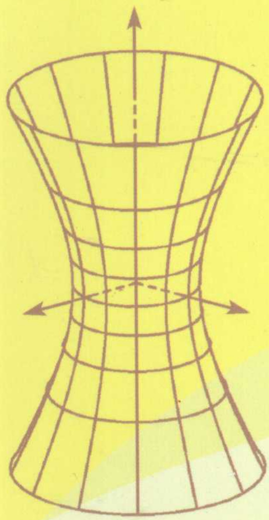
普通高等教育"十一五"国家级规划教材

高等数学

（下 册）

柴 俊 丁大公 陈咸平 等 编



科学出版社
www.sciencep.com

内容简介

本书分上、下两册，上册内容包括极限，一元微积分学，空间解析几何；下册包括多元微分，重积分，线、面积分，微分方程及差分方程初步．内容安排由浅入深，既有基本理论和方法的论述，又有应用背景的介绍；对难度较大的内容做了分阶段逐步深入的处理．习题配备难度适中，按基本题、较难题、总练习题三种层次安排．为便于教学，随书还配有一个包含基于 Maple 软件的数学实验例子和基于 Flash 软件的动态演示课件的光盘．

本书适合师范院校和一般综合性大学对数学要求比较高的非数学理科专业大学生使用．

图书在版编目(CIP)数据

高等数学．下册/柴俊等 编．—北京：科学出版社，2007

(普通高等教育“十一五”国家级规划教材)

ISBN 978-7-03-019537-1

Ⅰ．高…　Ⅱ．柴　Ⅲ．高等数学-高等学校-教材　Ⅳ．O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007) 第 119467 号

责任编辑：姚莉丽／责任校对：曾　茹
责任印制：张克忠／封面设计：陈　敬

科学出版社出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

源海印刷有限责任公司 印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2007 年 10 月第 一 版　开本：B5(720×1000)
2007 年 10 月第一次印刷　印张：19 3/4
印数：1—4 000　字数：372 000

定价：28.00 元(含光盘)

(如有印装质量问题，我社负责调换〈新欣〉)

《高等数学》参编人员

主　编　柴　俊

编　委　(以姓氏笔画为序)

丁大公　汪元培　陈咸平

赵书钦　闻人凯　夏小张

柴　俊

前　言

高等数学是非数学理工科各专业重要的数学基础课程, 对培养学生的思维能力、数学应用能力和分析判断能力有着非常重要的作用. 随着数学在各个学科专业中的应用越来越多, 高等数学教学受到的重视也在日益增加.

华东师范大学数学系在 20 世纪 80 年代编写出版过一系列的《高等数学》教材. 为了适应高等教育的迅速发展, 从 2001 年开始, 我们开始着手编写这本教材, 除了保持华东师范大学数学系在教材编写上 "体系严密、有利教学" 的优良传统外, 还积极吸取国内各类教材和国外教材的优点. 下面是本书的几个主要特点:

(1) 在内容处理上尽量符合学生思维的发展规律, 将定积分与不定积分统一处理, 尽可能反映人类认识数学的思维发展规律;

(2) 在概念处理上尽可能用直观的例子加深理解, 针对高等教育 "大众化", 各学科不断融合的趋势, 加入了数学在经济学、化学中应用等例子;

(3) 增加了 "差分方程" 等内容;

(4) 习题配置由浅入深, 并为每章配置了总练习题, 帮助学生检查学习效果;

(5) 为方便教学, 随书提供一个包含基于 Maple 软件的数学实验例子和基于 Flash 软件的动态演示课件的光盘.

本书共分上、下两册, 上册内容包括极限, 一元微分和积分, 空间解析几何; 下册内容包括多元微分, 重积分, 线、面积分, 微分方程以及差分方程初步. 建议教学时数为 160~200.

本书的编写工作由柴俊主持, 并写了主要章节的前言. 第 1、2、11 章由柴俊编写; 第 3~6、10 章由丁大公编写; 第 7 章由陈咸平编写; 第 8 章由闻人凯编写; 第 9 章由夏小张编写; 第 12、13 章由汪元培编写; 赵书钦为本书绘制了插图, 编写了 Maple 实验. 最后由柴俊对全书进行了修改, 并对全书的文字做了必要的加工.

