高职高专“十一五”规划教材

● 公共基础课系列

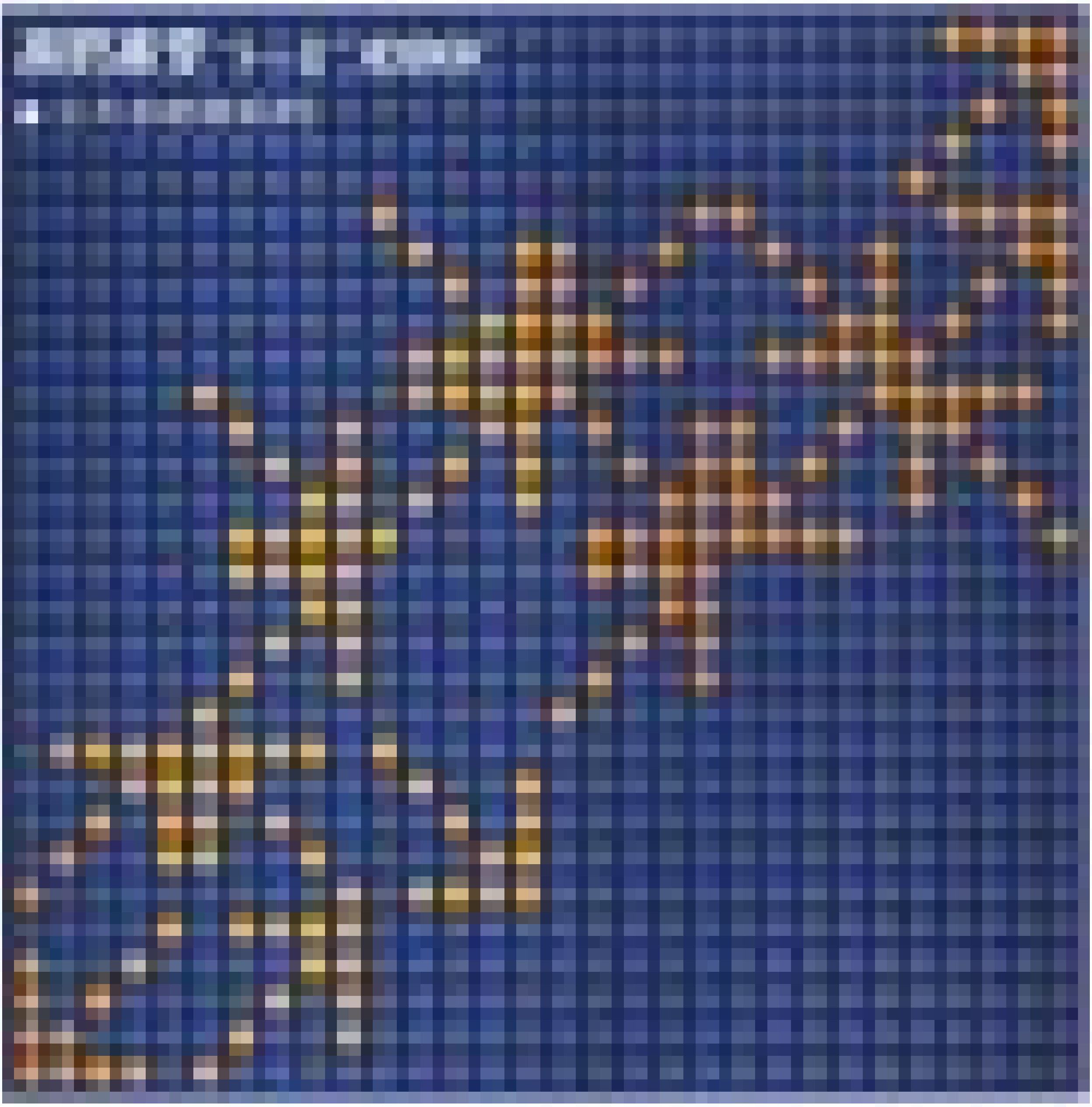
应用数学

（文科类）

主编　孟红玲　乔春平

本书是根据《高等数学课程教学大纲》，结合高等院校文科类和管理类专业的专业特点而编写的数学教材，内容包括数学历史与文化、微积分、线性代数、应用概率、数学模型和现代数学概论等。本教材突出“以学生发展为本”的教育理念，除了讲解必要的基础数学知识外，还着重培养学生的基本数学素质，锻炼抽象思维能力和逻辑推理能力。

