21世纪高职高专规划教材

应用高等数学（下册）

Yingyong Gaodeng Shuxue

◆ 易　敏 主编

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

21世纪高职高专规划教材

应用高等数学

（下　册）

主　编　易　敏

副主编　吕凤虎　张胜虎

凌和良　栾　辉

北京理工大学出版社

BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目（CIP）数据

应用高等数学．下册/易敏主编．—北京：北京理工大学出版社，2007.9

ISBN 978-7-5640-1111-6

Ⅰ．应… Ⅱ．易… Ⅲ．高等数学-高等学校-教材 Ⅳ．O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 148407 号

出版发行／北京理工大学出版社
社　　址／北京市海淀区中关村南大街 5 号
邮　　编／100081
电　　话／(010)68914775(办公室)　68944990(批销中心)　68911084(读者服务部)
网　　址／http：// www. bitpress. com. cn
经　　销／全国各地新华书店
印　　刷／保定市中画美凯印刷有限公司
开　　本／787 毫米×960 毫米　1/16
印　　张／18.75
字　　数／384 千字
版　　次／2007 年 9 月第 1 版　　2007 年 9 月第 1 次印刷
印　　数／1～5000 册　　责任校对／陈玉梅
定　　价／24.00 元　　责任印制／吴皓云

前　　言

数学的思想和方法广泛应用于工程技术、社会经济等领域，数学教育是高职高专教育中不可或缺的一部分. 数学教材建设是搞好高职高专数学教育的重要环节之一.

本套《应用高等数学》教材，根据教育部高教司关于高职高专高等数学的基本要求，贯彻“以应用为目的，以必需、够用为度”的原则，本着课程改革的目的，结合多年的教学实践，在以下几方面作了有益的尝试.

1. 引进了模块式教育理论. 在上册主要编入了一元函数微积分的内容，中册主要编入了多元函数微积分的内容，下册编入了线性代数、概率论与数理统计、积分变换等内容. 这样既满足不同专业对数学基本内容的不同要求，同时也满足不同学生对数学知识不同层次的需求；既满足了必修课开设的要求，又满足数学类公选课用书的要求. 这样，既便于教师教，也便于学生学.

2. 在内容编排上注意与初等数学的衔接性和高等数学前后知识的连贯性，结合学生的特点，注重从特殊到一般，从具体到抽象的认知规律，由浅到深，分散难点，突出重点.

3. 注重基本概念的引入，淡化定理的证明，简化数学的计算，强调知识的应用性. 部分定理采用几何直观的方法来解释和介绍，部分定理虽有证明，其目的是强调证明中的思路和方法，为学生解决实际问题提供方法上的指导. 同时选择了部分应用性较强的例题和习题，以提高学生应用数学知识解决实际问题的意识和能力.

4. 适当编入了与数学知识和内容相关的背景知识，目的是加深学生对数学思想和方法的理解，激发学生学习数学的兴趣，达到教书育人的目的.

上册由首南祺主编，参与编写的有冯丽萍、冯喜全、陈丽平老师；中册由程贤锋主编，参与编写的有陈嫄、饶三平、邸振老师；下册由易敏主编，参与编写的有吕凤虎、张胜虎、凌和良、栾辉老师. 在全书的编写过程中，得到了南昌工程学院理学系主任陆伟锋博士、高等数学教研室主任龚建华副教授、楼天容教授、金本清副教授、胡平波博士等人的大力支持和热心指导，在此对他们表示深深的感谢！

由于水平有限，书中错误或不当之处在所难免，敬请读者不吝指正.

编　者

目　录

第十一章

行　列　式

行列式是线性代数的一个重要工具，在后继课程和工程技术中有着广泛的应用. 本章将在介绍二阶、三阶行列式的基础上给出 n 阶行列式的概念，进而介绍其性质，并讨论其在解线性方程组方面的应用.

第一节　行列式的概念及性质

一、行列式的概念

1. 二、三阶行列式的定义

行列式的概念首先是在求解方程组个数与未知量个数相同的一次方程组时提出来的（以后常把一次方程组称为线性方程组），例如对于一个二元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \tag{1}$$

为消去未知数 x_2，以 a_{22} 与 a_{12} 分别乘上列两方程的两端，然后两个方程相减，得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2$$

类似地消去 x_1，得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - b_1a_{21}$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时，求得方程组（1）的解为

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}},\ x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \tag{2}$$

记 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$，称 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ 为二阶行列式. 一般用大写字母 D 来表示.

