研究生（非数学类）数学系列规划教材

随机过程

孙洪祥◎主编

STOCHASTIC PROCESSES

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

研究生（非数学类）数学系列规划教材

随　机　过　程

主　编　孙洪祥
参　编　杨鹏飞　程维虎
　　　　汪飞星　王玉孝
主　审　柳金甫

机 械 工 业 出 版 社

本书主要内容包括：随机过程的基本概念和随机分析、Markov 链、时间连续的 Markov 链、Poisson 过程、平稳过程、时间序列分析、布朗运动、随机积分方程和随机微分方程等，含盖了工科院校所需的随机过程的内容，可供高等理工科学校选用。

图书在版编目（CIP）数据

随机过程/孙洪祥主编. —北京：机械工业出版社，2007.11

（研究生（非数学类）数学系列规划教材）

ISBN 978-7-111-22916-2

Ⅰ. 随… Ⅱ. 孙… Ⅲ. 随机过程-研究生-教材 Ⅳ. 0211.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 182414 号

机械工业出版社（北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037）

责任编辑：张继宏 版式设计：霍永明 责任校对：姚培新

封面设计：王伟光 责任印制：邓 博

北京京丰印刷厂印刷

2008 年 1 月第 1 版 · 第 1 次印刷

169mm × 239mm · 7.375 印张 · 287 千字

标准书号：ISBN 978-7-111-22916-2

定价：18.00 元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

销售服务热线电话：（010）68326294

购书热线电话：（010）88379639 88379641 88379643

编辑热线电话：（010）88379711

序

近年来，我国研究生教育有很大发展。随着国家经济建设的多方面需求和科学技术的飞速进步，高校研究生的数学课不仅规模上均有所扩大，而且在内容上也需要不同程度的更新。在加强基础课教学的同时，为了适应不同专业的发展，也需要开设一些新课程。数学教师们经过多年的教学实践，为适应研究生教育发展的新形势，在教学改革方面做了许多努力和尝试，包括在教学基础上编写了不少研究生数学教材。这些教材的出版，对于进一步改进研究生数学教育，提高年轻教员的素质和加强各专业的数学知识和能力，无疑是十分有益的。

机械工业出版社多年来对高等学校的数学教育非常重视，在编译国内外数学教材等方面做了许多有益的工作。北京数学会和北京教学会数学研究会也十分关注研究生的数学教育和培养，在组织北京地区教师编写教材方面花了很大力气。北京地区高校资源丰富，联系密切，在教学改革和相互交流促进方面有好的基础和条件。另一方面，北京地区研究生人数多，专业面广，改进研究生数学教学的任务也十分重要的迫切。这次机械工业出版社和北京高教学会数学研究会联手，组织一批非数学专业的研究生教材，对于加强和改进研究生数学教育是一件十分有益的事情。我希望今后能把这项工作持续做下去，使研究生得到更好的数学教育，使数学成为他们的一种重要的工具和思考方式，在今后各种不同工作领域中发挥威力，产生出高水平和创新性的数学研究与应用成果。

冯克勤

2007 年 9 月于清华园

前　言

随机过程是随着20世纪初物理、化学、生物、通信、管理、控制论、规划论、排队论及信息论等学科的需要逐步发展起来的一门数学学科。随机过程的内容十分丰富，应用极其广泛。随机过程的理论与方法深入地应用于科学技术各个领域，并越来越显示出十分重要的作用。本书是为非数学类各专业研究生学习随机过程而编写的教材，是高等院校非数学类专业研究生数学系列教材之一。

本书的特点在于既重视数学上的逻辑严密性，又不忽视应用背景与应用实例。本书可使工科学生既感受到严格的分析问题的逻辑思维训练，掌握必要的理论知识与分析方法，同时，又开拓学生实际应用的思路。本书有较多的应用问题的例子，较详细地介绍了构造随机模型的方法，以帮助学生加深理解，提供应用随机过程理论解决问题的能力。

本书共分9章，其中第1章、第2章为随机过程的预备与基础知识，后面7章介绍了 Markov 链、时间连续的 Markov 链、Poisson 过程、平稳过程、时间序列分析、布朗运动、随机积分方程和随机微分方程等内容。