大象出版社
全国优秀出版社



应用数学

高职高专"十一五"规划教材·公共基础课系列

应·用·数·学

（文科类）

主编　孟红玲　乔春平

大象出版社

图书在版编目(CIP)数据

应用数学/孟红玲主编. —郑州:大象出版社,2007.9
高职高专“十一五”规划教材·公共基础课系列
ISBN 978-7-5347-4660-4

Ⅰ.应… Ⅱ.孟… Ⅲ.应用数学-高等学校:技术学校—教材 Ⅳ.029

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 120873 号

责任编辑 郭安周
责任校对 何 力
封面设计 杜晓燕
出 版 大象出版社(郑州市经七路 25 号 邮政编码 450002)
网 址 www.daxiang.cn
发 行 全国新华书店
制 版 河南第二新华印刷厂
印 刷 河南第二新华印刷厂
版 次 2007 年 9 月第 1 版 2007 年 9 月第 1 次印刷
开 本 787×1092 1/16
印 张 17.5
字 数 400 千字
印 数 1—3 000 册
定 价 26.00 元

印厂地址 郑州市商城路 231 号
邮政编码 450000 电话 (0371)66202901

前　言

本书是根据高等院校文科类、管理类专业《高等数学课程教学大纲》，同时考虑到专业层次以及学时等的不同要求而编写的教材。

应用数学是高等院校一门重要的基础数学课程，具有较强的逻辑性、抽象性以及广泛的实用性。学习应用数学，除了获取必要的基础数学知识外，它的基本概念、基本思想与基本方法，对于培养学生的基本数学素质，锻炼抽象思维能力和逻辑推理能力，也是必不可少的。因此，本教材突出以“学生发展为本”的教育理念，以“必需、够用、好用、实用”为原则，以“培养学生的数学直觉思维、创新思维”为目的。

本书内容包括数学历史与文化、微积分、线性代数、应用概率、数学模型和现代数学概论5部分共12章，并配备一定数量的习题。在内容的处理上，我们注意到文科类、管理类专业教学及成人高考和自学考试教育等特点，力求取材适度、深入浅出、循序渐进，文字通俗易懂，条理清楚。同时注意保持教材自身体系的完整性和结构的合理性。为此我们根据多年的教学经验和研究，尽可能地结合文科类、管理类专业学生的实际需要精选内容，把重点放在基本概念、基本理论和方法的掌握以及灵活应用上，培养学生们的数学思想和方法。

本书可作为高等院校文科类、管理类专业本科生与专科生的教材，也可供各类成人教育和自学考试等使用。

本书由孟红玲、乔春平主编。第1、2、12章由乔春平、王建锋和王桂花编写，第3、4、5、6章由王志军、赵远和申建伟编写，第7、8、11章由孟红玲和徐继军编写，第9、10章由张开广和孟红玲编写。

在本书的编写过程中，我们参阅了一些同类的教材和著作，并得到了专家、同行的大力支持，在此表示感谢。

由于编者水平有限，错误与不妥之处在所难免，恳请广大读者与各位同行批评指正。

编　者

2007年7月

目 录

第 1 章 数学历史与文化

数学,这门古老而又常新的科学,在 20 世纪所取得的巨大发展比以往任何时代都更牢固地确立了它作为整个科学技术的基础地位. 数学正突破传统的应用范围向几乎所有的人类知识领域渗透,并越来越直接地为人类物质生产和日常生活做出贡献. 同时,数学作为一种文化,已成为人类文明进步的标志. 因此,对于当今社会每一个有文化的人而言,不论他从事何种职业,都需要学习数学、了解数学和运用数学. 现代社会对数学的这种需要;在 21 世纪无疑将更加与日俱增.

§1.1 数学是什么

数学是研究现实世界中的数量关系与空间形式的一门学科. 由于实际的需要,数学在古代就产生了,现在已发展成一个分支众多的庞大系统. 数学与其他学科一样,反映了客观世界的规律,并成为理解自然、改造自然的有力武器. 对任何一门学科的理解,单有这门学科的具体知识是不够的,即使你对这门学科知识掌握得足够丰富,还需要对这门学科的整体有个正确的认识,需要了解这门学科的本质.

1.1.1 数学的本质

数学是数和形的学问. 它有两个主干:几何与代数.

几何:空间形式的科学,视觉思维占主导,培养直觉能力,培养洞察力.

代数:数量关系的科学,有序思维占主导,培养逻辑推理能力.

英国数学家阿蒂亚说:"几何直觉乃是增进数学理解力的很有效的途径,而且它可以使人增加勇气,提高修养."遗憾的是,在通常的数学教学中只讲逻辑而很少讲直觉.

如果只研究数与形,那是静态的,属于常量数学的范围. 只研究数与形是不够的,必须研究大小与形状是如何改变的. 这就产生了微积分.