本书的出版得到了华东师范大学教材建设基金的资助. 华东师范大学数学系对本书的编写和出版给予了大力支持, 科学出版社的编辑也付出了辛勤的劳动, 华东师范大学数学系韩士安、汪晓勤、王一令对本书的修改提出了宝贵的意见, 在此表示衷心的感谢. 同时还要感谢在本书编写和出版过程中提供过帮助的所有朋友.

尽管我们在出版前试用、修改了多次, 但难免还有缺点和疏漏之处, 恳请使用本书的教师和读者批评指正.

编　者

2006 年 10 月于华东师范大学

目　录

第 8 章　多元函数微分学及其应用

上册讨论的函数都只有一个自变量, 这种函数称为一元函数. 在实际问题中, 还会遇到一个变量依赖于多个变量的情况, 这就产生了多元函数的概念. 本章讨论多元函数的微分学及其应用, 在讨论中以二元函数为主, 这是因为从一元函数到二元函数会产生新的问题, 可以类推到二元以上的多元函数. 在学习中应重点掌握一元函数与二元函数在许多知识点上的相同点和不同点.

8.1　多元函数的基本概念

8.1.1　点集知识简介

讨论一元函数时, 经常用到邻域和区间的概念. 由于讨论多元函数的需要, 需将邻域和区间的概念加以推广.

1. 邻域

定义 8.1.1　设 $P(a,b)$ 是 xOy 平面上的一个点, δ 是某一正数. 与点 $P(a,b)$ 距离小于 δ 的点 $Q(x,y)$ 的全体, 称为点 P 的 δ **邻域**, 记为 $U(P,\delta)$, 即

$$U(P,\delta)=\left\{(x,y)|\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}<\delta\right\}.$$

在邻域 $U(P,\delta)$ 中除去点 P 得到的平面点集, 称为点 P 的 δ **去心邻域**, 记为 $U^{\circ}(P,\delta)$, 即

$$U^{\circ}(P,\delta)=\left\{(x,y)|0<\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}<\delta\right\}.$$

当不需要强调邻域半径 δ 时, 点 P 的邻域和去心邻域可分别记为 $U(P)$ 和 $U^{\circ}(P)$.

2. 内点、外点、边界点和聚点

定义 8.1.2　设 E 是 xOy 平面上的点集, 点 P_0 是 xOy 平面上的点.

(1) 若存在 $\delta>0$, 使得 $U(P_0,\delta)\subset E$, 则称点 P_0 为点集 E 的**内点**.

(2) 若存在 $\eta>0$, 使得 $U(P_0,\eta)\cap E=\varnothing$, 则称点 P_0 为 E 的**外点**.

(3) 若对任意 $\varepsilon>0$, 在 $U(P_0,\varepsilon)$ 内既有 E 的点又有不属于 E 的点, 则称点 P_0 为 E 的**边界点**.

边界点可能属于 E, 也可能不属于 E. E 的边界点的全体称为 E 的**边界**, 记为 ∂E.

(4) 若对于任意 $\varepsilon > 0$, 总有 $U^\circ(P_0, \varepsilon) \cap E \neq \varnothing$, 则称点 P_0 为 E 的聚点.

显然, 点集 E 的内点一定是 E 的聚点, 外点一定不是聚点, 边界点可能是聚点, 也可能不是聚点.

例 8.1.1 $E = \left\{(x, y) | x^2 + y^2 = 0 \text{ 或 } 1 < x^2 + y^2 \leqslant 4\right\}$.

如图 8.1, $P_0(1,1)$ 是 E 的内点, $P_1(2,2)$ 是 E 的外点, $P_2(1,0)$, $P_3(2,0)$ 及 $P_4(0,0)$ 都是 E 的边界点, 其中 P_3, P_4 是 E 中的点, P_2 不是 E 中的点; P_2, P_3 是 E 的聚点, P_4 不是 E 的聚点.

