新世纪高等学校教材

北京市高等教育精品教材

数学及应用数学专业主干课程系列教材

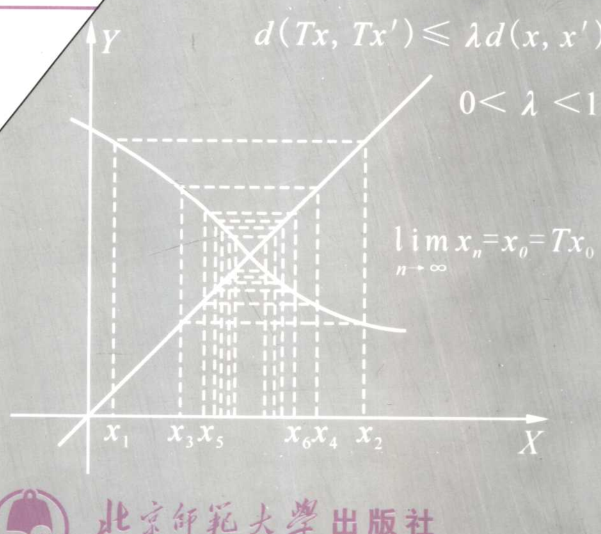
孙永生 王昆扬 编著

北京师范大学数学科学学院 组编

泛函分析讲义

FANHAN FENXI JIANGYI

第二版



北京师范大学出版社
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PRESS

新世纪高等学校教材

北京市高等教育精品教材

数学及应用数学专业主干课程系列教材

北京师范大学数学科学学院 组编

泛函分析讲义 第二版

FANHAN FENXI JIANGYI

孙永生 王昆扬 编著

北京师范大学出版社
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PRESS
北京

图书在版编目（CIP）数据

泛函分析讲义/孙永生，王昆扬编著. －2. 版－北京：北京师范大学出版社,2007. 12
（新世纪高等学校教材）
ISBN 978－7－303－00095－1

Ⅰ.泛… Ⅱ.①孙…②王… Ⅲ.泛函分析－高等学校－教学参考资料 Ⅳ.O177

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 173481 号

出版发行：北京师范大学出版社 www. bnup. com. cn
北京新街口外大街 19 号
邮政编码：100875
印　　刷：唐山市润丰印务有限公司
经　　销：全国新华书店
开　　本：170 mm×230 mm
印　　张：15
字　　数：250 千字
印　　数：1～3 000
版　　次：2007 年 12 月第 2 版
印　　次：2007 年 12 月第 1 次印刷
定　　价：22. 50 元

责任编辑：岳昌庆　胡　维　　装帧设计：李　强
责任校对：李　菡　　责任印制：董本刚

内容提要

第二版由第一版的五章改编为六章.

第一章介绍距离空间的基本概念，并介绍了压缩映射原理及其对于微分方程理论的应用.

第二章介绍线性赋范空间的基本概念以及线性赋范空间上的线性算子，包括线性泛函的基本概念.

第三章介绍内积空间的概念，着眼于无限维空间，介绍了不一定可分的内积空间的标准正交基的概念.

第四章介绍线性算子和线性泛函的基本理论，包括 Baire 纲推理的方法，开映射定理，逆算子定理，闭图像定理，一致有界原理 (共鸣定理), 以及 Hahn-Banach 的连续线性泛函保范延拓定理.

第五章讲述共轭空间和伴随算子，详细介绍了一致连续函数空间的共轭空间， p 次可积函数空间的共轭空间. 讲述了弱收敛和弱星收敛的概念. 还介绍了一般线性赋范空间上线性算子的伴随算子, 以及 Hilbert 空间伴随算子及自伴算子.

第六章讲述紧算子，全连续算子的概念. 介绍了无限维空间上的全连续算子的 Schauder 不动点定理及其在微分方程理论中的应用. 讲述了 Hilbert 空间上的线性全连续算子的性质，研究了全连续自伴算子的谱结构. 作为例子考察了具有 Hermite 型核的积分算子.

每节后均配有习题. 书后附有名词索引.

本书可供综合大学和高等师范院校数学专业做为教材或教学参考书.