则可将二元线性方程组的解表示为 $x_1=\dfrac{D_1}{D}$, $x_2=\dfrac{D_2}{D}$. 其中,

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},\ D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},\ D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

例 1 解方程组

$$\begin{cases} 2x-3y=3 \\ x+y=4 \end{cases}$$

解

$$D=\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=2\times1-(-3)\times1=5,$$

$$D_1=\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}=3\times1-(-3)\times4=15,$$

$$D_2=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}=2\times4-3\times1=5.$$

所以原方程组的解为

$$x=\frac{D_1}{D}=3,\ y=\frac{D_2}{D}=1$$

对于由 9 个元素 $a_{ij}(i,j=1,2,3)$ 排成三行三列的式子定义为

$$D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-$$

$$a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31} \tag{3}$$

并称它为三阶行列式.

式（3）中的六项是按下面式（4）所示的方法（称为对角线法则）得到的

$$\begin{array}{ccccc} & & (-) & (-) & (-) \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\ & & (+) & (+) & (+) \end{array} \tag{4}$$

我们可以把 D_3 的计算式整理成为

$$D_3 = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$
$$= a_{11}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

这里，分别与 a_{11}, a_{12}, a_{13} 相乘的三个二阶行列式正好是在 D_3 中划去 a_{11}, a_{12}, a_{13} 所在的行和列后剩下的元素组成的，我们分别称之为 a_{11}, a_{12}, a_{13} 的余子式，依次记为 M_{11}, M_{12}, M_{13}；它们前面的（-1）的幂指数分别是这三个元素 a_{11}, a_{12}, a_{13} 的两个下标之和. 我们分别称

$$A_{11} = (-1)^{1+1}M_{11}，A_{12} = (-1)^{1+2}M_{12}，A_{13} = (-1)^{1+3}M_{13}$$

为 a_{11}, a_{12}, a_{13} 的代数余子式. 于是得到

$$D_3 = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} \tag{5}$$

这就是说，三阶行列式 D_3 等于它的第一行元素与各自的代数余子式乘积之和. 简言之，可以按其第一行展开.

同样

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} \tag{6}$$

其中

$$A_{11} = (-1)^{1+1}|a_{22}| = a_{22}, A_{12} = (-1)^{1+2}|a_{21}| = -a_{21}.$$

这里 $|a_{22}|$、$|a_{21}|$ 是一阶行列式（不是数的绝对值），我们把 a 的一阶行列式 $|a|$ 定义为 a.

如果把式（5）、式（6）作为三阶、二阶行列式的定义，那么这种定义的方法是统一的，它们都是用低阶行列式定义高一阶的行列式. 因此人们很自然地会想到，用这种递归的方法来定义一般的 n 阶行列式. 对于这样定义的各阶行列式，显然会有统一的运算性质. 下面我们给出 n 阶行列式的递归法定义.

2. n 阶行列式的定义

定义 由 n^2 个数 $a_{ij}(i, j = 1, 2, \cdots, n)$ 组成的 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{7}$$

是一个算式，当 $n = 1$ 时，$D = |a_{11}| = a_{11}$.

当 $n \geqslant 2$ 时，

$$D_n=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n} \tag{8}$$

其中 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$

$$M_{1j}=\begin{vmatrix}a_{21}&\cdots&a_{2\,j-1}&a_{2\,j+1}&\cdots&a_{2n}\\a_{31}&\cdots&a_{3\,j-1}&a_{3\,j+1}&\cdots&a_{3n}\\\vdots&&\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&\cdots&a_{nj-1}&a_{nj+1}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}\ (j=1,2,\cdots,n)$$

并称 M_{1j} 是元素 a_{1j} 的余子式，A_{1j} 称为元素 a_{1j} 的代数余子式. D_n 也可简记为 D 或 $\left|a_{ij}\right|_n$.

在式（7）中，$a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn}$ 所在的对角线称为行列式的主对角线，相应的 $a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn}$ 称为主对角元，另一条对角线称为行列式副对角线.

