



高等数学

【高教·同济·第五/第四版合订本】

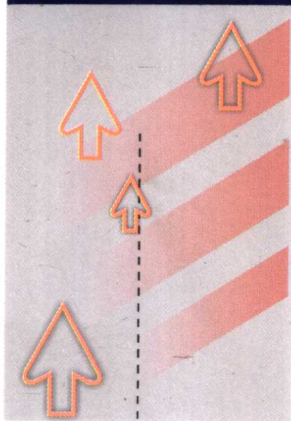
王宇翔 编著

●重点、难点全析 ●习题全解

西北工业大学出版社



全析 精解





高等数学全析精解

(高教·同济·第五/四版合订本)

王宇翔 编著

西北工业大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学全析精解/王宇翔编著. 西安:西北工业大学出版社,
2007.7

ISBN 978-7-5612-2230-0

I. 高… II. 王… III. 高等数学—高等学校—教学参考资料
IV. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 086082 号

出版发行:西北工业大学出版社

通信地址:西安市友谊西路 127 号 邮编:710072

电 话:(029)88493844 88491757

网 址:www.nwpup.com

印 刷 者:陕西丰源印务有限公司

开 本:850mm×1 168mm 1/32

印 张:16.625

字 数:549 千字

版 次:2007 年 7 月第 1 版 2007 年 7 月第 1 次印刷

定 价:22.00 元

前 言

高等数学是理工科院校的一门重要的基础课。我们依据理工科各专业的培养目标和特点,按照教育部最新制定的高等数学课程教学大纲的要求,为帮助读者在数学概念、计算技能和数学思维方面得到充分的训练,编写了这本参考书。

本书是按照同济大学应用数学系所编的《高等数学》(第五版)的章节顺序编写,共12章,每章分2个部分:

(1)重点、难点全析:对本章的重点与难点进行归纳总结;同时归纳重要的概念、内容与公式。

(2)习题全解:对同济大学数学教研室编写的《高等数学》的第五版和第四版的课后习题做了详细解答,以便读者掌握解题技巧,并从中掌握好基本概念。

注明:本书的习题全解是以第五版教材为蓝本,题目序号后中括号中的号码为第四版中的题号,对于第五版中没有第四版的习题解答全部归总在本章最后。

由于作者水平有限及撰稿时间仓促,书中难免有不妥之处,恳请读者批评指正,以便修改。

编 者

2007年3月

目 录

第 1 章 函数与极限	1
1.1 重点、难点全析	1
1.2 习题全解	3
习题 1—1 解答	3
习题 1—2 解答	11
习题 1—3 解答	13
习题 1—4 解答	16
习题 1—5 解答	19
习题 1—6 解答	21
习题 1—7 解答	24
习题 1—8 解答	26
习题 1—9 解答	29
习题 1—10 解答	32
总习题一解答	34
补:第四版第 1 章习题解答	39
第 2 章 导数与微分	51
2.1 重点、难点全析	51
2.2 习题全解	52
习题 2—1 解答	52
习题 2—2 解答	57
习题 2—3 解答	63
习题 2—4 解答	67
习题 2—5 解答	72
总习题二解答	78
补:第四版第 2 章习题解答	83

第3章 微分中值定理与导数的应用	86
3.1 重点、难点全析	86
3.2 习题全解	88
习题 3—1 解答	88
习题 3—2 解答	92
习题 3—3 解答	95
习题 3—4 解答	99
习题 3—5 解答	107
习题 3—6 解答	114
习题 3—7 解答	118
习题 3—8 解答	122
总习题三解答	124
补:第四版第3章习题解答	132
第4章 不定积分	135
4.1 重点、难点全析	135
4.2 习题全解	137
习题 4—1 解答	137
习题 4—2 解答	140
习题 4—3 解答	146
习题 4—4 解答	150
习题 4—5 解答	154
总习题四解答	157
第5章 定积分	165
5.1 重点、难点全析	165
5.2 习题全解	167
习题 5—1 解答	167
习题 5—2 解答	172
习题 5—3 解答	177