本书由北京交通大学柳金甫教授主审，并提出了许多宝贵的意见，编者在此表示由衷的谢意。

限于编者的经验和水平，书中可能有不少的缺点和错误，恳请读者批评指正。

编　者

目　　录

第1章　预 备 知 识

概率论的基本概念和基本理论是随机过程的基础。本章简洁扼要地复习概率论中的一些基本概念，并补充一些未曾讲授的内容，为学习随机过程作准备。

1.1　概率空间

随机试验是概率论的基本概念，有如下特征：

(1) 试验可在相同条件下重复进行；

(2) 每次试验只有一个结果出现且结果事前不能预知；

(3) 每次试验所有可能出现的结果已知。

随机试验所有可能出现的结果所组成的集合称为试验的**样本空间**或**基本事件空间**，记成 Ω。称 Ω 中的元素 ω 为**样本点**或**基本事件**，称 Ω 的子集 A 为**事件**。

在实际问题中，有时并非对样本空间 Ω 的所有子集都感兴趣，只是关心 Ω 的一些子集(事件)及其在一次试验中发生的可能性大小(概率)。为此，我们需要引入 σ-代数与概率空间的概念。

定义 1-1　设 Ω 是一样本空间，$\mathscr{F}$是 Ω 的某些子集所组成的集合，满足：

(1) $\Omega \in \mathscr{F}$;

(2) 若 $A \in \mathscr{F}$, 则 $\overline{A} = \Omega - A \in \mathscr{F}$;

(3) 若 $A_i \in \mathscr{F}$, $i = 1, 2, \cdots$, 则 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathscr{F}$。

则称 $\mathscr{F}$为 Ω 上的 **σ-代数**或**事件域**。$(\Omega, \mathscr{F})$ 为**可测空间**，$\mathscr{F}$中的元素为事件。

由定义 1-1 可知：全集 Ω 与空集$\varnothing$总属于 $\mathscr{F}$, 分别称为必然事件和不可能事件。此外，容易推出 σ-代数有如下性质：

性质 1　若 $A, B \in \mathscr{F}$, 则 $A - B \in \mathscr{F}$。

性质 2　若 $A_i \in \mathscr{F}$, $i = 1, 2, \cdots$, 则 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$, $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$, $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathscr{F}$, $n = 2, 3, \cdots$。

定义 1-2　设$(\Omega, \mathscr{F})$是可测空间，$P(\cdot)$是定义在 F 上的实值函数，满足：

(1) 对任意 $A \in \mathscr{F}$, 有 $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$;

(2) $P(\Omega) = 1$;

(3) 若 $A_1, A_2, \cdots \in \mathscr{F}$, 且两两互不相容($i \neq j$ 时，$A_i A_j = \varnothing$)，总有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

则称 P 为 $(\Omega, \mathscr{F})$ 上的**概率**，$(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 为**概率空间**，$P(A)$ 为事件 A 的概率。

概率有如下性质：

性质 1 $P(\varnothing)=0$，即不可能事件的概率为零。

性质 2 若 $A_1, A_2, \cdots \in \mathscr{F}$，则 $P\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leqslant \sum\limits_{i=1}^{\infty} P(A_i)$。

性质 3 若 $A_1, A_2, \cdots, A_n \in \mathscr{F}$，且两两互不相容，则 $P\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} P(A_i)$。

性质 4 若 $A \in \mathscr{F}$，则 $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$。

性质 5 若 $A, B \in \mathscr{F}$，且 $A \subset B$，则 $P(B-A) = P(B) - P(A)$，$P(B) \geqslant P(A)$。

性质 6 若 $A_1, A_2, \cdots, A_n \in \mathscr{F}$，则

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \leqslant i<j \leqslant n} P(A_iA_j) + \sum_{1 \leqslant i<j<k \leqslant n} P(A_iA_jA_k) - \cdots + (-1)^{n-1} P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)$$

特别地，当 $n=2$ 时，有 $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1A_2)$。

性质 7 若 $A_1, A_2, \cdots \in \mathscr{F}$，当 $A_1, A_2, \cdots$ 单调递增 $(A_n \subset A_{n+1}, n \geqslant 1)$ 时，

$$\lim_{n\to\infty} P(A_n) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = P(\lim_{n\to\infty} A_n) \tag{1-1}$$

