打造精英

QUANXI JINGJIE

高等数学

【高教·同济·第五/第四版合订本】

王宇翔 编著

●重点、难点全析 ●习题全解

全析精解

西北工業大學出版社

高等数学全析精解

（高教·同济·第五/四版合订本）

王宇翔　编著

西北工业大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学全析精解/王宇翔编著．西安:西北工业大学出版社，2007.7

ISBN 978-7-5612-2230-0

Ⅰ.高… Ⅱ.王… Ⅲ.高等数学—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 086082 号

出版发行:西北工业大学出版社
通信地址:西安市友谊西路 127 号　**邮编**:710072
电　　话:(029)88493844　88491757
网　　址:www.nwpup.com
印 刷 者:陕西丰源印务有限公司
开　　本:850mm×1 168mm　1/32
印　　张:16.625
字　　数:549 千字
版　　次:2007 年 7 月第 1 版　2007 年 7 月第 1 次印刷
定　　价:22.00 元

前 言

高等数学是理工科院校的一门重要的基础课。我们依据理工科各专业的培养目标和特点，按照教育部最新制定的高等数学课程教学大纲的要求，为帮助读者在数学概念、计算技能和数学思维方面得到充分的训练，编写了这本参考书。

本书是按照同济大学应用数学系所编的《高等数学》(第五版)的章节顺序编写，共12章，每章分2个部分：

(1)重点、难点全析：对本章的重点与难点进行归纳总结；同时归纳重要的概念、内容与公式。

(2)习题全解：对同济大学数学教研室编写的《高等数学》的第五版和第四版的课后习题做了详细解答，以便读者掌握解题技巧，并从中掌握好基本概念。

注明：本书的习题全解是以第五版教材为蓝本，题目序号后中括号中的号码为第四版中的题号，对于第五版中没有第四版的习题解答全部归总在本章最后。

由于作者水平有限及撰稿时间仓促，书中难免有不妥之处，恳请读者批评指正，以便修改。

编　者

2007年3月

目　　录

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

第 1 章　函数与极限

1.1　重点、难点全析

重 点:函数的概念,初等函数的概念,复合函数的概念;数列极限和函数极限的概念,极限运算法则和极限存在准则;两个重要极限;无穷小阶的比较及等价无穷小在求极限中的应用;连续函数的概念和初等函数的连续性,间断点的概念和间断点类型的判断,闭区间上连续函数的性质.

难 点:复合函数,极限概念,极限存在的准则,连续函数的概念,闭区间上连续函数性质的应用.

1. 函数极限

函数极限的定义:

(1) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists X>0$,当 $|x|>X$ 时,恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

(2) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists\delta>0$,当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

2. 两个重要极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e} \quad \text{或} \quad \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$$

3. 函数的连续性

(1) 定义:若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$,则称 $f(x)$ 在 x_0 处连续.

初等函数在其定义区间内都是连续的.

(2) 闭区间上连续函数的性质:① 有界性;② 最值定理;③ 介值定理;④ 零

点存在定理.

(3) 函数的间断点:

① 第一类间断点:左、右极限都存在的间断点,有可去间断点及跳跃间断点.

② 第二类间断点:左、右极限不都存在的间断点,有无穷间断点及振荡间断点.

4. 数列极限

(1) 数列极限的定义:

$\lim\limits_{n\to\infty}x_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N$,当 $n > N$ 时,恒有 $|x_n - a| < \varepsilon$.

(2) 收敛数列的性质:

① 若数列$\{x_n\}$收敛,则其极限必惟一.

② 若数列$\{x_n\}$收敛,则数列$\{x_n\}$一定有界.

③ 若数列$\{x_n\}$收敛于 a,则它的任一子数列也收敛于 a.

(3) 数列收敛性的判别定理:① 夹逼定理. ② 单调有界数列必有极限.

5. 无穷小与无穷大

(1) 无穷小:

① 定义:以零为极限的变量称作无穷小量.