习题 5—4 解答	184
习题 5—5 解答	187
总习题五解答	190
补:第四版第 5 章习题解答	198
第 6 章 定积分的应用	201
6.1 重点、难点全析	201
6.2 习题全解	202
习题 6—2 解答	202
习题 6—3 解答	216
总习题六解答	221
补:第四版第 6 章习题解答	225
第 7 章 空间解析几何与向量代数	228
7.1 重点、难点全析	228
7.2 习题全解	231
习题 7—1 解答	231
习题 7—2 解答	235
习题 7—3 解答	238
习题 7—4 解答	242
习题 7—5 解答	245
习题 7—6 解答	247
总习题七解答	253
补:第四版第 7 章习题解答	260
第 8 章 多元函数微分法及其应用	263
8.1 重点、难点全析	263
8.2 习题全解	264
习题 8—1 解答	264
习题 8—2 解答	268
习题 8—3 解答	271
习题 8—4 解答	274

习题 8—5 解答	279
习题 8—6 解答	284
习题 8—7 解答	288
习题 8—8 解答	291
习题 8—9 解答	295
习题 8—10 解答	298
总习题八解答	300
第 9 章 重积分	308
9.1 重点、难点全析	308
9.2 习题全解	309
习题 9—1 解答	309
习题 9—2 解答	313
习题 9—3 解答	333
习题 9—4 解答	340
习题 9—5 解答	349
总习题九解答	353
第 10 章 曲线积分与曲面积分	361
10.1 重点、难点全析	361
10.2 习题全解	362
习题 10—1 解答	362
习题 10—2 解答	366
习题 10—3 解答	371
习题 10—4 解答	375
习题 10—5 解答	380
习题 10—6 解答	383
习题 10—7 解答	386
总习题十解答	392
第 11 章 无穷级数	401
11.1 重点、难点全析	401

11.2 习题全解	403
习题 11—1 解答	403
习题 11—2 解答	406
习题 11—3 解答	410
习题 11—4 解答	412
习题 11—5 解答	416
习题 11—6 解答	419
习题 11—7 解答	422
习题 11—8 解答	428
总习题十一解答	431
第 12 章 常微分方程	439
12.1 重点、难点全析	439
12.2 习题全解	441
习题 12—1 解答	441
习题 12—2 解答	443
习题 12—3 解答	448
习题 12—4 解答	453
习题 12—5 解答	460
习题 12—6 解答	465
习题 12—7 解答	471
习题 12—8 解答	475
习题 12—9 解答	479
习题 12—10 解答	486
习题 12—11 解答	488
习题 12—12 解答	492
总习题十二解答	497
高等数学第五/四版习题对照	508
参考文献	520

第1章 函数与极限

1.1 重点、难点全析

重点:函数的概念,初等函数的概念,复合函数的概念;数列极限和函数极限的概念,极限运算法则和极限存在准则;两个重要极限;无穷小阶的比较及等价无穷小在求极限中的应用;连续函数的概念和初等函数的连续性,间断点的概念和间断点类型的判断,闭区间上连续函数的性质.

难点:复合函数,极限概念,极限存在的准则,连续函数的概念,闭区间上连续函数性质的应用.

1. 函数极限

函数极限的定义:

$$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists X > 0, \text{当 } |x| > X \text{ 时, 恒有 } |f(x) - A| < \epsilon.$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{当 } 0 < |x - x_0| < \delta \text{ 时, 恒有 } |f(x) - A| < \epsilon.$$

2. 两个重要极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \quad \text{或} \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$$

3. 函数的连续性

(1) 定义:若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, 则称 $f(x)$ 在 x_0 处连续.

初等函数在其定义区间内都是连续的.

(2) 闭区间上连续函数的性质:① 有界性;② 最值定理;③ 介值定理;④ 零

点存在定理.

(3) 函数的间断点:

① 第一类间断点: 左、右极限都存在的间断点, 有可去间断点及跳跃间断点.