当 $A_1, A_2, \cdots$ 单调递减 $(A_{n+1} \subset A_n, n \geqslant 1)$ 时，

$$\lim_{n\to\infty} P(A_n) = P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = P(\lim_{n\to\infty} A_n) \tag{1-2}$$

证明 对 $A_1, A_2, \cdots \in \mathscr{F}$，当其单调递增时，令 $B_1 = A_1$，$B_n = A_n - \bigcup\limits_{i=1}^{n-1} A_i$，$n=2, 3, \cdots$，则 $B_1, B_2, \cdots \in \mathscr{F}$，两两互不相容，且 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i = \bigcup\limits_{i=1}^{n} B_i$，$n=2, 3, \cdots$。由性质 3，有

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} P(A_n) &= \lim_{n\to\infty} P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \lim_{n\to\infty} P\left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} P(B_i) = \sum_{n=1}^{\infty} P(B_n) \\
&= P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \\
&= P(\lim_{n\to\infty} A_n)
\end{aligned}$$

式(1-1)得证。

当 $A_1, A_2, \cdots \in \mathscr{F}$，且单调递减时，$\overline{A_1}, \overline{A_2}, \cdots \in \mathscr{F}$，且单调递增。于是，由式(1-1)，得

$$\lim_{n\to\infty}P(\overline{A_n}) = P(\lim_{n\to\infty}\overline{A_n}) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\overline{A_n}\right)$$

而

$$\lim_{n\to\infty}P(\overline{A_n}) = \lim_{n\to\infty}[1-P(A_n)] = 1-\lim_{n\to\infty}P(A_n)$$

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\overline{A_n}\right) = P\left(\overline{\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n}\right) = 1-P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n\right)$$

故

$$\lim_{n\to\infty}P(A_n) = P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n\right) = P(\lim_{n\to\infty}A_n)$$

式(1-2)得证。证毕。

定义 1-3 设$(\Omega, \mathscr{F}, P)$是一概率空间，A，$B\in\mathscr{F}$，且$P(B)>0$，则称

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

为在事件B发生的条件下，事件A发生的**条件概率**。

不难验证：条件概率$P(\cdot|B)$满足概率定义1-2中的三条，即

(1) 对任意$A\in\mathscr{F}$，有$P(A|B)\geqslant 0$；

(2) $P(\Omega|B)=1$；

(3) 若A_1，A_2，$\cdots\in\mathscr{F}$，且两两互不相容，则有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i \mid B\right) = \sum_{i=1}^{\infty}P(A_i \mid B)$$

既然条件概率满足概率定义中的三条，那么条件概率也是概率。因此，对概率给出的所有结果，也都适用于条件概率。如：对任意A_1，$A_2\in\mathscr{F}$，有

$$P(A_1\cup A_2|B) = P(A_1|B)+P(A_2|B)-P(A_1A_2|B)$$

定理 1-1 设$(\Omega, \mathscr{F}, P)$是一概率空间，如下结论成立：

(1)（乘法公式）若A_1，A_2，$\cdots$，$A_n\in\mathscr{F}$，且$P(A_1\cdots A_{n-1})>0$，则

$$P(A_1A_2\cdots A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_n|A_1\cdots A_{n-1}) \tag{1-3}$$

(2)（全概率公式）若A，B_1，B_2，$\cdots$，$B_n\in\mathscr{F}$，$P(B_1)$，$P(B_2)$，$\cdots$，$P(B_n)>0$，且B_1，B_2，$\cdots$，B_n两两互不相容，$A\subset\bigcup_{i=1}^{n}B_i$，则

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A \mid B_i) \tag{1-4}$$

(3)（贝叶斯(Bayes)公式）若A，B_1，B_2，$\cdots$，$B_n\in\mathscr{F}$，$P(A)$，$P(B_1)$，$P(B_2)$，$\cdots$，$P(B_n)>0$，且B_1，B_2，$\cdots$，B_n两两互不相容，$A\subset\bigcup_{i=1}^{n}B_i$，则

$$P(B_i \mid A) = \frac{P(B_i)P(A \mid B_i)}{\sum_{j=1}^{n}P(B_j)P(A \mid B_j)},\ i=1,2,\cdots,n \tag{1-5}$$