北京师范大学数学科学学院简介

北京师范大学数学系成立于 1922 年，其前身为 1915 年创建的北京高等师范学校数理部， 1983 年成立了数学与数学教育研究所， 2004 年成立了数学科学学院. 学院现有教师 73 人，其中教授 32 名 (博士生导师 29 名)，副教授 23 名；有博士学位的教师占 90%. 特别地，有中国科学院院士 2 名，国家杰出青年基金获得者 4 人，教育部长江学者奖励计划特聘教授 4 人和讲座教授 1 人，入选新世纪百千万人才工程国家级人选 2 人，入选教育部跨 / 新世纪人才培养计划 7 人.

数学科学学院 1981 年获基础数学、概率论与数理统计学博士学位授予权，1986 年获应用数学博士学位授予权， 1988 年，基础数学、概率论与数理统计学被评为国家级重点学科，1990 年建立了北京师范大学第一个博士后流动站，1996 年，数学学科成为国家 211 工程重点建设的学科， 1997 年成为国家基础科学人才培养基金基地， 1998 年获数学一级学科博士授予权， 2001 年概率论方向被评为国家自然科学基金创新群体，2002 年概率论与数理统计学再次被评为国家级重点学科， 2005 年进入 “985 工程” 科技创新基础建设平台， 2006 年国家教育部数学与复杂系统重点实验室已经通过专家论证，目前正在建设中. 2007 年概率论与数理统计学重点学科通过考核评估，基础数学被增补为国家级重点学科，数学被认定为国家级一级重点学科. 学院还有基础数学、计算数学、概率论与数理统计学、应用数学、课程与教学论 (数学) 、科学技术史 (数学) 、计算机软件与理论、控制理论与控制工程 8 个硕士点. 学院下设数学系、统计与金融数学系，有数学与应用数学、统计学 2 个本科专业；有分析、代数、几何、方程、概率论、数理统计、计算数学、应用数学、数学教育与数学史 9 个教研室和《数学通报》杂志编辑部. 数学与数学教育研究所有随机数学、生物信息、模糊系统与模糊信息处理、统计数据分析、数学现代分析、科学计算、动力系统 7 个研究中心，有复杂系统实时控制、数据统计与分析 2 个实验室.

90 多年来，数学科学学院已毕业全日制本科生 6467 人. 20 多年来，已毕业博士研究生 189 人，硕士研究生 818 人. 据不完全统计，在博士毕业生中：有 2 人当选为中国科学院院士， 5 人获国家杰出青年基金， 4 人获国家自然科学奖， 3 人获国家级有突出贡献的中青年专家称号， 2 人入选新世纪百千万人才工程国家级人选， 2 人入选教育部优秀青年教师资助计划， 7 人入选教育部跨 / 新世纪人才培养计划， 1 人入选全国百篇优秀博士学位论文. 2 人获全国百篇优秀博士学位论文提名.

(李仲来执笔) 2007-09-08

第一版编者的话

这本书是以编者最近几年在北京师范大学数学系本科讲授泛函分析课的讲稿为基础写成的. 全书共分五章. 前三章介绍距离空间、线性赋范空间的基本知识. 第四章介绍在分析中有广泛应用价值的不动点定理. 第五章除了介绍 Hilbert 空间的基本知识外, 着重叙述了 Hilbert 空间内全连续自伴算子的谱分解理论及其在古典分析中的实例. 我们使用该教材的情况是, 本书的基本内容 (不包括加 * 号的部分) 可以在 60 学时左右的时间内讲完.

我们在北京师范大学数学系讲授泛函分析的过程中了解到, 不少的数学系三、四年级学生在学习这门课时还感到很困难. 他们不但难于理解其一系列的抽象概念, 尤其难于掌握其高度概括的证明方法和解题技巧. 针对这种情况, 本书在引入基本概念的时候, 力求联系学生在代数、几何、数学分析、实函数论和微分方程等基础课中已经学过的数学知识, 举出较多能为学生理解的例子, 以增加学生的感性认识. 在一些重要定理的证明中, 本书力求不仅交待清楚证明过程的逻辑线索, 而且尽可能地对证明的基本想法加以分析, 同时揭示证明中使用的手法, 以帮助学生理解其精神实质.