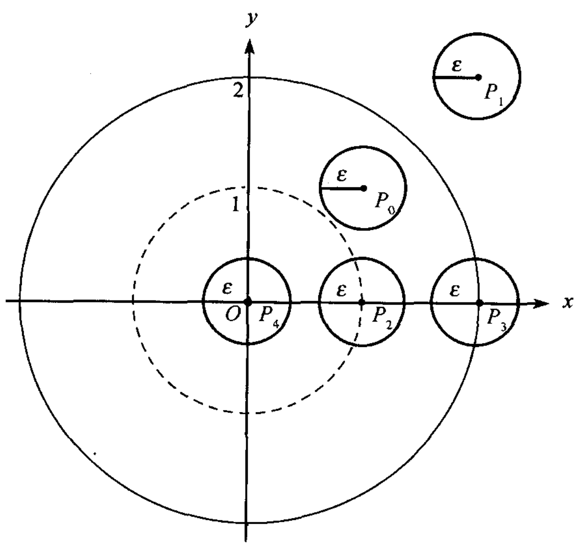


图 8.1

3. 开集与区域

定义 8.1.3 E 是 xOy 平面上的点集, 若 E 中每一点都是 E 的内点, 则称 E 为**开集**.

定义 8.1.4 E 是 xOy 平面上的点集, 若对 E 中任意两点, 都可以用若干条含于 E 内的直线段组成的折线相连接, 则称 E 是**连通**的.

定义 8.1.5 若 xOy 平面上的点集 E 是连通的开集, 则称 E 为**开区域**, 简称**区域**. 开区域连同它的边界一起称为**闭区域**.

例如, $E_1 = \left\{(x, y) | 1 < x^2 + y^2 < 4\right\}$ 和 $E_2 = \{(x, y) | x + y - 1 > 0\}$ 是区域, $E_3 = \left\{(x, y) | x^2 + y^2 < 1 \text{ 或 } x^2 + y^2 > 4\right\}$ 是开集但不是区域, $E_4 = \{(x, y) | 1 \leqslant$

$x^2+y^2 \leqslant 4\}$ 是闭区域.

定义 8.1.6 E 是 xOy 平面上的点集, 若存在 $k>0$, 使得 $E \subseteq U(O,k)$, 其中 O 为原点, 则称点集 E 为**有界集**, 否则称为**无界集**.

上面给出的 E_1, E_4 为有界集, E_2, E_3 为无界集.

4. *n* 维空间

我们知道 $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ 和 $\mathbb{R}^3$ 分别表示实数、二元有序实数组 (x,y) 和三元有序实数组 (x,y,z) 的全体. 它们分别对应于直线、平面和空间. 一般对确定的自然数 n, 我们称 n 元有序实数组 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的全体为 n 维空间, 记作 $\mathbb{R}^n$. 称 n 元有序实数组 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中的一个点, 数 x_i 为该点的第 i 个分量.

$\mathbb{R}^n$ 中两点 $P(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 与 $Q(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ 之间的**距离**定义为

$$\|PQ\|=\sqrt{(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2+\cdots+(y_n-x_n)^2},$$

当 $n=1,2,3$ 时上式就是直线、平面、空间两点间的距离.

前面针对平面点集引入的概念可推广到 n 维空间中, 如对 $P\in\mathbb{R}^n$ 和 $\delta>0$, n 维空间中的点集

$$U(P,\delta)=\{Q|\,\|PQ\|<\delta,\ Q\in\mathbb{R}^n\}$$

就定义为点 P 的 δ 邻域. 以邻域为基础, 可定义点集的内点、外点、边界点和聚点, 并进一步建立区域等概念.

8.1.2 多元函数的概念

1. 二元函数的概念

定义 8.1.7 设有三个变量 x, y, z, 其中 x, y 在平面点集 D 中取值. 对每一个有序实数对 $(x,y)\in D$, 按着某个确定的对应法则 f, 变量 z 总有唯一确定的值与之对应, 则称对应法则 f 是定义在点集 D 上的**函数**, 记作 $z=f(x,y)$, 其中 x, y 为函数 f 的**自变量**, z 为函数 f 的**因变量**, D 为函数 f 的**定义域**. 与点 $(x_0,y_0)\in D$ 对应的值 $z_0=f(x_0,y_0)$ 称为函数 f 在点 (x_0,y_0) 处的函数值. 函数值的全体

$$W=\{\,z|z=f(x,y),\quad (x,y)\in D\,\}$$

称为函数 f 的**值域**.

与一元函数一样, 要求对定义域中每一个有序实数对 (x,y), 只有唯一确定的值 z 与之对应, 这样定义的函数称为**单值函数**. 如果不只一个 z 值与之对应, 则为**多值函数**. 本书不作特别说明时, 讨论的函数均为单值函数.