② 第二类间断点: 左、右极限不都存在的间断点, 有无穷间断点及振荡间断点.

4. 数列极限

(1) 数列极限的定义:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N, \text{当 } n > N \text{ 时, 恒有 } |x_n - a| < \varepsilon.$$

(2) 收敛数列的性质:

① 若数列 $\{x_n\}$ 收敛, 则其极限必惟一.

② 若数列 $\{x_n\}$ 收敛, 则数列 $\{x_n\}$ 一定有界.

③ 若数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a , 则它的任一子数列也收敛于 a .

(3) 数列收敛性的判别定理: ① 夹逼定理. ② 单调有界数列必有极限.

5. 无穷小与无穷大

(1) 无穷小:

① 定义: 以零为极限的变量称作无穷小量.

② 无穷小的阶: 设 $\alpha(x), \beta(x)$ 都是自变量 x 在同一变化过程中的无穷小, 且 $\alpha \neq 0$,

$$\lim \frac{\beta}{\alpha} = \begin{cases} 0 & \text{称 } \beta \text{ 是比 } \alpha \text{ 高阶的无穷小, 记作 } \beta = o(\alpha) \\ \infty & \text{称 } \beta \text{ 是比 } \alpha \text{ 低阶的无穷小} \\ c \neq 0 & \text{称 } \beta \text{ 与 } \alpha \text{ 是同阶无穷小} \\ 1 & \text{称 } \beta \text{ 与 } \alpha \text{ 是等价无穷小, 记作 } \alpha \sim \beta \end{cases}$$

若 $\lim \frac{\beta}{\alpha^k} = c \neq 0, k > 0$, 称 β 是关于 α 的 k 阶无穷小.

③ 无穷小的运算性质: 有限个无穷小的和仍为无穷小. 有限个无穷小的乘积仍为无穷小. 无穷小与有界函数的乘积仍为无穷小. 求两个无穷小之比的极限时, 分子及分母可用等价无穷小来代替.

(2) 无穷大: 绝对值无限增大的变量叫无穷大. 无穷小(不取零值)的倒数

为无穷大,反之无穷大的倒数为无穷小.

1.2 习题全解

习题 1-1 解答

1. 设 $A = (-\infty, -5) \cup (5, +\infty)$, $B = [-10, 3]$, 写出 $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ 及 $A \setminus (A \setminus B)$ 的表达式.

解 $A \cup B = (-\infty, 3) \cup (5, +\infty)$, $A \cap B = [-10, -5]$

$A \setminus B = (-\infty, -10) \cup (5, +\infty)$, $A \setminus (A \setminus B) = [-10, -5]$

2. 设 A, B, C 是任意三个集合, 证明: 对偶律 $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

证明 任取 $x \in (A \cap B)^c \Rightarrow x \notin A \cap B \Rightarrow x \in A^c$ 或 $x \in B^c \Rightarrow x \in A^c \cup B^c$, 所以

$$(A \cap B)^c \subset A^c \cup B^c$$

又, $x \in A^c \cup B^c \Rightarrow x \in A^c$ 或 $x \in B^c \Rightarrow x \notin A$ 或 $x \notin B \Rightarrow x \notin A \cap B \Rightarrow x \in (A \cap B)^c$, 所以

$$A^c \cup B^c \subset (A \cap B)^c$$

综上所述 $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

3. 设映射 $f: X \rightarrow Y$, $A \subset X$, $B \subset X$. 证明:

(1) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$; (2) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

证明 (1) 设 $x \in A \cup B$, 则 $x \in A$ 或 $x \in B \Rightarrow f(x) \in f(A)$ 或 $f(x) \in f(B) \Rightarrow f(x) \in f(A) \cup f(B)$, 则 $f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$.

又设 $y = f(x) \in f(A) \cup f(B) \Rightarrow y \in f(A)$ 或 $y \in f(B) \Rightarrow x \in A$ 或 $x \in B \Rightarrow x \in A \cup B \Rightarrow y \in f(A \cup B)$, 则 $f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B)$.