定义 1-4 设$(\Omega, \mathscr{F}, P)$是一概率空间，$A_1, A_2, \cdots, A_n \in \mathscr{F}$，$n \geqslant 2$。若对任意$1 < k \leqslant n$及任意$1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n$，有

$$P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_k})$$

则称$A_1, A_2, \cdots, A_n$**相互独立**。

相互独立事件有如下性质：

性质 1 若事件$A_1, A_2, \cdots, A_n$相互独立，则$A_1, A_2, \cdots, A_n$中任意$k(\geqslant 2)$个事件$A_{i_1}, A_{i_2}, \cdots, A_{i_k}$也相互独立，其中$1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n$。

性质 2 若事件$A_1, A_2, \cdots, A_n$相互独立，则事件$B_1, B_2, \cdots, B_n$也相互独立，其中B_i或为A_i，或为$\overline{A_i}$，$i = 1, 2, \cdots, n$。

1.2 随机变量及其分布、随机变量的变换和数字特征

1.2.1 随机变量及其分布

为方便地研究随机试验的结果及其发生的概率，我们常把随机试验的结果与实数对应起来，即把随机试验的结果数量化，引入随机变量的概念。

定义 1-5 设$(\Omega, \mathscr{F}, P)$是一概率空间，$X(\cdot)$是定义在Ω上的实函数。若$\forall x \in \mathbf{R} \xlongequal{\text{def}} (-\infty, +\infty)$，总有$\{\omega: X(\omega) \leqslant x\} \in \mathscr{F}$，则称$X$为$\mathscr{F}$的**随机变量**，函数

$$F(x) = P\{X \leqslant x\}, \ x \in \mathbf{R} \tag{1-6}$$

为随机变量X的**分布函数**。

注意，式(1-6)中的$\{X \leqslant x\}$表示$\{\omega: X(\omega) \leqslant x\}$。于是，式(1-6)的右端是随机变量$X(\omega)$落在区间$(-\infty, x]$上的概率。

分布函数$F(x)$有如下性质：

性质 1 $F(x)$是单调不减函数，即$\forall x_1, x_2 \in \mathbf{R}$，$x_1 < x_2$，总有$F(x_1) \leqslant F(x_2)$。

性质 2 $F(x)$是右连续函数，即$\forall x \in \mathbf{R}$，总有$F(x+0) = \lim\limits_{h \to 0^+} F(x+h) = F(x)$。

性质 3 $F(-\infty) = \lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$，$F(+\infty) = \lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$。

可以证明：若定义在$\mathbf{R}$上的实值函数$F(x)$满足上述三条，则必存在一个概率空间$(\Omega, \mathscr{F}, P)$及$\mathscr{F}$上的一个随机变量X，使$F(x)$为X的分布函数。

实际问题中，常用的随机变量有两种：离散型随机变量和连续型随机变量。

若随机变量X只可能取有限个或可列无穷个（即虽然是无穷个，但可以一个接一个地排列起来）值，则称X为离散型随机变量，其分布可用其概率分布（或分

布律)

$$p_i = P\{X = x_i\},\ i = 1,\ 2,\ \cdots \tag{1-7}$$

来描述。此时,X 的分布函数为

$$F(x) = \sum_{x_i \leqslant x} p_i,\ x \in \mathbf{R} \tag{1-8}$$

设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)$,若存在非负可积函数 $f(x)$,使得

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t,\ x \in \mathbf{R} \tag{1-9}$$