我们常常会遇到二元函数的例子, 如圆柱体的体积 V 是它的底面半径 r 和高 h 的函数: $V=\pi r^2 h$, 定义域 $D=\{(r,h)|r>0,\ h>0\}$.

又如电阻 R_1,R_2 并联后的总电阻 R 是 R_1 和 R_2 的函数: $R=\dfrac{R_1R_2}{R_1+R_2}$, 定义域 $D=\{(R_1,R_2)|R_1>0,\ R_2>0\}$.

与一元函数一样, 二元函数的两个基本要素也是**定义域与对应法则**.

实际问题中定义域由问题的实际意义所确定, 如上面刚刚提到的两个例子. 对于一般用解析式表示的二元函数, 约定使解析表达式有意义的所有 (x,y) 组成的集合为函数的自然定义域. 例如, 函数 $z=\ln(x+y)$ 的定义域为 $D=\{(x,y)|x+y>0\}$, 这是一个无界区域. 又如函数 $z=\arcsin(x^2+y^2)$ 的定义域是 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 1\}$, 这是一个有界的闭区域.

2. 二元函数的图形

设 f 是定义域为 D 的二元函数, 空间点集

$$S=\{(x,y,z)|z=f(x,y),\ (x,y)\in D\}$$

为 f 的图形. 二元函数的图形是具有方程 $z=f(x,y)$ 的曲面 (图 8.2). 这个曲面在坐标平面 xOy 上的投影就是函数的定义域 D.

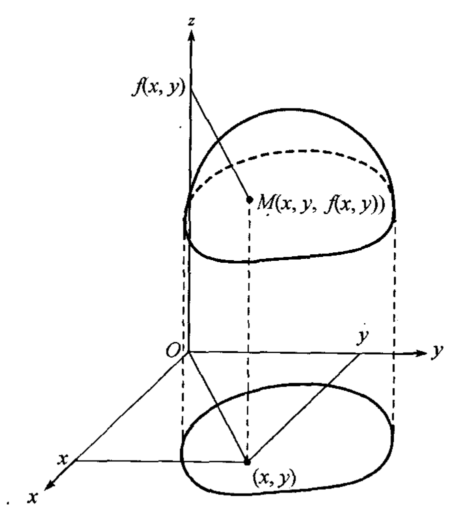


图 8.2

二元函数的例子: $z=\sqrt{1-x^2-y^2}(x^2+y^2\leqslant 1)$ 是以原点为球心, 半径为 1 的球的上半球面; $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 是以原点为顶点, 开口向上的圆锥面.

3. 多元函数的概念

将定义 8.1.7 中三个变量改成 $n+1$ 个变量 $u, x_1, x_2, \cdots, x_n$, 平面点集 D 改成 n 维空间点集 D, 可类似定义 n 元函数 $u=f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, 也可简记为 $u=f(P), P(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in D$.

与前面类似, 当函数用解析式表示时, 定义域为使解析式有意义的所有自变量取值的集合. 当 $n \geqslant 3$ 时, 无法画出函数的图形.

8.1.3 多元函数的极限

考虑二元函数 $z=f(x,y)$, 当 (x,y) 无限接近于 (x_0,y_0) 时, 如果函数值 z 无限接近于 A, 则称当 (x,y) 趋向于 (x_0,y_0) 时, 函数值 $f(x,y)$ 以 A 为极限.

定义 8.1.8 设函数 $z=f(x,y)$ 在点集 D 上有定义, $P_0(x_0,y_0)$ 是 D 的聚点, A 为常数. 若对任意的 $\varepsilon>0$, 总存在 $\delta>0$, 使得当

$$0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta \quad 且 \quad P(x,y) \in D$$

时, 有

$$|f(x,y)-A|<\varepsilon,$$

则称常数 A 为函数 $f(x,y)$ 在 D 上当 $P(x,y) \to P_0(x_0,y_0)$ 时的极限, 记作

$$\lim_{\substack{P(x,y) \to P_0(x_0,y_0) \\ P \in D}} f(x,y)=A.$$

在对 $P(x,y) \in D$ 不会产生误解时, 也可简单地记作

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y)=A \ 或 \lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} f(x,y)=A \ 或 \ f(x,y) \to A \quad (\rho \to 0),$$

其中 $\rho=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$.