② 无穷小的阶:设 $\alpha(x),\beta(x)$ 都是自变量 x 在同一变化过程中的无穷小,且 $\alpha \neq 0$,

$$\lim \frac{\beta}{\alpha} = \begin{cases} 0 & \text{称}\ \beta\ \text{是比}\ \alpha\ \text{高阶的无穷小,记作}\ \beta = o(\alpha) \\ \infty & \text{称}\ \beta\ \text{是比}\ \alpha\ \text{低阶的无穷小} \\ c \neq 0 & \text{称}\ \beta\ \text{与}\ \alpha\ \text{是同阶无穷小} \\ 1 & \text{称}\ \beta\ \text{与}\ \alpha\ \text{是等价无穷小,记作}\ \alpha \sim \beta \end{cases}$$

若 $\lim \frac{\beta}{\alpha^k} = c \neq 0, k > 0$,称 β 是关于 α 的 k 阶无穷小.

③ 无穷小的运算性质:有限个无穷小的和仍为无穷小. 有限个无穷小的乘积仍为无穷小. 无穷小与有界函数的乘积仍为无穷小. 求两个无穷小之比的极限时,分子及分母可用等价无穷小来代替.

(2) 无穷大:绝对值无限增大的变量叫无穷大. 无穷小(不取零值)的倒数

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

为无穷大,反之无穷大的倒数为无穷小.

1.2　习题全解

习题1—1解答

1. 设 $A=(-\infty,-5)\cup(5,+\infty)$, $B=[-10,3)$,写出 $A\cup B$, $A\cap B$, $A\backslash B$ 及 $A\backslash(A\backslash B)$ 的表达式.

解　$A\cup B=(-\infty,3)\cup(5,+\infty)$,　$A\cap B=[-10,-5)$

$A\backslash B=(-\infty,-10)\cup(5,+\infty)$,　$A\backslash(A\backslash B)=[-10,-5]$

2. 设 A,B,C 是任意三个集合,证明:对偶律 $(A\cap B)^C=A^C\cup B^C$.

证明　任取 $x\in(A\cap B)^C\Rightarrow x\notin A\cap B\Rightarrow x\in A^C$ 或 $x\in B^C\Rightarrow x\in A^C\cup B^C$,所以

$$(A\cap B)^C\subset A^C\cup B^C$$

又,$x\in A^C\cup B^C\Rightarrow x\in A^C$ 或 $x\in B^C\Rightarrow x\notin A$ 或 $x\notin B\Rightarrow x\notin A\cap B\Rightarrow x\in(A\cap B)^C$,所以

$$A^C\cup B^C\subset(A\cap B)^C$$

综上可得　$$(A\cap B)^C=A^C\cup B^C$$

3. 设映射 $f:X\to Y$, $A\subset X$, $B\subset X$. 证明:

(1) $f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$;　(2) $f(A\cap B)\subset f(A)\cap f(B)$.

证明　(1) 设 $x\in A\cup B$,则 $x\in A$ 或 $x\in B\Rightarrow f(x)\in f(A)$ 或 $f(x)\in f(B)\Rightarrow f(x)\in f(A)\cup f(B)$,则 $f(A\cup B)\subset f(A)\cup f(B)$.

又设 $y=f(x)\in f(A)\cup f(B)\Rightarrow y\in f(A)$ 或 $y\in f(B)\Rightarrow x\in A$ 或 $x\in B\Rightarrow x\in A\cup B\Rightarrow y\in f(A\cup B)$,则 $f(A)\cup f(B)\subset f(A\cup B)$.