19 世纪恩格斯给数学下了这样的定义:"数学是关于空间形式和数量关系的科学."

恩格斯关于数学的定义是经典的,概括了当时数学的发展,即使在目前也概括了数学的绝大部分. 但是在 19 世纪末,数理逻辑诞生了. 在数理逻辑中既没有数也没有形,很难归入上面的定义. 于是人们又考虑数学的新定义.

数学是关于模式和秩序的科学. 春有花开,夏有惊雷,秋收冬藏,一年四季往复循环. 世界上没有两片完全相同的雪花,但所有的雪花都是六角形的. 以人类的心智和文化为模式的识别、分类和应用建立了一套规范化的思想体系,我们称它为数学. 通过建立数学模型,可以

使知识条理化，并揭示自然界的奥秘：数、形状、机会、算法与变化. 数学的处理对象分成三组：数据，测量，观察资料；推断，演绎，证明；自然现象，人类行为，社会系统的各种模式. 数学提供了有特色的思考方式.

抽象化：选出为许多不同的现象所共有的性质来进行专门研究.

符号化：把自然语言扩充、深化，而变为紧凑、简明的符号. 总之，这是自然科学共有的思考方式，以数学为最.

公理化：从前提，从数据，从图形，从不完全和不一致的原始资料进行推理. 归纳与演绎并应用.

最优化：考察所有的可能性，从中寻求最优解.

建立模型：对现实现象进行分析，从中找出数量关系，并转化为数学问题.

应用这些思考方式的经验构成数学能力. 这是当今信息时代越来越重要的一种智力. 它使人们能批判地阅读，辨别谬误，摆脱偏见，估计风险. 数学能使我们更好地了解我们生活于其中的充满信息的世界.

1.1.2 数学的内容

大致说来，数学分为初等数学与高等数学两大部分. 初等数学主要包含两部分——几何学与代数学. 几何学是研究空间形式的学科，而代数学则是研究数量关系的学科.

初等数学基本上是常量的数学.

高等数学含有非常丰富的内容，以大学本科所学为限，它主要包含以下内容：

解析几何：用代数方法研究几何，其中平面解析几何部分内容已放到中学.

线性代数：研究如何解线性方程组及有关的问题.

高等代数：研究方程式的求根问题.

微积分：研究变速运动及曲边形的求和问题. 作为微积分的延伸，还有常微分方程与偏微分方程.

概率论与数理统计：研究随机现象，依据数据进行推理.

所有这些学科构成高等数学的基础部分，在此基础上建立了高等数学的宏伟大厦.

1.1.3 数学的特点

数学区分于其他学科的明显特点有三个：第一是它的抽象性；第二是它的精确性；第三是它的应用的极端广泛性.

从中学数学的学习过程中读者已经体会到数学的抽象性了. 数本身就是一个抽象概念，几何中的直线也是一个抽象概念，全部数学的概念都具有这一特征. 整数的概念，几何图形的概念都属于最原始的数学概念. 在原始概念的基础上又形成有理数、无理数、复数、函数、微分、积分、n 维空间以至无穷维空间这样一些抽象程度更高的概念. 但是需要指出，所有这些抽象度更高的概念，都有非常现实的背景. 不过，抽象不是数学独有的特性，任何一门学科都具有这一特性. 因此，单是数学概念的抽象性还不足以说尽数学抽象的特点. 数学抽象的特点在于：第一，在数学的抽象中只保留量的关系和空间形式而舍弃了其他一切；第二，数学的抽象是一级一级逐步提高的，它们所达到的抽象程度大大超过了其他学科中的一般抽象；

第三,数学本身几乎完全周旋于抽象概念和它们的相互关系的圈子之中. 如果自然科学家为了证明自己的论断常常求助于实验,那么数学家证明定理只需用推理和计算. 这就是说,不仅数学的概念是抽象的、思辨的,而且数学的方法也是抽象的、思辨的.

数学的精确性表现在数学定义的准确性、推理的逻辑严密性和数学结论的确定无疑与无可争辩性. 当然,数学的严格性不是绝对的,一成不变的,而是相对的,发展着的,这正体现了人类认识逐渐深化的过程.

数学应用的极其广泛性也是它的特点之一. 正像已故著名数学家华罗庚教授曾指出的,宇宙之大,粒子之微,火箭之速,化工之巧,地球之变,生物之谜,日用之繁,数学无处不在,凡是出现"量"的地方就少不了用数学,研究量的关系,量的变化,量的变化关系等现象都少不了数学. 数学的应用贯穿到一切学科的深处,而成为它们的得力助手与工具,缺少了它就不能准确地刻画出客观事物的变化,更不能由已知数据推出其他数据,因而就减少了科学预见的可能性,或减弱了科学预见的精确度.