综上所述 $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

(2) 设 $y = f(x) \in f(A \cap B) \Rightarrow x \in A \cap B \Rightarrow x \in A$ 且 $x \in B \Rightarrow f(x) \in f(A)$ 且 $f(x) \in f(B) \Rightarrow f(x) \in f(A) \cap f(B)$, 则

$$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$$

4. 设映射 $f: X \rightarrow Y$, 若存在一个映射 $g: Y \rightarrow X$, 使 $g \circ f = I_X$, $f \circ g = I_Y$, 其中 I_X, I_Y 分别是 X, Y 上的恒等映射, 即对于每一个 $x \in X$, 有 $I_X x = x$; 对于每一个 $y \in Y$, 有 $I_Y y = y$. 证明: f 是双射, 且 g 是 f 的逆映射: $g = f^{-1}$.

证明 要证 f 为双射, 需证 f 为满射且为单射.

对于任意的 $y \in Y$, 有 $I_Y y = y$. 而 $I_Y = f \circ g$, 于是 $(f \circ g)(x) = y$, 即 $f[g(y)] = y$, 令 $x = g(y)$, 则 $f(x) = f[g(y)] = y$, 由于 $g: Y \rightarrow X$, 因此 $x = g(y) \in X$. 则对于任意的 $y \in Y$, 存在 $x \in X$, 使 $f(x) = y$, 由定义知, f 为满射.

对于 X 中任意两个元素 x_1, x_2 , 且 $x_1 \neq x_2$, 要证明 $f(x_1) \neq f(x_2)$, 用反证法: 假设 $f(x_1) = f(x_2)$, 则 $g[f(x_1)] = g[f(x_2)]$, 由 $I_X = g \circ f \Rightarrow x_1 = x_2$ 知, 与已知矛盾.

由定义知, f 为单射. 故 f 为双射.

要证 g 是 f 的逆映射, 需知 f 是单射, 而由上面证明可知 f 是单射, 根据定义, g 是 f 的逆映射.

5. 设映射 $f: X \rightarrow Y, A \subset X$. 记 $f(A)$ 的原像为 $f^{-1}(f(A))$, 证明:

(1) $f^{-1}(f(A)) \supset A$; (2) 当 f 是单射时, 有 $f^{-1}(f(A)) = A$.

证明 (1) 对于任意的 $x \in A$, 有 $y = f(x) \in f(A)$, 从而 $f^{-1}(y) = x \in \{f^{-1}(y) \mid y \in f(A)\} = f^{-1}[f(A)]$, 故 $A \subset f^{-1}[f(A)]$.

(2) 对于任意的 $x \in f^{-1}[f(A)]$, 存在 $y \in f(A)$, 有 $f^{-1}(y) = x$, 即 $f(x) = y$. 由 $x' \in A$, 得 $f(x') \in f(A)$, 因为 f 是单射, 则 $x = x' \in A$, 从而 $f^{-1}[f(A)] \subset A$, 所以 $f^{-1}[f(A)] = A$.

6. 求下列函数的定义域:

$$(1) y = \sqrt{3x+2};$$

$$(2) y = \frac{1}{1-x^2};$$

$$(3) y = \frac{1}{x} - \sqrt{1-x^2};$$

$$(4) y = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}};$$

$$(5) y = \sin \sqrt{x};$$

$$(6) y = \tan(x+1);$$

$$(7) y = \arcsin(x-3);$$

$$(8) y = \sqrt{3-x} + \arctan \frac{1}{x};$$

$$(9) y = \ln(x+1);$$

$$(10) y = e^{\frac{1}{x}}.$$

解 (1) 由 $3x+2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -\frac{2}{3}$, 可得函数的定义域为 $[-\frac{2}{3}, +\infty)$.

(2) 由 $1-x^2 \neq 0 \Rightarrow x \neq \pm 1$, 可得函数的定义域为 $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$.