综上可得　$$f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$$

(2) 设 $y=f(x)\in f(A\cap B)\Rightarrow x\in A\cap B\Rightarrow x\in A$ 且 $x\in B\Rightarrow f(x)\in f(A)$ 且 $f(x)\in f(B)\Rightarrow f(x)\in f(A)\cap f(B)$,则

$$f(A\cap B)\subset f(A)\cap f(B)$$

4. 设映射 $f:X\to Y$,若存在一个映射 $g:Y\to X$,使 $g\circ f=I_X$, $f\circ g=I_Y$,其中 I_X,I_Y 分别是 X,Y 上的恒等映射,即对于每一个 $x\in X$,有 $I_Xx=x$;对于每一个 $y\in Y$,有 $I_Yy=y$. 证明:f 是双射,且 g 是 f 的逆映射:$g=f^{-1}$.

证明　要证 f 为双射,需证 f 为满射且为单射.

对于任意的 $y \in Y$，有 $I_Y y = y$. 而 $I_Y = f \circ g$，于是 $(f \circ g)(x) = y$，即 $f[g(y)] = y$，令 $x = g(y)$，则 $f(x) = f[g(y)] = y$，由于 $g: Y \to X$，因此 $x = g(y) \in X$. 则对于任意的 $y \in Y$，存在 $x \in X$，使 $f(x) = y$，由定义知，f 为满射.

对于 X 中任意两个元素 x_1，x_2，且 $x_1 \neq x_2$，要证明 $f(x_1) \neq f(x_2)$，用反证法：假设 $f(x_1) = f(x_2)$，则 $g[f(x_1)] = g[f(x_2)]$，由 $I_X = g \circ f \Rightarrow x_1 = x_2$ 知，与已知矛盾.

由定义知，f 为单射. 故 f 为双射.

要证 g 是 f 的逆映射，需知 f 是单射，而由上面证明可知 f 是单射，根据定义，g 是 f 的逆映射.

5. 设映射 $f: X \to Y$，$A \subset X$. 记 $f(A)$ 的原像为 $f^{-1}(f(A))$，证明：

(1) $f^{-1}(f(A)) \supset A$；　　(2) 当 f 是单射时，有 $f^{-1}(f(A)) = A$.

证明　(1) 对于任意的 $x \in A$，有 $y = f(x) \in f(A)$，从而 $f^{-1}(y) = x \in \{f^{-1}(y) \mid y \in f(A)\} = f^{-1}[f(A)]$，故 $A \subset f^{-1}[f(A)]$.

(2) 对于任意的 $x \in f^{-1}[f(A)]$，存在 $y \in f(A)$，有 $f^{-1}(y) = x$，即 $f(x) = y$. 由 $x' \in A$，得 $f(x') \in f(A)$，因为 f 是单射，则 $x = x' \in A$，从而 $f^{-1}[f(A)] \subset A$，所以 $f^{-1}[f(A)] = A$.

6. 求下列函数的定义域：

(1) $y = \sqrt{3x+2}$；　　(2) $y = \dfrac{1}{1-x^2}$；

(3) $y = \dfrac{1}{x} - \sqrt{1-x^2}$；　　(4) $y = \dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$；

(5) $y = \sin\sqrt{x}$；　　(6) $y = \tan(x+1)$；

(7) $y = \arcsin(x-3)$；　　(8) $y = \sqrt{3-x} + \arctan\dfrac{1}{x}$；

(9) $y = \ln(x+1)$；　　(10) $y = e^{\frac{1}{x}}$.

解　(1) 由 $3x+2 \geqslant 0 \Rightarrow x \geqslant -\dfrac{2}{3}$，可得函数的定义域为 $\left[-\dfrac{2}{3}, +\infty\right)$.

(2) 由 $1-x^2 \neq 0 \Rightarrow x \neq \pm 1$，可得函数的定义域为 $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$.

(3) 由 $x \neq 0$ 且 $1-x^2 \geqslant 0 \Rightarrow x \neq 0$ 且 $|x| \leqslant 1$，可得函数的定义域为 $[-1, 0) \cup (0, 1]$.