1.1.4 数学对人类文明的贡献

人类认识的发展基于经验的积累和理性的思维. 单靠经验的积累,有时像在黑暗中摸索,不可能有认识上的重大突破. 在经验积累的基础上,经过理性的思维才能产生伟大的飞跃. 下面举几个对人类文明具有重大影响的例子.

万有引力定律基于开普勒行星运动的三大定律. 牛顿发现了万有引力定律,这是人类对宇宙认识的一次伟大革命. 牛顿把他最重要的著作命名为"自然哲学的数学原理",是因为他发现新宇宙的思维方式是数学的思维方式.

爱因斯坦的相对论是宇宙观的另一次伟大革命,其核心内容是时空观的改变. 牛顿力学的时空观认为时间与空间不相干. 爱因斯坦的时空观却认为时间和空间是相互联系的. 促使爱因斯坦做出这一伟大贡献的仍是数学的思维方式.

太阳系的最远的行星之一海王星,是1846年在数学计算的基础上发现的. 天文学家阿达姆斯和勒未累分析了天王星运动的不规律性,得出结论:这种不规律性是由其他行星的引力而发生的. 勒未累根据力学法则和引力法则计算出这颗行星应该位于何处,他把这个结果告诉了观察员,观察员通过望远镜在勒未累指出的位置看到了这颗行星. 这个发现是数学计算的胜利.

另一个著名的例子是电磁波的发现. 英国物理学家麦克斯韦概括了由实验建立起来的电磁现象规律,并把这些规律表达为"方程的形式",他用纯粹数学的方法从这些方程推导出可能存在着电磁波并且这些电磁波应该以光速传播着. 据此他提出了光的电磁理论,这个理论后来被全面地发展和论证了. 除此之外,麦克斯韦的结论还推动了人们去寻找纯电起源的电磁波. 例如,由振动发电所发射的电磁波. 这样的电磁波果然为赫兹所发现. 而不久之后,波波夫就找到了电磁振荡的激发、发送和接收的办法,并把这些办法带到许多应用部门,为无线通讯技术奠定了基础.

现在已进入信息时代,无线技术对于人类生活是何等重要,人人都已体会到. 但是我们可不要忘记,纯粹数学在这里曾起过巨大作用.

另一个著名的例子是非欧几何的诞生. 它是从欧几里得时代起的几千年来,从人们想要

证明平行公理的企图中，也就是说，从一个只有纯粹数学趣味的问题中产生的. 罗巴切夫斯基创立了这门新的几何学，他自己谨慎地称之为“想象的”，因为他还不能指出它的现实意义，尽管他相信会找到这种现实意义的. 他的几何的大多数结论对大多数人来说，非但不是“想象的”，而且简直是不可想象的和荒诞的. 可是无论如何，罗巴切夫斯基的思想为几何学的新发展以及各种不同的非欧几里得空间的理论的建立打下了基础. 后来这些思想成为广义相对论的基础之一，而且四维非欧几何的一种形式成了广义相对论的数学工具. 这样，看来是不可理解的抽象数学体系成了一个最重要的物理理论发展的有力工具.

1.1.5 现代数学发展的新趋向

数学的现代发展不仅表现在现代数学的新领域和高层次中，而且还表现在数学向一切学科与社会部门的渗透和应用. 现代数学正在向复杂性进军，研究的对象越来越复杂，其主要表现有以下几方面：

(1) 从单变量到多变量，从低维到高维.

(2) 从线性到非线性.

(3) 从局部到整体，从简单到复杂.

(4) 从连续到间断，从稳定到分岔.

(5) 从精确到模糊.

(6) 计算机的使用.

1.1.6 计算机对数学发展的影响

电子计算机的出现是20世纪科学的最大成就之一，它冲击、影响和促进着现代数学的发展，改变着数学学科本身的特点和面貌. 电子计算机强大的计算能力使数学如虎添翼，比以前任何时候都更有威力和渗透力. 一些复杂的数学问题，过去由于求解困难或计算量过大而不易处理和应用，现在可以依靠计算机直接给出数值答案，这不但极大地扩展了数学的应用范围，也改变了对数学求解的概念.

计算机也改变了数学应用的实践方式. 天文学中的超新星爆发过程，地学中的地壳运动等都难以进行实验，但却可以用计算机通过数学模型来模拟，从而对各种理论进行检验. 这样科学研究除了传统的理论工作和实验外，又出现了计算机上进行的数学实验. 因为这种方法既快又省，所以它具有极大的优越性.