本书围绕着每一单元的主题都配备了一定数量的例题和习题, 这些都是课程内容的重要组成部分. 当然, 例题并不需要都在课堂上讲解, 有些可以留给学生自己阅读. 本书的课文中有些简单定理的证明或一个复杂证明的某一个环节被省略了, 这是编者有意这样做的. 把这些简单的事实或证明的细节留给学生去补充, 对于培养学生独立钻研能力或许有所帮助. 本书中习题的难度参差不齐. 为了较好地掌握课程的内容, 光挑容易的题目做是不够的, 学生至少需要独立做一部分较难的题.

在本书编写的过程中我们参考了许多泛函分析的著名的教科书和专著. 其中主要有

1. 夏道行等《实变函数论与泛函分析》上下册, 人民教育出版社, 1978, 1979, 北京.

2. 郑维行、王声望《实变函数与泛函分析概要》, 第一、二册, 人民教育出版社, 1980, 北京.

3. 关肇直《泛函分析讲义》, 高等教育出版社, 1958, 北京.

特别说明: 我们从包括上面这些书在内的很多泛函分析的著作中选择了例题、习题, 并且汲取了它们处理教材的一些独到的地方. 这里就不一一列举了.

在本书的编写过程中，得到了蒋硕民老师的热情关怀和支持. 蒋铎，洪吉昌, 韩丽娟，钱佩玲等同志在教学中试用了本书的油印稿，他们帮助改正了原稿中的多处错误和不足之处. 特别是蒋铎，洪吉昌二位同志在紧张的教学之余，仔细审查了本书的全部习题，并为之配备了解法提示. 我向以上各位老师和同志表示衷心感谢. 最后，由于编者水平有限，本书定有不妥之处，衷心希望读者予以指正.

孙永生谨识

1985 年 9 月 15 日于北京师范大学

第二版前言

1915年北京高等师范学校成立数理部, 1922年成立数学系. 2005年适逢数理部诞辰90周年, 也是北京师范大学数学科学学院建院1周年. 经过90年的风风雨雨, 数学科学学院在学科建设、人才培养和教学实践中积累了丰富的经验. 将这些经验落实并贯彻到教材编著中去是大有益处的.

1980年, 北京师范大学出版社成立, 给教材的出版提供了一个很好的契机. 北京师范大学数学科学学院教师编著的数十种教材已先后在这里出版. 除了北京师范大学现代数学丛书外, 就大学教材而言, 共有五种版本. 第一种是列出编委会的高等学校教学用书, 这是在1985年,由我校出版社王文湧先生约请北京师范大学数学与数学教育研究所所长严士健教授等组成编委会, 研究编写出版一套数学系本科生教材和非数学专业高等数学教材（共17部）. 在出版社的大力支持下, 这一计划完全实现, 满足了当时教学的需要. 第二种是标注高等学校教学用书, 但未列编委会的教材. 第三种是(北京师范大学)面向21世纪课程教材. 第四种是北京师范大学现代数学课程教材. 第五种是未标注高等学校教学用书, 但实际上是高等学校教学用书. 在这些教材中,除再次印刷外, 已经有五部教材进行了修订或出版了第二版.

前一段时间, 王建华老师和王琦老师分别搜集了北京师范大学数学科学学院本科生的所有教材和研究生12门基础课教材的使用情况, 李仲来教授汇总了北京师范大学数学科学学院教师在北京师范大学出版社出版的全部著作, 由李仲来教授和北京师范大学出版社理科编辑部王松浦主任进行了沟通和协商, 由李仲来教授组编, 准备对北京师范大学数学科学学院教师目前使用或誊印(出版社已经没有存书的教材)的北京师范大学出版社出版的部分教材进行修订后再版. 计划用几年时间, 出版数学及应用数学专业本科生、非数学专业本科生(大学数学基础课程)、课程与教学论、数学一级学科硕士研究生四个系列的主要课程教材.

本套教材可供高等院校本科生、教育学院数学系、函授(数学专业)和在职中学教师等使用和参考.

北京师范大学数学科学学院
2005-08-08

第二版编者的话

本书初版至今，已逾 21 年. 其间曾多次在北京师范大学数学系 (现为数学科学学院) 作为教材使用. 本人就曾用它讲过多次.