则称 X 为连续型随机变量,称 $f(x)$ 为 X 的概率密度函数。

下面讨论随机向量及其分布。

定义 1-6 设 $(\Omega,\ \mathscr{F},\ P)$ 是一概率空间,$\boldsymbol{X}(\cdot) = (X_1(\cdot),\ X_2(\cdot),\ \cdots,\ X_n(\cdot))$ 是定义在 Ω 上,取值于 $\mathbf{R}^n$ 中的向量函数。若 $\forall \boldsymbol{x} = (x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n) \in \mathbf{R}^n$,总有 $\{\omega:\ X_1(\omega) \leqslant x_1,\ X_2(\omega) \leqslant x_2,\ \cdots,\ X_n(\omega) \leqslant x_n\} \in F$,则称 $\boldsymbol{X} = (X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_n)$ 为 n **维随机向量**或 n **维随机变量**,n 元函数

$$F(\boldsymbol{x}) = F(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n) = P\{X_1 \leqslant x_1,\ X_2 \leqslant x_2,\ \cdots,\ X_1 \leqslant x_1\} \tag{1-10}$$

$$\boldsymbol{x} = (x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n) \in \mathbf{R}^n$$

为 $\boldsymbol{X} = (X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_n)$ 的联合分布函数。

设 $\boldsymbol{X}$ 是 n 维随机向量,则其联合分布函数 $F(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$ 有如下性质:

性质 1 $F(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$ 对任一变元 $x_i(i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ 都是单调不减函数;

性质 2 $F(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$ 对任一变元 $x_i(i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ 都是右连续函数;

性质 3 $\lim\limits_{x_i \to -\infty} F(x_1,\ \cdots,\ x_i,\ \cdots,\ x_n) = 0,\ (i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$

$$\lim_{x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n \to +\infty} F(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n) = 1$$

性质 4 $\forall x_i,\ y_i \in \mathbf{R},\ x_i \leqslant y_i,\ i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n$,总有

$$\begin{aligned} & F(y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_n) - \sum_{i=1}^{n} F(y_1,\ \cdots,\ y_{i-1},\ x_i,\ y_{i+1},\ \cdots,\ y_n) + \\ & \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} F(y_1,\ \cdots,\ y_{i-1},\ x_i,\ y_{i+1},\ \cdots,\ y_{j-1},\ x_j,\ y_{j+1},\ \cdots,\ y_n) - \\ & \cdots + (-1)^n F(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n) \geqslant 0 \end{aligned}$$

类似于一维随机变量,可以证明:若给定的 n 元函数 $F(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$ 满足上述性质 1-4,则必存在一个概率空间 $(\Omega,\ \mathscr{F},\ P)$ 及 $\mathscr{F}$ 上的 n 维随机向量 $\boldsymbol{X}$,使 $F(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$ 为 $\boldsymbol{X}$ 的联合分布函数。

实际问题中,常用的随机向量也有两种:离散型随机向量和连续型随机向量。若随机向量 $\boldsymbol{X} = (X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_n)$ 的每个分量 $X_i(i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ 都是离散型随机变量,则称其为离散型随机向量。对于离散型随机向量 $\boldsymbol{X} = (X_1,\ X_2,\ \cdots,$

X_n)，其联合概率分布(或联合分布律)为

$$p_{u_1, u_2, \cdots, u_n} = P\{X_1 = u_1, X_2 = u_2, \cdots, X_n = u_n\} \tag{1-11}$$

其中 $u_i \in I_i$，I_i 为离散集，$i=1, 2, \cdots, n$。$\boldsymbol{X}$ 的联合分布函数为

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{u_1 \leqslant x_1} \sum_{u_2 \leqslant x_2} \cdots \sum_{u_n \leqslant x_n} p_{u_1, u_2, \cdots, u_n}, \ (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbf{R}^n \tag{1-12}$$

设 $F(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 为 $\boldsymbol{X}=(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的联合分布函数，若存在非负可积函数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，$\forall (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbf{R}^n$，总有

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} f(u_1, u_2, \cdots, u_n) \mathrm{d}u_1 \mathrm{d}u_2 \cdots \mathrm{d}u_n \tag{1-13}$$

则称 $\boldsymbol{X}=(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 为连续型随机向量，$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 为 $\boldsymbol{X}$ 的联合概率密度函数。