由定义可见，行列式这个算式是由其 n^2 个元素 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 的乘积构成的和式（称作展开式），二阶行列式的展开式中共有 2!项，三阶行列式的展开式中共有 3!项，n 阶行列式的展开式中共有 $n!$项；在 n 阶行列式的展开式中，每一项都是不同行不同列的 n 个元素的乘积；在全部 $n!$项中，带正号的项和带负号的项各占一半（以上结论可根据定义，用数学归纳法证明）；整个展开式是 n^2 个元素 a_{ij} 的 n 次齐次多项式. 当第一行元素为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 时，n 阶行列式是 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的一次齐次多项式.

例 2 求 n 阶下三角行列式（当 $i<j$ 时，$a_{ij}=0$，即主对角线以上元素全为 0）

$$D_n=\begin{vmatrix}a_{11}&0&\cdots&0\\a_{21}&a_{22}&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$$

证 由定理 1，依次按第一行展开，得

$$\begin{aligned}D_n&=a_{11}A_{11}+0\cdot A_{12}+\cdots+0\cdot A_{1n}\\&=a_{11}\cdot(-1)^{1+1}M_{11}\\&=a_{11}\begin{vmatrix}a_{22}&0&\cdots&0\\a_{32}&a_{33}&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n2}&a_{n3}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}\\&=\cdots\\&=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}\end{aligned}$$

同理可得，n 阶对角行列式和 n 阶上三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

例 3 计算下列三角行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \text{与} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

解

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{1n}(-1)^{1+n} \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & a_{2,n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{3,n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} \end{vmatrix}$$

$$= \cdots$$

$$= (-1)^{(n-1)+n+(n-1)+\cdots+2} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1} = (-1)^{(n-2)+n+(n-1)+\cdots+1} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$$

$$= (-1)^{n+\frac{n(n+1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1} = (-1)^{\frac{n(n+3)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$$

例如，当 $n=4,5$ 时，$D_4 = a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}, D_5 = a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}a_{55}$

当 $n=6,7$ 时，$D_6 = -a_{11}a_{22}\cdots a_{66}, D_7 = -a_{11}a_{22}\cdots a_{77}$

同理可得 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$.

二、行列式的性质

直接用行列式的定义计算行列式，在一般情况下是较繁的. 因此，我们要从定义推导出行列式的一些性质，以简化行列式的计算.

性质 1 行列式的行与列互换，行列式的值不变. 即设

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},\quad D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

D^{T} 称为 D 的转置行列式，则

$$D=D^{\mathrm{T}}$$

例如 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

性质 2 交换行列式的两行（列），行列式的值仅改变符号，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

例如 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

性质 3 （线性性质）行列式一行（列）中的公因子可以提到行列式记号外，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

例如 $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}$

性质 4 若行列式有两行（列）对应元素成比例，则该行列式的值为零，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=0$$

例如

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}=0$$

特别，当行列式中两行（列）对应元素相同，或有一行（列）为零时，该行列式的值为零.

性质 5 行列式某一行（列）的各元素是两个数之和时，该行列式可表示成两个行列式之和，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

例如

$$\begin{vmatrix} 1+3 & 2+2 & 3+1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

性质 6 行列式某一行（列）的各元素乘以某数加到另一行的对应元素上，所得行列式的值不变，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1}+ka_{i1} & a_{j2}+ka_{i2} & \cdots & a_{jn}+ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

例如，将

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & -1 \\ -1 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

的第 2 行各元素乘以 2，再加到第 3 行的对应元素上，行列式的值不变，即

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & -1 \\ -1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & -1 \\ 5 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

前面我们得到

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

和

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n} \tag{9}$$

这说明一个行列式等于它的第 1 行各元素与自己相应的代数余子式乘积之和，称式（9）为行列式按第 1 行展开. 由行列式的性质（1），我们可以得到行列式按第 1 列展开的性质

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + \cdots a_{n1}A_{n1} \tag{10}$$

进一步我们还可以得到行列式更具一般化的第 7 个性质.