作为原著者孙永生教授的学生，我每次为学生讲这本书时，自己都首先从中获取宝贵的教益. 不仅是在泛函分析学科的知识方面总能有新的收获，更重要的是透过这本书，一次一次更深刻地感悟到先生的教学精神. 正像先生在第一版前言中说的 “本书力求不仅交待清楚证明过程的逻辑线索，而且尽可能地对证明的基本想法加以分析，同时揭示证明中使用的手法，以帮助学生理解其精神实质”. 这几句话朴实无华，真正做到可并不容易. 我觉得先生是做到了. 他之所以能够做到，不但是由于他的学识过人，而且很重要的是由于他对于学生的满腔热情，为培养人才而无私奉献的精神. 这就是我时时从这本书的字里行间感悟到的先生的教学精神. 先生于去年不幸仙逝，但他的精神永远地留给了我们. 这次再版，我竭力要坚持的，便是先生的此种精神.

在这种精神的指导下，根据 20 来年的教学实践，我尝试着对于书的内容安排作了一些调整. 把原来的 5 章改编为 6 章，撤销了原来的第四章，把原第四章中的压缩映射原理及其应用调整到第一章. 曾在多次教学实践中这样做过，似乎对于学生掌握距离空间比较方便. 原第四章的 Schauder 不动点定理，以前常作为选读材料. 这次被安排在更后一些的第六章，在介绍一般的不需要线性性质的全连续算子的时候来介绍，若课时允许，讲一讲这个定理也好. 当然亦仍可作为选读材料. 新加的第四章，着眼于强化对于线性算子的基本定理的学习. 而第五章则意在加强对于伴随 (共轭) 理论的学习. 以往学生对于弱收敛和弱星收敛的概念的掌握常有困难. 集中起来讲，也许会起一点强化的作用. 建议讲授学时 72.

增加了几本参考书，有早年的也有近年的，也有供研究生用的. 目的主要是供学有余力的学生参考. 在本科教学中如何贯彻 “因材施教” 的思想，很值得重视和探索.

恳切希望读者不吝指正本次修订的不妥之处，把宝贵的意见用 email 发至 wangky@bnu.edu.cn .

王昆扬　　于北京师范大学
2007 年 6 月 10 日

关于记号的说明

一个特别常用的记号是 $:=$ 和 $=:$, 式子 $a := b$ 和 $b =: a$ 都表示 “a” 是用 “b” 定义的，也就是说，挨着冒号的符号是用挨着等号的表达式来定义的.

另一个特别常用的记号是 $\{x:\ x$满足的条件$\}$, 它表示一个集合，如果它的元素用字母 x 表示的话，则冒号后面的语句确定 x 的属性，这个集合就是具有这种属性的元素的全体.

本书使用以下符合国家标准的通用数学记号:

$\mathbb{N}_+$: 正整数集;

$\mathbb{Z}$: 整数集;

$\mathbb{Q}$: 比例数 (rational number)(俗称有理数) 集;

$\mathbb{R}$: 实数集，或一维 Euclid 空间，或实直线;

$\mathbb{C}$: 复数集.

另外的一些通用的数学记号是:

$\operatorname{card} A$: 集合 A 的基数;

$\mathbb{R}^n$: n 维 Euclid 空间;

若 $E \subset \mathbb{R}^n$, 则 $|E|$ 表示 E 的 Lebesgue 测度;

若 E 是集合，则 χ_E 代表 E 的特征函数，即

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1, & x \in E, \\ 0, & x \notin E. \end{cases}$$

a.e. 表示几乎处处 (almost everywhere) 或 (对于) 几乎每个 (for almost every).

目 录

第一章 距离空间

泛函分析是起源于古典分析的一个数学分支，其研究对象主要是定义在无限维空间上的映射 (算子). 正如在数学分析中实数域起着基本作用一样，在泛函分析中各种类型的抽象空间起着基本的作用. 所谓抽象空间，就是在其元素间规定了某种关系的集合，而这种关系通常是借助于一组公理来刻画的. 本章要讨论的距离空间便是一类基本的抽象空间. 所谓距离空间乃是一个在其中规定了距离的集合. 我们在本章将借助于距离空间内的极限概念，对涉及极限过程的一些基本概念做较广泛的讨论.

§1 基本概念

1.1 距离空间的定义和例

距离的概念是现实物质世界中物体之间距离关系的本质特征的数学抽象.