保留 $F(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 中的 $k(1 \leqslant k < n)$ 个变元，而令其他变元趋于 $+\infty$，便得到 $\boldsymbol{X}$ 的 k 维边缘分布函数。例如，保留 $x_1, \cdots, x_k$，得到 $F(x_1, \cdots, x_k, +\infty, \cdots, +\infty)$。特别地，当 $\boldsymbol{X}$ 是连续型随机向量，$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 为 $\boldsymbol{X}$ 的联合概率密度函数时，有

$$F(x_1, \cdots, x_k, +\infty, \cdots, +\infty) = \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_k} \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} f(u_1, u_2, \cdots, u_n) \mathrm{d}u_1 \mathrm{d}u_2 \cdots \mathrm{d}u_n$$

可见，$F(x_1, \cdots, x_k) = F(x_1, \cdots, x_k, +\infty, \cdots, +\infty)$ 是 k 维连续型随机向量 $(X_1, \cdots, X_k)$ 的联合分布函数，$(X_1, \cdots, X_k)$ 的联合概率密度函数为

$$f(x_1, \cdots, x_k) = \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \mathrm{d}x_{k+1} \cdots \mathrm{d}x_n \tag{1-14}$$

特别地，当 $k=1$ 时，n 维随机向量 $\boldsymbol{X}$ 的 n 个 1 维边缘分布函数和 n 个 1 维边缘概率密度函数分别为 $F_{X_1}(x_1)$，$F_{X_2}(x_2)$，$\cdots$，$F_{X_n}(x_n)$ 和 $f_{X_1}(x_1)$，$f_{X_2}(x_2)$，$\cdots$，$f_{X_n}(x_n)$。

定义 1-7 设 $\boldsymbol{X}=(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是一 n 维连续型随机向量，其联合分布函数及 n 个 1 维边缘分布函数分别为 $F(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 和 $F_{X_1}(x_1)$，$F_{X_2}(x_2)$，$\cdots$，$F_{X_n}(x_n)$。若 $\forall x_1, x_2, \cdots, x_n \in \mathbf{R}$，总有

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = F_{X_1}(x_1) F_{X_2}(x_2) \cdots F_{X_n}(x_n)$$

则称**随机变量** $X_1, X_2, \cdots, X_n$ **相互独立**。

当 $\boldsymbol{X}=(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是 n 维离散型随机向量时，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立的充要条件是：对 X_i 的所有可能取值 x_i，$i=1, 2, \cdots, n$，有

$$\begin{aligned} & P\{X_1 = x_1, X_2 = x_2, \cdots, X_n = x_n\} \\ & = P\{X_1 = x_1\} P\{X_2 = x_2\} \cdots P\{X_n = x_n\} \end{aligned} \tag{1-15}$$

当 $\boldsymbol{X}=(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是 n 维连续型随机向量时，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立

的充要条件是：对几乎所有$(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbf{R}^n$，有

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2) \cdots f_{X_n}(x_n) \tag{1-16}$$

1.2.2 随机变量的变换

在实际问题中，人们常常对某些随机变量（或向量）的变换（它当然还是随机变量或向量）感兴趣。这是因为：在某些试验中，我们所关心的量往往不能用直接观测的办法得到，而其又恰是某个能直接观测到的随机变量（或向量）的已知变换（函数）。例如：我们能直接测量到圆轴截面的直径 D，而所关心的却是圆轴截面面积 $A=\pi D^2/4$。这里，随机变量 A 是随机变量 D 的变换。下面将讨论如何由已知的随机变量（或向量）X 的分布，求 X 的变换 $Y=g(X)$ 的分布，其中 $g(\cdot)$ 是已知的连续函数。

1. 离散型随机变量的变换

设离散型随机变量 X 的概率分布为 $p_i = P\{X = x_i\}$，$i=1, 2, \cdots$，$g(\cdot)$ 是一个已知的单值函数。令 $Y=g(X)$，则 Y 也是一个离散型的随机变量。