(3) 由 $x \neq 0$ 且 $1-x^2 \geq 0 \Rightarrow x \neq 0$ 且 $|x| \leq 1$, 可得函数的定义域为 $[-1, 0) \cup (0, 1]$.

(4) 由 $4-x^2 > 0 \Rightarrow |x| < 2$, 可得函数的定义域为 $(-2, 2)$.

(5) 由 $x \geq 0$, 可得函数的定义域为 $[0, +\infty)$.

(6) 由 $x+1 \neq k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x \neq k\pi + \frac{\pi}{2} - 1 (k \in \mathbb{Z})$, 可得函数的定义域为

$$\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(\left(k - \frac{1}{2}\right)\pi - 1, \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi - 1 \right)$$

(7) 由 $|x-3| \leq 1 \Rightarrow 2 \leq x \leq 4$, 可得函数的定义域为 $[2, 4]$.

(8) 因为 $3-x \geq 0$ 且 $x \neq 0 \Rightarrow x \leq 3$ 且 $x \neq 0$, 可得函数的定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, 3]$.

(9) 由 $x+1 > 0 \Rightarrow x > -1$, 可得函数的定义域为 $(-1, +\infty)$.

(10) 由 $x \neq 0$, 可得函数的定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

7. [四:1-1(3)] 下列各题中, 函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是否相同? 为什么?

(1) $f(x) = \lg x^2$, $g(x) = 2\lg x$;

(2) $f(x) = x$, $g(x) = \sqrt{x^2}$;

(3) $f(x) = \sqrt[3]{x^4 - x^3}$, $g(x) = x \sqrt[3]{x-1}$;

(4) $f(x) = 1$, $g(x) = \sec^2 x - \tan^2 x$.

解 (1) 不同, 因为它们的定义域不同.

(2) 不同, 因为它们的对应法则不同. 当 $x < 0$ 时, $g(x) = -x$.

(3) 相同, 因为它们的定义域和对应法则均相同.

(4) 不同, 因为它们的定义域不同.

8. [四:1-1(8)] 设 $\varphi(x) = \begin{cases} |\sin x|, & |x| < \frac{\pi}{3} \\ 0, & |x| \geq \frac{\pi}{3} \end{cases}$, 求 $\varphi\left(\frac{\pi}{6}\right)$, $\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right)$,

$\varphi\left(-\frac{\pi}{4}\right)$, $\varphi(-2)$, 并作出函数 $y = \varphi(x)$ 的图形.

解 $\varphi\left(\frac{\pi}{6}\right) = \left|\sin \frac{\pi}{6}\right| = \frac{1}{2}$

$\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left|\sin \frac{\pi}{4}\right| = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\varphi\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \left|\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right| = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\varphi(-2) = 0$

$y = \varphi(x)$ 的图形如图 1.1 所示.

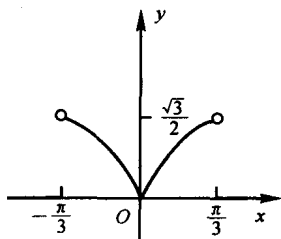


图 1.1

9. 试证下列函数在指定区间内的单调性:

$$(1) y = \frac{x}{1-x}, x \in (-\infty, 1);$$

$$(2) y = x + \ln x, x \in (0, +\infty).$$

证明 (1) 设 $x_1, x_2 \in (-\infty, 1)$ 且 $x_1 < x_2$, 则

$$\frac{x_1}{1-x_1} - \frac{x_2}{1-x_2} = \frac{x_1 - x_2}{(1-x_1)(1-x_2)} < 0$$

可见 $y = \frac{x}{1-x}$ 在 $(-\infty, 1)$ 上单调增加.

(2) 设 $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ 且 $x_1 < x_2$, 则

$$x_1 + \ln x_1 - (x_2 + \ln x_2) = (x_1 - x_2) + \ln \frac{x_1}{x_2} < 0$$

可见 $y = x + \ln x$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调增加.