定义 1.1-1 给定非空集 X, 实数集 $\mathbb{R}$. 如果存在一个 $X\times X$[1] 到 $\mathbb{R}$ 的二元函数 $\rho(x,y)$ 满足条件

(1)$\rho(x,x)=0$; $\rho(x,y)>0$ 对 $x\neq y$ 成立,

(2)$\rho(x,y)=\rho(y,x)$ (对称性),

(3)$\rho(x,z)\leqslant\rho(x,y)+\rho(y,z)$ (三点不等式),

则称 X 是以 ρ 为距离的 **距离空间**, 简记为 (X,ρ). ρ 称为 X 上的一个 **距离函数**.$\rho(x,y)$ 称为 x,y 的 **距离**. 距离空间中的元素也叫做点.

给定距离空间 (X,ρ), X 的非空子集 Y 按照距离 ρ 也是一个距离空间，称为 X 的 **子空间**. Y 的距离函数是 $\rho(x,y)$ 在 $Y\times Y$ 上的限制，称为 ρ 在 Y 上的 **导出距离**.

有了距离空间概念，就可以像数学分析中一样定义点列的收敛概念.

定义 1.1-2 设 $x_n(n=1,2,3,\cdots)$, $x_0\in X=(X,\rho)$, 如果 $\lim\limits_{n\to\infty}\rho(x_n,x_0)=0$, 则称点列 $\{x_n\}$ 收敛到 x_0, 记作 $x_n\to x_0$ 或 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$.

下面给出距离函数和收敛点列的一些简单命题, 它们皆可由定义直接导出.

命题 1.1-1 $\forall x,y,z,u\in X=(X,\rho)$ 有

$$|\rho(x,y)-\rho(z,u)|\leqslant\rho(x,z)+\rho(y,u). \tag{1.1}$$

[1] $X\times X$ 表示卡式积，即由一切序偶 (x,y) 所成之集，这里 $x,y\in X$.

证 由三点不等式得

$$\rho(x,y) \leqslant \rho(x,z)+\rho(z,u)+\rho(u,y), \quad \rho(z,u) \leqslant \rho(z,x)+\rho(x,y)+\rho(y,u).$$

由此，并利用 ρ 的对称性得

$$\pm(\rho(x,y)-\rho(z,u)) \leqslant \rho(x,z)+\rho(y,u). \qquad \square$$

命题 1.1-2 距离空间内的点列至多收敛到一个点.

证 设 $\{x_n\} \subset X$, x', x'' 是其极限. 则有

$$\rho(x',x'') \leqslant \rho(x',x_n)+\rho(x_n,x''), \quad n=1,2,3,\cdots$$

由 $\rho(x',x_n) \to 0, \rho(x'',x_n) \to 0$ 得 $\rho(x',x'')=0$, 从而 $x'=x''$. $\square$

命题 1.1-3 距离函数 $\rho(x,y)$ 是两个变元的连续函数, 即若 $x_n \to x_0$, $y_n \to y_0$, 则 $\rho(x_n,x_n) \to \rho(x_0,x_0)$.

证 由命题 1.1-1 得

$$|\rho(x_n,y_n)-\rho(x_0,y_0)| \leqslant \rho(x_n,x_0)+\rho(y_n,y_0),$$

从而 $\rho(x_n,x_n) \to \rho(x_0,x_0)$. $\square$

距离空间中的收敛点列还具有普通的收敛数列所具有的某些别的属性，比如有界性. 我们下面给出距离空间中有界集的定义.

定义 1.1-3 给定 (X,ρ), $x_0 \in X$, $r>0$. 点集 $B(x_0,r)=\{x \in X : \rho(x,x_0)<r\}$ 叫做 X 内以 x_0 为中心， r 为半径的 **开球**.

设 $A \subset X$. 如果存在一个 X 内的开球 $B(x_0,r) \supset A$, 那么就称 A 是 X 内的**有界集**.

命题 1.1-4 距离空间内的收敛点列是有界集.

证 设 $x_n \to x_0$. 取 $\varepsilon=1$, 则有自然数 N, 对一切 $n>N$ 都有 $\rho(x_n,x_0)<1$. 记 $a=\max\{\rho(x_1,x_0),\cdots,\rho(x_N,x_0)\}$ 便得

$$\rho(x_n,x_0)<1+a, \quad n=1,2,3,\cdots \qquad \square$$

下面给出距离空间的几个具体例子，并且解释在这些空间内点列收敛性的具体含义.