例 1-1 设随机变量 X 有如下的概率分布

X	-1	0	1	2
p_i	0.2	0.3	0.1	0.4

求 $Y=(X-1)^2$ 的概率分布。

解 Y 所有可能取的值为 0，1，4，由

$$P\{Y=0\} = P\{X=1\} = 0.1$$

$$P\{Y=1\} = P\{X=0\} + P\{X=2\} = 0.3 + 0.4 = 0.7$$

$$P\{Y=4\} = P\{X=-1\} = 0.2$$

得 Y 的概率分布为

Y	0	1	4
q_k	0.1	0.7	0.2

这个例子阐明了求离散型随机变量变换的分布的一般方法，归纳起来就是：记 Y 所有可能取值的集合为$\{y_k, k=1, 2, \cdots\}$。也就是说，对每个 y_k 来讲，至少要有一个 x_i 使得 $y_k = g(x_i)$；对每个 x_i 来讲，只有一个 y_k 与其对应，使得 $y_k = g(x_i)$。对每个 y_k，将所有满足 $y_k = g(x_i)$ 式子中的 i 对应的 p_i 求和，并记此和为 q_k，则 $q_k = P\{Y = y_k\}$，$k=1, 2, \cdots$，就是随机变量 Y 的概率分布。

例 1-2 设某城市一个月内发生火灾的次数 X 服从参数为 5 的泊松(Poisson)分布，求随机变量 $Y = |X-5|$ 的概率分布。

解 由 X 所有可能取值的集合为$\{0, 1, 2, \cdots\}$，其对应的概率为

$$P\{X=i\}=\frac{e^{-5}5^{i}}{i!},\ i=0,\ 1,\ 2\cdots$$

及 $Y=|X-5|$ 可知，Y 所有可能取值的集合为 $\{0,\ 1,\ 2,\ \cdots\}$，且对每个 $k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$，当 $0<k\leqslant 5$ 时，有 $i=5+k$ 和 $i=5-k$ 两个值使得 $|i-5|=k$；当 $k=0$ 或 $k\geqslant 6$ 时，只有一个 $i=5+k$ 使得 $|i-5|=k$。于是，随机变量 Y 取值为 k 的概率

$$q_k=P\{Y=k\}=\begin{cases}\left[\dfrac{5^{5-k}}{(5-k)!}+\dfrac{5^{5+k}}{(5+k)!}\right]e^{-5}, & k=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\\ \dfrac{5^{5+k}}{(5+k)!}e^{-5}, & k=0,\ 6,\ 7,\ \cdots\end{cases}$$

2. 连续型随机变量的变换

若 X 为连续型随机变量，概率密度函数为 $f_X(x)$，$g(\cdot)$ 是连续函数，则对 X 的变换 $Y=g(X)$，有如下结果：

（1）若 $g(\cdot)$ 是严格单调可微函数，则 $Y=g(X)$ 是连续型随机变量，且其概率密度函数为

$$f_Y(y)=\begin{cases}f_X[h(y)]\,|h'(y)|, & y\in I\\ 0, & y\notin I\end{cases}\tag{1-17}$$

其中 $h(y)$ 是 $y=g(x)$ 的反函数，$I=\{y:\ h(y)$ 与 $h'(y)$ 有定义，且 $f_X[h(y)]>0\}$。

（2）若 $g(\cdot)$ 是分段严格单调可微函数，则 $Y=g(X)$ 是连续型随机变量，且其概率密度函数为

$$f_Y(y)=\begin{cases}\sum\limits_k f_X[h_k(y)]\,|h_k'(y)|, & y\in I\\ 0, & y\notin I\end{cases}\tag{1-18}$$

其中 $h_k(y)$ 是 $y=g(x)$ 的第 k 个严格单调可微段的反函数，$I=\{y$：至少存在一个 k，使得 $h_k(y)$ 与 $h_k'(y)$ 有定义，且 $f_X[h_k(y)]>0\}$。

例 1-3 设 $X\sim N(0,\ 1)$，求随机变量 $Y=e^X$ 的概率密度函数。

解 由 $y=e^x$ 是 $(-\infty,\ +\infty)$ 上的严格单调可微函数，故其反函数 $h(y)=\ln y$，且 $h'(y)=1/y$，$y>0$。再由 $f_X(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}/\sqrt{2\pi}$，得 Y 的概率密度函数

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}y}e^{-\frac{(\ln y)^2}{2}}, & y>0\\ 0, & y\leqslant 0\end{cases}$$

例 1-4 设随机变量 X 有概率密度函数

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{x+1}{8}, & x\in(-1,\ 3)\\ 0, & x\notin(-1,\ 3)\end{cases}$$