(4) 由 $4-x^2 > 0 \Rightarrow |x| < 2$，可得函数的定义域为 $(-2, 2)$.

(5) 由 $x \geqslant 0$,可得函数的定义域为$[0,+\infty)$.

(6) 由 $x+1 \neq k\pi+\frac{\pi}{2} \Rightarrow x \neq k\pi+\frac{\pi}{2}-1(k \in \mathbf{Z})$,可得函数的定义域为

$$\bigcup_{k\in \mathbf{Z}}\left(\left(k-\frac{1}{2}\right)\pi-1,\ \left(k+\frac{1}{2}\right)\pi-1\right)$$

(7) 由 $|x-3| \leqslant 1 \Rightarrow 2 \leqslant x \leqslant 4$,可得函数的定义域为$[2,4]$.

(8) 因为 $3-x \geqslant 0$ 且 $x \neq 0 \Rightarrow x \leqslant 3$ 且 $x \neq 0$,可得函数的定义域为$(-\infty, 0) \cup (0,3]$.

(9) 由 $x+1>0 \Rightarrow x>-1$,可得函数的定义域为$(-1,+\infty)$.

(10) 由 $x \neq 0$,可得函数的定义域为$(-\infty,0) \cup (0,+\infty)$.

7. [四:1-1(3)] 下列各题中,函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是否相同?为什么?

(1) $f(x)=\lg x^2$, $g(x)=2\lg x$;

(2) $f(x)=x$, $g(x)=\sqrt{x^2}$;

(3) $f(x)=\sqrt[3]{x^4-x^3}$, $g(x)=x\sqrt[3]{x-1}$;

(4) $f(x)=1$, $g(x)=\sec^2 x-\tan^2 x$.

解　(1) 不同,因为它们的定义域不同.

(2) 不同,因为它们的对应法则不同.当 $x<0$ 时,$g(x)=-x$.

(3) 相同,因为它们的定义域和对应法则均相同.

(4) 不同,因为它们的定义域不同.

8. [四:1-1(8)] 设 $\varphi(x)=\begin{cases}|\sin x|, & |x|<\frac{\pi}{3}\\ 0, & |x| \geqslant \frac{\pi}{3}\end{cases}$,求 $\varphi\left(\frac{\pi}{6}\right)$, $\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right)$, $\varphi\left(-\frac{\pi}{4}\right)$, $\varphi(-2)$,并作出函数 $y=\varphi(x)$ 的图形.

解　$\varphi\left(\frac{\pi}{6}\right)=\left|\sin\frac{\pi}{6}\right|=\frac{1}{2}$

$\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right)=\left|\sin\frac{\pi}{4}\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\varphi\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\left|\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\varphi(-2)=0$

$y=\varphi(x)$ 的图形如图 1.1 所示.

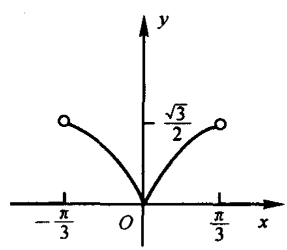

图　1.1

9. 试证下列函数在指定区间内的单调性：

(1) $y=\dfrac{x}{1-x}$, $x\in(-\infty,1)$；

(2) $y=x+\ln x$, $x\in(0,+\infty)$.

证明 (1) 设 $x_1,x_2\in(-\infty,1)$ 且 $x_1<x_2$，则

$$\frac{x_1}{1-x_1}-\frac{x_2}{1-x_2}=\frac{x_1-x_2}{(1-x_1)(1-x_2)}<0$$

可见 $y=\dfrac{x}{1-x}$ 在 $(-\infty,1)$ 上单调增加．

(2) 设 $x_1,x_2\in(0,+\infty)$ 且 $x_1<x_2$，则

$$x_1+\ln x_1-(x_2+\ln x_2)=(x_1-x_2)+\ln\frac{x_1}{x_2}<0$$

可见 $y=x+\ln x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调增加．

10. [四:1－1(13)] 设 $f(x)$ 为定义在 $(-l,l)$ 内的奇函数，若 $f(x)$ 在 $(0,l)$ 内单调增加，证明：$f(x)$ 在 $(-l,0)$ 内也单调增加．