例 1.1-1 n 维欧几里得空间 $\mathbb{R}^n$. 其元素是一切形如 $x=(x_1,\cdots,x_n)$ 的 n 元有序实数组. $\mathbb{R}^n$内任意两点 $x=(x_1,\cdots,x_n)$， $y=(y_1,\cdots,y_n)$ 的距离，常

叫做 **Euclid 距离**, 由下式给出

$$\rho(x,y)=\left\{\sum_{k=1}^{n}|x_k-y_k|^2\right\}^{\frac{1}{2}}. \tag{1.2}$$

$\rho(x,y)$ 满足定义 1.1-1 的三个条件. 条件 (1) 、 (2) 是明显的. 仅需验证三点不等式. 为此先建立

Schwarz 不等式 任给 $2n$ 个实数 $a_1,\cdots,a_n$, $b_1,\cdots,b_n$, 有

$$\left(\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\right)^2\leqslant\sum_{k=1}^{n}a_k^2\cdot\sum_{k=1}^{n}b_k^2. \tag{1.3}$$

事实上, 任取实数 λ, 则由

$$0\leqslant\sum_{k=1}^{n}(a_k+\lambda b_k)^2=\sum_{k=1}^{n}a_k^2+2\lambda\sum_{k=1}^{n}a_kb_k+\lambda^2\sum_{k=1}^{n}b_k^2,$$

知右端二次三项式的判别式不大于零, 这便是 (1.3). 由 Schwarz 不等式易得

Minkowski 不等式 任给 $2n$ 个实数 $a_1,\cdots,a_n$, $b_1,\cdots,b_n$, 有

$$\left\{\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^2\right\}^{\frac{1}{2}}\leqslant\left\{\sum_{k=1}^{n}a_k^2\right\}^{\frac{1}{2}}+\left\{\sum_{k=1}^{n}b_k^2\right\}^{\frac{1}{2}}. \tag{1.4}$$

事实上, 由 (1.3) 得

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^2&=\sum_{k=1}^{n}a_k^2+2\sum_{k=1}^{n}a_kb_k+\sum_{k=1}^{n}b_k^2\\&\leqslant\sum_{k=1}^{n}a_k^2+2\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^2\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\sum_{k=1}^{n}b_k^2\right)^{\frac{1}{2}}+\sum_{k=1}^{n}b_k^2\\&=\left[\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^2\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\sum_{k=1}^{n}b_k^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2.\end{aligned}$$

这就证明了 (1.4).

由 (1.4), 只需令 $a_k=x_k-y_k$, $b_k=y_k-z_k$, $k=1,\cdots,n$, 这里 $x=(x_1,\cdots,x_n)$, $y=(y_1,\cdots,y_n)$, $z=(z_1,\cdots,z_n)$, 便得到三点不等式.

$\mathbb{R}^n$内点列的收敛性 易见 $\mathbb{R}^n$内点列的收敛相当于依坐标收敛. 详细地讲, 设 x^m, x $(m=1,2,3,\cdots)$ 是 $\mathbb{R}^n$内的点, $x^m=(x_1^m,\cdots,x_n^m)$, $x=(x_1,\cdots,x_n)$,

那么 $\rho(x^m, x) \to 0 \Longleftrightarrow x_k^m \to x_k(m \to \infty), k = 1, \cdots, n$. 这个事实从定义是容易验证的.

例 1.1-2 定义在闭区间 $[a, b]$ 上的实值 (或复值) 连续函数集 $C[a, b]$, 对于其中任取的两个函数 f, g 规定

$$\rho(f, g) = \max_{a \leqslant t \leqslant b} |f(t) - g(t)|. \tag{1.5}$$

容易验证, ρ 是一个距离函数.

$C[a, b]$ 内点列的收敛相当于函数列的一致收敛. 事实上, 设 $f_n, f \in C[a, b]$, $n = 1, 2, \cdots$, 那么 $\rho(f_n, f) \to 0$ 当且仅当

$$\max_{a \leqslant t \leqslant b} |f_n(t) - f(t)| \to 0 \quad (n \to \infty).$$

最后的事实等价于函数序列 $\{f_n\}$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛到 f.