10. [四:1-1(13)] 设 $f(x)$ 为定义在 $(-l, l)$ 内的奇函数, 若 $f(x)$ 在 $(0, l)$ 内单调增加, 证明: $f(x)$ 在 $(-l, 0)$ 内也单调增加.

证明 设 $x_1, x_2 \in (-l, 0)$ 且 $x_1 < x_2$, 则有 $-x_1, -x_2 \in (0, l)$ 且 $-x_2 < -x_1$. 由 $f(x)$ 在 $(0, l)$ 内单调增加可得

$$f(-x_2) < f(-x_1)$$

因为 $f(x)$ 在 $(-l, l)$ 内是奇函数, 所以 $f(-x_2) = -f(x_2)$, $f(-x_1) = -f(x_1)$, $-f(x_2) < -f(x_1)$, 从而 $f(x_1) < f(x_2)$, 故 $f(x)$ 在 $(-l, 0)$ 内也单调增加.

11. [四:1-1(11)] 设下面所考虑的函数都是定义在区间 $(-l, l)$ 上的. 证明: (1) 两个偶函数的和是偶函数, 两个奇函数的和是奇函数;

(2) 两个偶函数的乘积是偶函数, 两个奇函数的乘积是偶函数, 偶函数与奇函数的乘积是奇函数.

证明 (1) 设 $f_1(x), f_2(x)$ 为偶函数, 令 $F(x) = f_1(x) + f_2(x)$, 则

$$F(-x) = f_1(-x) + f_2(-x) = f_1(x) + f_2(x) = F(x)$$

故 $F(x)$ 是偶函数.

设 $g_1(x), g_2(x)$ 为奇函数, 令 $G(x) = g_1(x) + g_2(x)$, 则

$$G(-x) = g_1(-x) + g_2(-x) = -g_1(x) - g_2(x) = -G(x)$$

故 $G(x)$ 是奇函数.

(2) 设 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 为偶函数, 令 $F(x) = f_1(x)f_2(x)$, 则

$$F(-x) = f_1(-x)f_2(-x) = f_1(x)f_2(x) = F(x)$$

故 $F(x)$ 是偶函数.

设 $g_1(x)$ 和 $g_2(x)$ 为奇函数, 令 $G(x) = g_1(x)g_2(x)$, 则
 $G(-x) = g_1(-x)g_2(-x) = [-g_1(x)][-g_2(x)] = g_1(x)g_2(x) = G(x)$
 故 $G(x)$ 为偶函数.

设 $f(x)$ 为偶函数, $g(x)$ 为奇函数, 令 $H(x) = f(x)g(x)$, 则
 $H(-x) = f(-x)g(-x) = f(x)[-g(x)] = -f(x)g(x) = -H(x)$
 故 $H(x)$ 为奇函数.

12. [四:1-1(9)] 下列函数中哪些是偶函数? 哪些是奇函数? 哪些既非偶函数又非奇函数?

$$\begin{aligned} (1) y &= x^2(1-x^2); & (2) y &= 3x^2-x^3; & (3) y &= \frac{1-x^2}{1+x^2}; \\ (4) y &= x(x-1)(x+1); & (5) y &= \sin x - \cos x + 1; & (6) y &= \frac{a^x + a^{-x}}{2}. \end{aligned}$$

解 判断函数奇偶最直接的方法就是把 x 换成 $-x$ 后, 判断函数与原函数之间的关系.

(1) 因为 $f(-x) = (-x)^2[1-(-x)^2] = x^2(1-x^2) = f(x)$, 故 $f(x)$ 是偶函数.

(2) 因为 $f(-x) = 3(-x)^2 - (-x)^3 = 3x^2 + x^3$, 故 $f(x)$ 既非偶函数又非奇函数.

同理可得(3)是偶函数.(4)是奇函数.(5)既非偶函数又非奇函数.(6)是偶函数.