计算机给数学理论提出了一系列新课题. 如符号计算，机器证明，人工智能等，这些新课题的研究将扩大计算机的功能，从而进一步解放人的大脑. 计算机为数学研究提供了新方法，例如，四色问题这一著名的数学难题正是借助计算机来解决的. 计算机结束了长期以来数学家的工具只是纸和笔的历史，而进入了数学的机器生产新时代.

§1.2 数学的起源与发展

数学是人类智慧的结晶，它的历史几乎和人类文明一样古老. 从两河流域的巴比伦泥

板,到古代埃及的纸草算术书,从古代希腊欧几里得《几何原本》,到中国古代的《九章算术》,数学的发展如同历史的长河,不停地奔腾向前. 文艺复兴卷起的历史狂飙,催生出欧洲新生的资产阶级文化,同时加速了数学从古典向近代转变的步伐. 17 世纪由牛顿和莱布尼茨共同创立的微积分,展示了它无穷的威力,解决了工业革命中迫切的实际问题,也使得欧洲跃起为世界数学的中心.

本节主要介绍中国数学的发展历史.

数学是中国古代科学中一门重要的学科,根据中国古代数学发展的特点,可以分为五个时期:萌芽、体系的形成、发展、繁荣和中西方数学的融合.

1.2.1 中国古代数学的萌芽

原始公社末期,私有制和货物交换产生以后,数与形的概念有了进一步的发展. 仰韶文化时期出土的陶器,上面已刻有表示 1,2,3,4 的符号. 到原始公社末期,已开始用文字符号取代结绳记事了.

西安半坡出土的陶器有用 1 ~ 8 个圆点组成的等边三角形和分正方形为 100 个小正方形的图案,半坡遗址的房屋基址都是圆形和方形. 为了画圆作方,确定平直,人们还创造了规、矩、准、绳等作图与测量工具. 据《史记・夏本纪》记载,夏禹治水时已使用了这些工具.

商代中期,在甲骨文中已产生一套十进制数字和记数法,其中最大的数字为三万;与此同时,殷人用十个天干和十二个地支组成甲子、乙丑、丙寅、丁卯等 60 个名称来记 60 天的日期;在周代,又把以前用阴、阳符号构成的八卦表示 8 种事物发展为六十四卦,表示 64 种事物.

公元前 1 世纪的《周髀算经》提到西周初期用矩测量高、深、广、远的方法,并举出勾股形的勾三、股四、弦五以及环矩可以为圆等例子.《礼记・内则》篇提到西周贵族子弟从 9 岁开始便要学习数目和记数方法,他们要受礼、乐、射、御、数、书的训练,作为"六艺"之一的数已经开始成为专门的课程.

春秋战国之际,筹算已得到普遍的应用,筹算记数法已使用十进位值制,这种记数法对世界数学的发展是有划时代意义的. 这个时期的测量数学在生产上有了广泛应用,在数学上亦有相应的提高.

战国时期的百家争鸣也促进了数学的发展,尤其是对于名词和一些命题的争论直接与数学有关. 名家认为经过抽象以后的名词概念与它们原来的实体不同,他们提出"矩不方,规不可以为圆",把"大一"(无穷大)定义为"至大无外","小一"(无穷小)定义为"至小无内". 还提出了"一尺之棰,日取其半,万世不竭"等命题.

而墨家则认为名来源于物,名可以从不同方面和不同深度反映物. 墨家给出一些数学定义,例如圆、方、平、直、次(相切)、端(点)等.

墨家不同意"一尺之棰"的命题,提出一个"非半"的命题来进行反驳:将一线段按一半一半地无限分割下去,就必将出现一个不能再分割的"非半",这个"非半"就是点.

名家的命题论述了有限长度可分割成一个无穷序列,墨家的命题则指出了这种无限分割的变化和结果. 名家和墨家的数学定义和数学命题的讨论,对中国古代数学理论的发展是很有意义的.

1.2.2 中国古代数学体系的形成

秦汉是封建社会的上升时期,经济和文化均得到迅速发展.中国古代数学体系正是形成于这个时期,它的主要标志是算术已成为一个专门的学科,以及以《九章算术》为代表的数学著作的出现.

《九章算术》是战国、秦、汉封建社会创立并巩固时期数学发展的总结,就其数学成就来说,堪称是世界数学名著.例如分数四则运算、今有术(西方称三率法)、开平方与开立方(包括二次方程数值解法)、盈不足术(西方称双设法)、各种面积和体积公式、线性方程组解法、正负数运算的加减法则、勾股形解法(特别是勾股定理和求勾股数的方法)等,水平都是很高的.其中方程组解法和正负数加减法则在世界数学发展上是遥遥领先的.就其特点来说,它形成了一个以筹算为中心、与古希腊数学完全不同的独立体系.