性质 7 在行列式 D 中，任一行（列）的各元素与自己相应的代数余子式的乘积之和等于行列式的值，即

$$a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} = D \ (i = 1, 2, \cdots, n) \tag{11}$$

$$a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} = D (j = 1, 2, \cdots, n) \tag{12}$$

以上两式分别称为行列式按第 i 行的展开式和按第 j 列的展开式. 可简记为

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik} = D \ (i = 1, 2, \cdots, n) \text{ 及 } \sum_{k=1}^{n} a_{kj}A_{kj} = D \ (j = 1, 2, \cdots, n)$$

利用性质 7 及性质 4 还可以得到结论：行列式的任一行（列）的各元素与另一行（列）

对应元素的代数余子式乘积之和等于零，即

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0,$$
$$(i,j=1,2,\cdots,n,i\neq j)$$

及

$$a_{1j}A_{1i}+a_{2j}A_{2i}+\cdots+a_{nj}A_{ni}=0,$$
$$(i,j=1,2,\cdots,n,i\neq j)$$

可以缩写为

$$\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{jk}=0 \qquad (i\neq j)$$

及

$$\sum_{k=1}^{n}a_{kj}A_{ki}=0 \qquad (i\neq j)$$

于是性质 7 和上述结论可写成

$$\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{jk}=\begin{cases}D, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases} \tag{13}$$
$$(i=1,2,\cdots,n;j=1,2,\cdots,n)$$

及

$$\sum_{k=1}^{n}a_{ki}A_{kj}=\begin{cases}D, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases} \tag{14}$$
$$(i=1,2,\cdots,n;j=1,2,\cdots,n)$$

习题 11-1

1. 计算下列行列式:

（1）$\begin{vmatrix}3 & 7\\ -1 & 2\end{vmatrix}$　　（2）$\begin{vmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}$

（3）$\begin{vmatrix}1 & 4 & 2\\ 3 & 5 & 1\\ 2 & 1 & 6\end{vmatrix}$　　（4）$\begin{vmatrix}2 & -1 & 5\\ 3 & 1 & -2\\ 1 & 4 & 6\end{vmatrix}$

（5）$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ 0 & a_{22} & a_{23}\\ 0 & 0 & a_{33}\end{vmatrix}$　　（6）$\begin{vmatrix}c & 0 & 0\\ 0 & a_1 & a_2\\ 0 & b_1 & b_2\end{vmatrix}$

2. 用行列式解下列线性方程组:

（1）$\begin{cases}2x-3y=1\\ 4x+y=9\end{cases}$　　（2）$\begin{cases}2x-3y=0\\ 4x+y=0\end{cases}$

（3）$\begin{cases} 2x_1-3x_2+x_3=10 \\ x_1+4x_2-2x_3=-8 \\ 3x_1+2x_2-x_3=1 \end{cases}$

第二节　行列式的计算

这一节，我们通过例子来说明利用行列式的定义和性质计算 n 阶行列式的常用方法.

例 1　计算$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

解　我们以 r_i 表示行列式的第 i 行，以 c_i 表示第 i 列. 交换第 i,j 两行记作 $r_i \leftrightarrow r_j$，交换第 i,j 两列记作 $c_i \leftrightarrow c_j$，其余类似.

注意：用性质 6 对行列式作 $(-1)r_1+r_2$ 的变换，行列式的值不变，此时第一行各元素没变，而第二行各元素都加上了第一行对应元素的 (-1) 倍，这相当于对行列式进行了变换 r_2-r_1（第一行未变！）.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal[r_2-2r_1]{r_3-3r_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & -5 & -7 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_3-5r_2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 18 \end{vmatrix} = 1\times(-1)\times 18 = -18$$

例 2　计算行列式$\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 503 & 201 & 298 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix}$.

解　$$\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 503 & 201 & 298 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 500 & 200 & 300 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 0 + (-70) = -70$$

例 3　计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

解 $\begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$

$$\xlongequal[\substack{\cdots \\ c_1+c_n}]{\substack{c_1+c_2 \\ c_1+c_3}}\begin{vmatrix} a+(n-1)b & b & b & \cdots & b \\ a+(n-1)b & a & b & \cdots & b \\ a+(n-1)b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a+(n-1)b & b & b & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a+(n-1)b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$=[a+(n-1)b]\begin{vmatrix} 1 & b & b & \cdots & b \\ 1 & a & b & \cdots & b \\ 1 & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\substack{r_4+(-1)r_1 \\ \cdots \\ r_n+(-1)r_1}]{\substack{r_2+(-1)r_1 \\ r_3+(-1)r_1}}[a+(n-1)b]\begin{vmatrix} 1 & b & b & \cdots & b \\ 0 & a-b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix}$$

$$=[a+(n-1)b](a-b)^{n-1}$$