为了区别于一元函数的极限, 我们把上述二元函数的极限称为**二重极限**.

例 8.1.2 证明 $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{3x^2y}{x^2+y^2}=0$.

证 因为 $\left|\dfrac{3x^2y}{x^2+y^2}-0\right| \leqslant 3|y| \leqslant 3\sqrt{x^2+y^2}$, 所以, 对任意的 $\varepsilon>0$, 可取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{3}$, 当 $0<\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}=\sqrt{x^2+y^2}<\delta$ 时, 总有 $\left|\dfrac{3x^2y}{x^2+y^2}-0\right|<\varepsilon$ 成立, 因此 $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{3x^2y}{x^2+y^2}=0$.

这里需要特别强调指出, 二重极限 $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y)=A$ 是指无论动点 (x,y) 以何种方式趋于定点 (x_0,y_0), 函数值 $f(x,y)$ 都趋于 A. 如果 (x,y) 仅以某种特殊的方式,

如沿着一条固定的直线或曲线趋于 (x_0,y_0) 时, 即使 $f(x,y)$ 无限接近某一定值, 也不能断定函数的二重极限存在. 但是反过来, 如果 (x,y) 以不同的方式趋于 (x_0,y_0) 时, $f(x,y)$ 趋于不同的值, 则可以肯定函数的二重极限不存在.

例 8.1.3 设 $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$, 讨论 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$ 是否存在.

解 当 (x,y) 沿 x 轴趋于 (0,0) 时, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=0}} \dfrac{xy}{x^2+y^2}=\lim\limits_{x\to 0} 0=0$;

当 (x,y) 沿 y 轴趋于 (0,0) 时, $\lim\limits_{\substack{x=0\\ y\to 0}} \dfrac{xy}{x^2+y^2}=\lim\limits_{y\to 0} 0=0$.

虽然 (x,y) 以上述两种特殊方式趋于原点时, 函数的极限存在且相等, 但这并不能断定函数的二重极限存在. 因为当 (x,y) 沿直线 $y=kx$ 趋于 $(0,0)$ 时,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx}} \frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot kx}{x^2+(kx)^2}=\frac{k}{1+k^2},$$

它随 k 的值不同而改变, 所以极限不存在.

例 8.1.4 设 $f(x,y)=\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$, 讨论 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$ 是否存在.

解 仿照例 8.1.3 的方法, 让 (x,y) 沿直线 $y=kx$ 趋于定点 $(0,0)$, 有

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx}} \frac{x^2y}{x^4+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{kx^3}{x^4+k^2x^2}=0.$$

但仍然不能断定 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$ 存在. 因为当 (x,y) 沿着曲线 $y=kx^2$ 趋于 $(0,0)$ 时, 有

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx^2}} \frac{x^2y}{x^4+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{kx^4}{x^4+k^2x^4}=\frac{k}{1+k^2},$$

它随 k 值的不同而变化, 所以 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$ 不存在.

以上关于二元函数极限的概念可相应地推广到 n 元函数 $u=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的情形.

多元函数极限的定义与一元函数的定义有完全相同的形式, 因此一元函数极限的性质, 如极限的唯一性、局部有界性、局部保号性及夹逼定理等都可以推广到多元函数时的情形.

关于多元函数的极限运算, 有与一元函数类似的极限运算法则.

例 8.1.5 求 $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ y\to 0}} \dfrac{\sin(xy)}{y}$.

解 函数的定义域 $D=\{(x,y)|y\neq 0\}$, $P(3,0)$ 是 D 的聚点. 因为

$$\lim_{\substack{x\to 3\\ y\to 0}} xy=3\times 0=0,\quad \lim_{\substack{x\to 3\\ y\to 0}} \frac{\sin(xy)}{xy}=1,$$

所以

$$\lim_{\substack{x\to 3\\ y\to 0}}\frac{\sin(xy)}{y}=\lim_{\substack{x\to 3\\ y\to 0}}\frac{\sin(xy)}{xy}\cdot x=3.$$

8.1.4 多元函数的连续性

定义 8.1.9 设二元函数在点集 D 内有定义, $P_0(x_0,y_0)$ 是 D 的聚点且点 $P_0\in D$. 如果

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=f(x_0,y_0),$$

则称函数 $f(x,y)$ 在点 P_0 处连续, P_0 称为函数 $f(x,y)$ 的连续点; 否则称 $f(x,y)$ 在 P_0 点不连续或间断, P_0 称为 $f(x,y)$ 的间断点.