《九章算术》有几个显著的特点:采用按类分章的数学问题集的形式;算式都是从筹算记数法发展起来的;以算术、代数为主,很少涉及图形性质;重视应用,缺乏理论阐述;等等.

这些特点是同当时社会条件与学术思想密切相关的.秦汉时期,一切科学技术都要为当时确立和巩固封建制度,以及发展社会生产服务,强调数学的应用性.最后成书于东汉初年的《九章算术》,排除了战国时期在百家争鸣中出现的名家和墨家重视名词定义与逻辑的讨论,偏重于与当时生产、生活密切相结合的数学问题及其解法,这与当时社会的发展情况是完全一致的.

《九章算术》在隋唐时期曾传到朝鲜、日本,并成为这些国家当时的数学教科书.它的一些成就如十进位值制、今有术、盈不足术等还传到印度和阿拉伯,并通过印度、阿拉伯传到欧洲,促进了世界数学的发展.

1.2.3 中国古代数学的发展

魏、晋时期出现的玄学,不为汉儒经学束缚,思想比较活跃;它诘辩求胜,又能运用逻辑思维,分析义理,这些都有利于数学从理论上加以提高.吴国赵爽注《周髀算经》,汉末魏初徐岳撰《九章算术注》,魏末晋初刘徽撰《九章算术注》、《九章重差图》都出现在这个时期.赵爽与刘徽的工作为中国古代数学体系奠定了理论基础.

赵爽是中国古代对数学定理和公式进行证明与推导的最早的数学家之一.他在《周髀算经》书中补充的"勾股圆方图及注"和"日高图及注"是十分重要的数学文献.在"勾股圆方图及注"中他提出用弦图证明勾股定理和解勾股形的五个公式;在"日高图及注"中,他用图形面积证明汉代普遍应用的重差公式.赵爽的工作是带有开创性的,在中国古代数学发展中占有重要地位.

刘徽约与赵爽同时,他继承和发展了战国时期名家和墨家的思想,主张对一些数学名词特别是重要的数学概念给以严格的定义,认为对数学知识必须进行"析理",才能使数学著作简明严密,利于读者.他的《九章算术注》不仅是对《九章算术》的方法、公式和定理进行一般的解释和推导,而且在论述的过程中有很大的发展.刘徽创造割圆术,利用极限的思想证明圆的面积公式,并首次用理论的方法算得圆周率为 157/50 和 3 927/1 250.刘徽用无穷分割的方法证明了直角方锥与直角四面体的体积比恒为 2:1,解决了一般立体体积的关键问

题. 在证明方锥、圆柱、圆锥、圆台的体积时,刘徽为彻底解决球的体积提出了正确途径.

东晋以后,中国长期处于战争和南北分裂的状态. 祖冲之父子的工作就是经济文化南移以后,南方数学发展的具有代表性的工作,他们在刘徽注释《九章算术》的基础上,把传统数学大大向前推进了一步. 他们的数学工作主要有:计算出圆周率在3.141 592 6 ~ 3.141 592 7之间;提出祖氏原理;提出二次与三次方程的解法;等等. 据推测,祖冲之在刘徽割圆术的基础上,算出圆内接正6 144边形和正12 288边形的面积,从而得到了上述圆周率的结果;他又用新的方法得到圆周率两个分数值,即约率 22/7 和密率 355/113. 祖冲之这一工作,使中国在圆周率计算方面,比西方领先约1 000年之久. 祖冲之、祖暅父子总结了刘徽的有关工作,提出"幂势既同,则积不容异",即等高的两立体,若其任意高处的水平截面积相等,则这两立体体积相等,这就是著名的祖氏原理. 祖暅应用这个公理,解决了刘徽尚未解决的球体积公式.

隋炀帝好大喜功,大兴土木,客观上促进了数学的发展. 唐初王孝通的《缉古算经》,主要讨论土木工程中计算土方、工程分工、验收以及仓库和地窖的计算问题,反映了这个时期数学的情况. 王孝通在不用数学符号的情况下,列出数字三次方程,不仅解决了当时社会的需要,也为后来天元术的建立打下基础. 此外,对传统的勾股形解法,王孝通也是用数字三次方程解决的.

唐初封建统治者继承隋制,656 年在国子监设立算学馆,设有算学博士和助教,学生 30 人. 由太史令李淳风等编纂注释《算经十书》,作为算学馆学生用的课本,明算科考试亦以这些算书为准. 李淳风等编纂的《算经十书》,对保存数学经典著作、为数学研究提供文献资料方面是很有意义的. 他们给《周髀算经》、《九章算术》以及《海岛算经》所作的注解,对读者是有帮助的. 隋唐时期,由于历法的需要,天算学家创立了二次函数的内插法,丰富了中国古代数学的内容.