例 1.1-3 设 E 是 $\mathbb{R}^n (n \geqslant 1)$ 内的有界 Lebesgue 可测集, 其测度 $\text{meas}(E) > 0$. 定义在 E 上的几乎处处有限的可测函数集记作 $S(E)$. 任取 $f, g \in S(E)$[II], 我们规定

$$\rho(f, g) = \int_E \frac{|f(t) - g(t)|}{1 + |f(t) - g(t)|} dt. \tag{1.6}$$

$\rho(f, g)$ 是一距离函数. 事实上, 定义 1.1-1 的条件 (1), (2) 是明显的, 我们只需来验证条件 (3). 为此, 注意函数 $\phi(u) = \dfrac{u}{1+u}$ $(u \geqslant 0)$ 是单调上升的, 那么, 任取 a, b 二数有

$$\begin{aligned} \frac{|a+b|}{1+|a+b|} &\leqslant \frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|} \\ &= \frac{|a|}{1+|a|+|b|} + \frac{|b|}{1+|a|+|b|} \\ &\leqslant \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|}. \end{aligned}$$

从而在 E 上几乎处处有

$$\frac{|f(t) - h(t)|}{1 + |f(t) - h(t)|} \leqslant \frac{|f(t) - g(t)|}{1 + |f(t) - g(t)|} + \frac{|g(t) - h(t)|}{1 + |g(t) - h(t)|}.$$

这里 $f, g, h \in S(E)$. 将两边都在 E 上积分, 即得 $\rho(f, h) \leqslant \rho(f, g) + \rho(g, h)$. 三点不等式验证完.

[II] 当 $f(t) - g(t) \overset{\text{a.e.}}{=} 0$(在 E 上) 时, f, g 不加区别.

现在来讨论一下 $S(E)$ 内点列的收敛性. 我们说：若 $f_k, f \in S(E)$, $k = 1,2,3,\cdots$ 则

$$\rho(f_k, f) \to 0 \Longleftrightarrow f_k \xrightarrow{\mathrm{m}} f \ \text{(依测度收敛}^{\mathrm{III}}\text{)}.$$

事实上，一方面如果有 $\rho(f_k, f) \to 0$, 则对任取的 $\varepsilon > 0$ 有自然数 N, 当 $k \geqslant N$ 时有

$$\int_E \frac{|f_k(t) - f(t)|}{1 + |f_k(t) - f(t)|} dt < \varepsilon.$$

任取 $\sigma > 0$, 置 $A_k(\sigma) = \{t \in E : |f_k(t) - f(t)| \geqslant \sigma\}$, $B_k(\sigma) = E \setminus A_k(\sigma)$. 对于 $t \in A_k(\sigma)$ 有

$$\frac{|f_k(t) - f(t)|}{1 + |f_k(t) - f(t)|} \geqslant \frac{\sigma}{1 + \sigma}.$$

故当 $k \geqslant N$ 时有

$$\varepsilon > \int_E \frac{|f_k(t) - f(t)|}{1 + |f_k(t) - f(t)|} dt \geqslant \frac{\sigma}{1 + \sigma} \mathrm{meas}(A_k(\sigma)).$$

从而得知 $\mathrm{meas}(A_k(\sigma)) \to 0$ $(k \to \infty)$. 于是 $f_k \xrightarrow{\mathrm{m}} f$.

反之，设 $f_k \xrightarrow{\mathrm{m}} f$. 易见

$$f_k \xrightarrow{\mathrm{m}} f \Longleftrightarrow \frac{|f_k(t) - f(t)|}{1 + |f_k(t) - f(t)|} \xrightarrow{\mathrm{m}} 0.$$

而由 Lebesgue 积分的控制收敛定理 (参看 [1], 第 107 页，定理 3.5) 得

$$\int_E \frac{|f_k(t) - f(t)|}{1 + |f_k(t) - f(t)|} dt \to 0 (k \to \infty).$$

例 1.1-3 讨论完毕.

与该例完全相仿的是

例 1.1-4 S 表示一切实 (或复) 数序列的集. 任取 $x, y \in S$, 记

$$x = (x_1, \cdots, x_n, \cdots), \quad y = (y_1, \cdots, y_n, \cdots).$$

规定

$$\rho_n(x, y) = \frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|}, \ n = 1,2,3,\cdots$$

III 符号 $\xrightarrow{\mathrm{m}}$ 表示依测度收敛.