证明 设 $x_1,x_2\in(-l,0)$ 且 $x_1<x_2$，则有 $-x_1,-x_2\in(0,l)$ 且 $-x_2<-x_1$. 由 $f(x)$ 在 $(0,l)$ 内单调增加可得

$$f(-x_2)<f(-x_1)$$

因为 $f(x)$ 在 $(-l,l)$ 内是奇函数，所以 $f(-x_2)=-f(x_2)$，$f(-x_1)=-f(x_1)$，$-f(x_2)<-f(x_1)$，从而 $f(x_1)<f(x_2)$，故 $f(x)$ 在 $(-l,0)$ 内也单调增加．

11. [四:1－1(11)] 设下面所考虑的函数都是定义在区间 $(-l,l)$ 上的．证明：(1) 两个偶函数的和是偶函数，两个奇函数的和是奇函数；

(2) 两个偶函数的乘积是偶函数，两个奇函数的乘积是偶函数，偶函数与奇函数的乘积是奇函数．

证明 (1) 设 $f_1(x)$，$f_2(x)$ 为偶函数，令 $F(x)=f_1(x)+f_2(x)$，则

$$F(-x)=f_1(-x)+f_2(-x)=f_1(x)+f_2(x)=F(x)$$

故 $F(x)$ 是偶函数．

设 $g_1(x),g_2(x)$ 为奇函数，令 $G(x)=g_1(x)+g_2(x)$，则

$$G(-x)=g_1(-x)+g_2(-x)=-g_1(x)-g_2(x)=-G(x)$$

故 $G(x)$ 是奇函数．

(2) 设 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 为偶函数，令 $F(x)=f_1(x)f_2(x)$，则

$$F(-x)=f_1(-x)f_2(-x)=f_1(x)f_2(x)=F(x)$$

故 $F(x)$ 是偶函数.

设 $g_1(x)$ 和 $g_2(x)$ 为奇函数,令 $G(x)=g_1(x)g_2(x)$,则

$$G(-x)=g_1(-x)g_2(-x)=[-g_1(x)][-g_2(x)]=g_1(x)g_2(x)=G(x)$$

故 $G(x)$ 为偶函数.

设 $f(x)$ 为偶函数,$g(x)$ 为奇函数,令 $H(x)=f(x)g(x)$,则

$$H(-x)=f(-x)g(-x)=f(x)[-g(x)]=-f(x)g(x)=-H(x)$$

故 $H(x)$ 为奇函数.

12. **[四:1-1(9)]** 下列函数中哪些是偶函数?哪些是奇函数?哪些既非偶函数又非奇函数?

(1) $y=x^2(1-x^2)$;　(2) $y=3x^2-x^3$;　(3) $y=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$;

(4) $y=x(x-1)(x+1)$;　(5) $y=\sin x-\cos x+1$;　(6) $y=\dfrac{a^x+a^{-x}}{2}$.

解　判断函数奇偶最直接的方法就是把 x 换成 $-x$ 后,判断函数与原函数之间的关系.

(1) 因为 $f(-x)=(-x)^2[1-(-x)^2]=x^2(1-x^2)=f(x)$,故 $f(x)$ 是偶函数.

(2) 因为 $f(-x)=3(-x)^2-(-x)^3=3x^2+x^3$,故 $f(x)$ 既非偶函数又非奇函数.

同理可得(3)是偶函数.(4)是奇函数.(5)既非偶函数又非奇函数.(6)是偶函数.

13. **[四:1-1(14)]** 下列函数中哪些是周期函数?对于周期函数,指出其周期:

(1) $y=\cos(x-2)$;　(2) $y=\cos 4x$;　(3) $y=1+\sin\pi x$;

(4) $y=x\cos x$;　(5) $y=\sin^2 x$.