13. [四:1-1(14)] 下列函数中哪些是周期函数? 对于周期函数, 指出其周期:

$$\begin{aligned} (1) y &= \cos(x-2); & (2) y &= \cos 4x; & (3) y &= 1 + \sin \pi x; \\ (4) y &= x \cos x; & (5) y &= \sin^2 x. \end{aligned}$$

解 (1) 是周期函数, 周期为 2π . (2) 是周期函数, 周期为 $\frac{\pi}{2}$.

(3) 是周期函数, 周期为 2. (4) 不是周期函数.

(5) $y = \frac{1 - \cos 2x}{2}$ 是周期函数, 周期为 π .

14. [四:1-1(15)] 求下列函数的反函数:

$$(1) y = \sqrt[3]{x+1}; \quad (2) y = \frac{1-x}{1+x};$$

$$(3) y = \frac{ax+b}{cx+d} \quad (ad-bc \neq 0); (4) y = 2\sin 3x \quad \left(-\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{6}\right);$$

$$(5) y = 1 + \ln(x+2); \quad (6) y = \frac{2^x}{2^x+1}.$$

解 (1) 由 $y = \sqrt[3]{x+1}$ 解得 $x = y^3 - 1$, 故反函数为 $y = x^3 - 1$.

$$(2) 由 y = \frac{1-x}{1+x} 解得 x = \frac{1-y}{1+y}, 故反函数为 y = \frac{1-x}{1+x}.$$

$$(3) 由 y = \frac{ax+b}{cx+d} 解得 x = \frac{-dy+b}{cy-a}, 故反函数为 y = \frac{-dx+b}{cx-a}.$$

$$(4) 由 y = 2\sin 3x 解得 x = \frac{1}{3} \arcsin \frac{y}{2}, 故反函数为 y = \frac{1}{3} \arcsin \frac{x}{2}.$$

$$(5) 由 y = 1 + \ln(x+2) 解得 x = e^{y-1} - 2, 故反函数为 y = e^{x-1} - 2.$$

$$(6) 由 y = \frac{2^x}{2^x+1} 解得 x = \lg \frac{y}{y-1}, 故反函数为 y = \lg \frac{x}{x-1}.$$

15. [四:1-1(17)] 设函数 $f(x)$ 在数集 X 上有定义, 试证: 函数 $f(x)$ 在 X 上有界的充分必要条件是它在 X 上既有上界又有下界.

证明 (1) 充分性: 已知 $f(x)$ 在 X 上既有上界又有下界, 即存在 M_1, M_2 , 使得对于任意的 $x \in X$, 有 $M_1 \leq f(x) \leq M_2$, 取 $M = \max\{|M_1|, |M_2|\}$, 则 $|f(x)| \leq M$. 故 $f(x)$ 有界.

(2) 必要性: 已知 $f(x)$ 在 X 上有界, 即存在常数 M , 使得对于任意的 $x \in X$, 有 $|f(x)| \leq M$, 即 $-M \leq f(x) \leq M$, 故 $f(x)$ 有上界 M , 有下界 $-M$.

16. 在下列各题中, 求由所给函数构成的复合函数, 并求这函数分别对应于给定自变量值 x_1 和 x_2 的函数值:

$$(1) y = u^2, u = \sin x, x_1 = \frac{\pi}{6}, x_2 = \frac{\pi}{3};$$

$$(2) y = \sin u, u = 2x, x_1 = \frac{\pi}{8}, x_2 = \frac{\pi}{4};$$

$$(3) y = \sqrt{u}, u = 1 + x^2, x_1 = 1, x_2 = 2;$$

$$(4) y = e^u, u = x^2, x_1 = 0, x_2 = 1;$$

$$(5) y = u^2, u = e^x, x_1 = 1, x_2 = -1.$$

$$\text{解} \quad (1) y = \sin^2 x, y(x_1) = \frac{1}{4}, y(x_2) = \frac{3}{4}.$$

$$(2) y = \sin 2x, y(x_1) = \frac{\sqrt{2}}{2}, y(x_2) = 1.$$