算筹是中国古代的主要计算工具,它具有简单、形象、具体等优点,但也存在布筹占用面积大,运筹速度加快时容易摆弄不正而造成错误等缺点,因此很早就开始进行改革. 其中太乙算、两仪算、三才算和珠算都是用珠的槽算盘,在技术上是重要的改革. 尤其是珠算,它继承了筹算五升十进与位值制的优点,又克服了筹算纵横记数与置筹不便的缺点,优越性十分明显. 但由于当时乘、除算法仍然不能在一个横列中进行,算珠还没有穿档,携带不方便,因此仍没有普遍应用.

唐中期以后,商业繁荣,数字计算增多,迫切要求改革计算方法,从《新唐书》等文献留下来的算书书目,可以看出这次算法改革主要是简化乘、除算法,唐代的算法改革使乘、除算法可以在一个横列中进行运算,它既适用于筹算,也适用于珠算.

1.2.4 中国古代数学的繁荣

公元960 年,北宋王朝的建立结束了五代十国割据的局面. 北宋的农业、手工业、商业空前繁荣,科学技术突飞猛进,火药、指南针、印刷术三大发明就是在这种经济高涨的情况下得到广泛应用. 1084 年秘书省第一次印刷出版了《算经十书》,1213 年鲍擀之又进行翻刻. 这些都为数学发展创造了良好的条件.

从 11 ~ 14 世纪约 300 年期间,出现了一批著名的数学家和数学著作,如贾宪的《黄帝九

章算经细草》，刘益的《议古根源》，秦九韶的《数书九章》，李冶的《测圆海镜》和《益古演段》，杨辉的《详解九章算法》、《日用算法》和《杨辉算法》，朱世杰的《算学启蒙》和《四元玉鉴》，等等，很多领域都达到古代数学的高峰，其中一些成就也是当时世界数学的高峰.

从开平方、开立方到四次以上的开方，在认识上是一个飞跃，实现这个飞跃的就是贾宪. 杨辉在《九章算法纂类》中载有贾宪"增乘开平方法"、"增乘开立方法"；在《详解九章算法》中载有贾宪的"开方作法本源"图、"增乘方法求廉草"和用增乘开方法开四次方的例子. 根据这些记录可以确定贾宪已发现二项系数表，创造了增乘开方法. 这两项成就对整个宋元数学发生重大的影响，其中贾宪三角比西方的帕斯卡三角早提出 600 多年.

把增乘开方法推广到数字高次方程(包括系数为负的情形)解法的是刘益.《杨辉算法》中"田亩比类乘除捷法"卷，介绍了原书中 22 个二次方程和 1 个四次方程，后者是用增乘开方法解三次以上的高次方程的最早例子.

秦九韶是高次方程解法的集大成者，他在《数书九章》中收集了 21 个用增乘开方法解高次方程(最高次数为 10)的问题. 为了适应增乘开方法的计算程序，秦九韶把常数项规定为负数，把高次方程解法分成各种类型. 当方程的根为非整数时，秦九韶采取继续求根的小数，或用减根变换方程各次幂的系数之和为分母，常数为分子来表示根的非整数部分，这是《九章算术》和刘徽注《九章算术》处理无理数方法的发展. 在求根的第二位数时，秦九韶还提出以一次项系数除常数项为根的第二位数的试除法，这比西方最早的霍纳方法早 500 多年.

元代天文学家王恂、郭守敬等在《授时历》中解决了三次函数的内插值问题. 秦九韶在"缀术推星"题、朱世杰在《四元玉鉴》"如象招数"题都提到内插法(他们称为招差术)，朱世杰得到一个四次函数的内插公式.

用天元(相当于 x)作为未知数符号，列出高次方程，古代称为天元术，这是中国数学史上首次引入符号，并用符号运算来解决建立高次方程的问题. 现存最早的天元术著作是李冶的《测圆海镜》.

从天元术推广到二元、三元和四元的高次联立方程组，是宋元数学家又一项杰出的创造. 留传至今，并对这一杰出创造进行系统论述的是朱世杰的《四元玉鉴》.

朱世杰的四元高次联立方程组表示法是在天元术的基础上发展起来的. 他把常数放在中央，四元的各次幂放在上、下、左、右四个方向上，其他各项放在四个象限中. 朱世杰的最大贡献是提出四元消元法，其方法是先择一元为未知数，其他元组成的多项式作为这个未知数的系数，列成若干个一元高次方程式，然后应用互乘相消法逐步消去这一未知数. 重复这一步骤便可消去其他未知数，最后用增乘开方法求解. 这是线性方程组解法的重大发展，比西方同类方法早 400 多年.

