boldsymbol{B}$ 的第 j 列对应元素乘积之和．由此立即可知：

矩阵乘法运算不适合交换律，即一般说来，$\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$．

这是因为，其一，当 $\boldsymbol{AB}$ 有意义时，$\boldsymbol{BA}$ 不一定有意义．例如：

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&3\\2&1&0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}4&1&5\\0&2&4\\0&0&1\end{bmatrix},$$

则

$$\boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix}4&1&8\\8&4&14\end{bmatrix}.$$

而 $\boldsymbol{B}$ 有 3 列，$\boldsymbol{A}$ 有 2 行，所以 $\boldsymbol{BA}$ 无意义．

其二，即使 $\boldsymbol{AB}$，$\boldsymbol{BA}$ 都有意义，但它们的阶数不等，如

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3&2\\1&3\\2&4\end{bmatrix},\ \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0&1&2\\4&0&0\end{bmatrix},$$

则
$$AB=\begin{bmatrix}8&3&6\\12&1&2\\16&2&4\end{bmatrix},\ BA=\begin{bmatrix}5&11\\12&8\end{bmatrix},$$

此时 $\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$ 的阶数不等，所以 $\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$.

其三，$\boldsymbol{AB}$，$\boldsymbol{BA}$ 都有意义，$\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$ 是同阶方阵，但它们的对应元素不等，如

$$A=\begin{bmatrix}1&1\\-1&-1\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}2&3\\-2&-3\end{bmatrix},$$

则
$$AB=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix},\ BA=\begin{bmatrix}-1&-1\\1&1\end{bmatrix}.$$

这里虽然 $\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$ 都是 2 阶方阵，但其对应位置上的元素不相等，仍有 $\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$. 这个例子同时还表明：**两个非零矩阵的乘积可能等于零矩阵**. 因此由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}$ 未必能断言 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$ 或 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{0}$.

矩阵乘法不满足交换律，并不等于说，任何矩阵相乘都不能交换因子顺序. 例如直接计算即可知，对于任意一个 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$，有

$$E_mA=A,\ AE_n=A,$$

其中 $\boldsymbol{E}_m$，$\boldsymbol{E}_n$ 分别是 m 阶和 n 阶单位矩阵. 当 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵时，有

$$E_nA=A,\ AE_n=A.$$

当 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$ 时，我们说 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ **可交换**.

现在我们来证明**矩阵乘法满足结合律**，即：

(9) 若 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，$B=(b_{ij})_{n\times t}$，$C=(c_{ij})_{t\times s}$，那么 $(AB)C=A(BC)$.

证 首先，易见 $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}$ 和 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$ 都是 $m\times s$ 矩阵. 再来比较它们的对应元素. 对于 $i=1,2,\cdots,m$，$j=1,2,\cdots,s$，$(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}$ 的第 i-j 元是 $\boldsymbol{AB}$ 的第 i 行与 $\boldsymbol{C}$ 的第 j 列之积，即

$$\left[\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{k1},\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{k2},\cdots,\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kt}\right]\begin{bmatrix}c_{1j}\\c_{2j}\\\vdots\\c_{tj}\end{bmatrix}$$

$$=c_{1j}\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{k1}+c_{2j}\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{k2}+\cdots+c_{tj}\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kt}$$

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com