解　(1) 是周期函数,周期为 2π.　(2) 是周期函数,周期为 $\dfrac{\pi}{2}$.

(3) 是周期函数,周期为 2.　(4) 不是周期函数.

(5) $y=\dfrac{1-\cos 2x}{2}$ 是周期函数,周期为 π.

14. **[四:1-1(15)]** 求下列函数的反函数:

(1) $y=\sqrt[3]{x+1}$;　(2) $y=\dfrac{1-x}{1+x}$;

(3) $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(ad-bc\neq 0)$; (4) $y=2\sin 3x$ $\left(-\dfrac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{6}\right)$;

(5) $y=1+\ln(x+2)$;　　　(6) $y=\dfrac{2^x}{2^x+1}$.

解　(1) 由 $y=\sqrt[3]{x+1}$ 解得 $x=y^3-1$,故反函数为 $y=x^3-1$.

(2) 由 $y=\dfrac{1-x}{1+x}$ 解得 $x=\dfrac{1-y}{1+y}$,故反函数为 $y=\dfrac{1-x}{1+x}$.

(3) 由 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ 解得 $x=\dfrac{-dy+b}{cy-a}$,故反函数为 $y=\dfrac{-dx+b}{cx-a}$.

(4) 由 $y=2\sin 3x$ 解得 $x=\dfrac{1}{3}\arcsin\dfrac{y}{2}$,故反函数为 $y=\dfrac{1}{3}\arcsin\dfrac{x}{2}$.

(5) 由 $y=1+\ln(x+2)$ 解得 $x=\mathrm{e}^{y-1}-2$,故反函数为 $y=\mathrm{e}^{x-1}-2$.

(6) 由 $y=\dfrac{2^x}{2^x+1}$ 解得 $x=\mathrm{lb}\frac{y}{y-1}$,故反函数为 $y=\mathrm{lb}\frac{x}{x-1}$.

15. [四:1－1(17)]设函数 $f(x)$ 在数集 X 上有定义,试证:函数 $f(x)$ 在 X 上有界的充分必要条件是它在 X 上既有上界又有下界.

证明　(1) 充分性:已知 $f(x)$ 在 X 上既有上界又有下界,即存在 M_1,M_2,使得对于任意的 $x\in X$,有 $M_1\leqslant f(x)\leqslant M_2$,取 $M=\max\{|M_1|,|M_2|\}$,则 $|f(x)|\leqslant M$. 故 $f(x)$ 有界.

(2) 必要性:已知 $f(x)$ 在 X 上有界,即存在常数 M,使得对于任意的 $x\in X$,有 $|f(x)|\leqslant M$,即 $-M\leqslant f(x)\leqslant M$,故 $f(x)$ 有上界 M,有下界 $-M$.

16. 在下列各题中,求由所给函数构成的复合函数,并求这函数分别对应于给定自变量值 x_1 和 x_2 的函数值:

(1) $y=u^2$, $u=\sin x$, $x_1=\dfrac{\pi}{6}$, $x_2=\dfrac{\pi}{3}$;

(2) $y=\sin u$, $u=2x$, $x_1=\dfrac{\pi}{8}$, $x_2=\dfrac{\pi}{4}$;

(3) $y=\sqrt{u}$, $u=1+x^2$, $x_1=1$, $x_2=2$;

(4) $y=\mathrm{e}^u$, $u=x^2$, $x_1=0$, $x_2=1$;

(5) $y=u^2$, $u=\mathrm{e}^x$, $x_1=1$, $x_2=-1$.

解　(1) $y=\sin^2 x$, $y(x_1)=\dfrac{1}{4}$, $y(x_2)=\dfrac{3}{4}$.

(2) $y=\sin 2x$, $y(x_1)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $y(x_2)=1$.

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com