勾股形解法在宋元时期有新的发展，朱世杰在《算学启蒙》卷下提出已知勾弦和、股弦和求解勾股形的方法，补充了《九章算术》的不足. 李冶在《测圆海镜》中对勾股容圆问题进行了详细的研究，得到九个容圆公式，大大丰富了中国古代几何学的内容.

已知黄道与赤道的夹角和太阳从冬至点向春分点运行的黄经余弧，求赤经余弧和赤纬度数，是一个解球面直角三角形的问题，传统历法都是用内插法进行计算. 元代王恂、郭守敬等则用传统的勾股形解法、沈括用会圆术和天元术解决了这个问题. 不过他们得到的是一个

近似公式,结果不够精确.但他们的整个推算步骤是正确无误的,从数学意义上讲,这个方法开辟了通往球面三角法的途径.

中国古代计算技术改革的高潮也是出现在宋元时期.宋、元、明的历史文献中载有大量这个时期的实用算术书目,其数量远比唐代为多,改革的主要内容仍是乘除法.在算法改革的同时,穿珠算盘在北宋可能已出现.但如果把现代珠算看成是既有穿珠算盘,又有一套完善的算法和口诀,那么应该说它最后完成于元代.

宋元数学的繁荣,是社会经济发展和科学技术发展的必然结果,是传统数学发展的必然结果.此外,数学家们的科学思想与数学思想也是十分重要的.宋元数学家都在不同程度上反对理学家的象数神秘主义.秦九韶虽曾主张数学与道学同出一源,但他后来认识到,“通神明”的数学是不存在的,只有“经世务类万物”的数学;莫若在《四元玉鉴》序文中提出的“用假象真,以虚问实”则代表了高度抽象思维的思想方法;杨辉对纵横图结构进行研究,揭示出洛书的本质,有力地批判了象数神秘主义.所有这些,无疑是促进数学发展的重要因素.

1.2.5　中西方数学的融合

中国从明代开始进入了封建社会的晚期,封建统治者实行极权统治,宣传唯心主义哲学,施行八股考试制度.在这种情况下,除珠算外,数学发展逐渐衰落.

16 世纪末以后,西方初等数学陆续传入中国,使中国数学研究出现一个中西数学融会贯通的局面;鸦片战争以后,近代数学开始传入中国,中国数学便转入一个以学习西方数学为主的时期;到 19 世纪末 20 世纪初,近代数学研究才真正开始.

从明初到明中叶,商品经济有所发展,和这种商业发展相适应的是珠算的普及.明初《魁本对相四言杂字》和《鲁班木经》的出现,说明珠算已十分流行.前者是儿童看图识字的课本,后者把算盘作为家庭必需用品列入一般的木器家具手册中.

随着珠算的普及,珠算算法和口诀也逐渐趋于完善.例如王文素和程大位增加并改善撞归、起一口诀;徐心鲁和程大位增添加、减口诀并在除法中广泛应用归除,从而实现了珠算四则运算的全部口诀化;朱载堉和程大位把筹算开平方和开立方的方法应用到珠算,程大位用珠算解数学二次、三次方程;等等.程大位的著作在国内外流传很广,影响很大.

1582 年,意大利传教士利玛窦到中国,1607 年以后,他先后与徐光启翻译了《几何原本》前六卷、《测量法义》一卷,与李之藻编译《圜容较义》和《同文算指》.1629 年,徐光启奉命督修历法,在他主持下,编译《崇祯历书》137 卷.《崇祯历书》主要是介绍欧洲天文学家第谷的地心学说.作为这一学说的数学基础,希腊的几何学,欧洲玉山若干的三角学,以及纳皮尔算筹、伽利略比例规等计算工具也同时介绍进来.

在传入的数学中,影响最大的是《几何原本》.《几何原本》是中国第一部数学翻译著作,绝大部分数学名词都是首创,其中许多至今仍在沿用.徐光启认为对它“不必疑”、“不必改”,“举世无一人不当学”.《几何原本》是明清两代数学家必读的数学书,对他们的研究工作颇有影响.

其次应用最广的是三角学,介绍西方三角学的著作有《大测》、《割圆八线表》和《测量全义》.《大测》主要说明三角八线(正弦、余弦、正切、余切、正割、余割、正矢、余矢)的性质、造表方法和用表方法.《测量全义》除增加一些《大测》所缺的平面三角外,比较重要的是积化