如果函数 $f(x,y)$ 在开区域 (或闭区域)D 的每一点都连续, 则称函数 $f(x,y)$ 在 D 内连续, 或称函数 $f(x,y)$ 是 D 内的连续函数.

以上关于二元函数连续性的概念可以推广到 n 元函数 $f(P)$.

可以看出, 多元函数的连续性的定义与一元函数的连续性的定义本质上是一致的.

因为一元函数中关于极限的运算法则对于多元函数仍然适用, 因此多元连续函数的和、差、积仍是连续函数. 在分母不为零处连续函数的商仍是连续函数. 多元连续函数的复合函数也是连续函数.

多元初等函数是指由常数及具有不同自变量的一元基本初等函数经过有限次四则运算和复合运算得到的, 并且能用一个公式表达的多元函数. 例如:

$$z=x^2+y^2,\quad z=\frac{x-y}{x+y},\qquad z=\mathrm{e}^{x^2y},\quad u=\sin(x^2+y^2+z^2)$$

等都是多元初等函数.

由上面指出的连续函数的和、差、积、商的连续性及连续函数的复合函数的连续性, 可知**一切多元初等函数在其定义区域内是连续的**.

设 $f(P)$ 是初等多元函数, 定义域为 D. 由多元初等函数的连续性, 若 $P_0\in D$, 且点 P_0 是 D 的聚点, 则 $\lim\limits_{P\to P_0}f(P)=f(P_0)$.

例 8.1.6 求极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sqrt{xy+1}-1}{xy}$.

解 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sqrt{xy+1}-1}{xy}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy+1-1}{xy(\sqrt{xy+1}+1)}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{1}{\sqrt{xy+1}+1}=\dfrac{1}{2}$.

与闭区间上连续一元函数一样, 闭区域上连续多元函数也有一些很好的性质.

定理 8.1.1 (最值定理)　若函数 $f(P)$ 在有界闭区域 D 上连续, 则它在 D 上必有最大值和最小值, 即存在两点 P_1, $P_2 \in D$, 使得对于任意 $P \in D$, 有

$$f(P_1) \leqslant f(P) \leqslant f(P_2).$$

定理 8.1.2 (介值定理)　若函数 $f(P)$ 在有界闭区域 D 上连续, 并且 $f(P)$ 在 D 上取得两个不同的函数值 $f(P_1)$ 和 $f(P_2)$(无妨设 $f(P_1) < f(P_2)$), 则对任何满足 $f(P_1) < \mu < f(P_2)$ 的值 μ, 都至少存在一点 $P_0 \in D$, 使得 $f(P_0) = \mu$.

* **定理 8.1.3** (一致连续性定理)　若函数 $f(P)$ 在有界闭区域 D 上连续, 则它在 D 上一致连续, 即对于任意 $\varepsilon > 0$, 总存在 $\delta > 0$, 使得对 D 内任意两点 P_1, P_2, 只要 $\|P_1P_2\| < \delta$, 就有 $|f(P_1) - f(P_2)| < \varepsilon$.

习　题　8.1

1. 求下列函数的定义域:

(1) $z = \sqrt{x - \sqrt{y}}$;

(2) $z = \ln(y - x) + \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$;

(3) $u = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2 - z^2} + \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - r^2}} \quad (R > r > 0)$;

(4) $u = \arccos \dfrac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

2. 求下列多元函数的极限:

(1) $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ y \to 0}} \dfrac{\ln(x + \mathrm{e}^y)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$;　　(2) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{2 - \sqrt{xy + 4}}{xy}$;

(3) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 5}} \dfrac{\sin xy}{x}$;　　(4) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{1 - \cos(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)\mathrm{e}^{x^2 y^2}}$;

(5) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} (x^2 + y^2)^{xy}$.

3. 证明下列极限不存在:

(1) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{x + y}{x - y}$;　　(2) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x - y)^2}$.

4. 讨论下列函数在点 $(0, 0)$ 处的连续性:

(1) $f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \ln(x^2 + y^2), & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0; \end{cases}$

(2) $f(x, y) = \begin{cases} (x + y) \cos \dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0; \end{cases}$