College Mathematics Guidance Series

大学数学学习辅导丛书

线性代数附册
学习辅导与习题全解

同济·第五版

同济大学数学系 编

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

大学数学学习辅导丛书

线性代数附册
学习辅导与习题全解

同济·第五版

同济大学数学系　编

高等教育出版社

内容提要

本书是与同济大学数学系编《线性代数》第五版配套的学习辅导书，主要面向使用该教材的读者。本书编者之一是《线性代数》第五版的编者，另一位编者在同济大学多年执教线性代数课程。

本书是在《线性代数》第四版辅导书的基础上修订而成的，修订时对原书中要求偏高的内容作了较大幅度的删节或改写，使它更贴近“工科类本科数学基础课程教学基本要求”。全书与教材一致分为六章，每章内容包括基本要求、内容提要、学习要点、释疑解难、例题剖析与增补、习题解答、补充习题(附答案和提示)等七个栏目。其中“释疑解难”显示出编者对课程内容的深刻理解和长期积累的丰富经验；“例题剖析与增补”充分开发出例题的内涵，并有助于读者掌握举一反三的学习方法；“习题解答”注重阐明解题的思想和方法，并作出规范解答。本书相对于教材有一定的独立性，可作为线性代数课程的学习参考书。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数附册学习辅导与习题全解：同济·第五版/同济大学数学系编．—北京：高等教育出版社，2007.6

ISBN 978-7-04-021507-6

Ⅰ.线…　Ⅱ.同…　Ⅲ.线性代数－高等学校－教学参考资料　Ⅳ.O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第054857号

策划编辑　王　强　　**责任编辑**　蒋　青　　**封面设计**　王凌波
版式设计　马静如　　**责任校对**　金　辉　　**责任印制**　韩　刚

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010－58581118
社　　址	北京市西城区德外大街4号	免费咨询	800－810－0598
邮政编码	100011	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010－58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	廊坊市科通印业有限公司	畅想教育	http://www.widedu.com
开　　本	787×960　1/16	版　　次	2007年6月第1版
印　　张	13.5	印　　次	2007年6月第1次印刷
字　　数	250 000	定　　价	14.60元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。

物料号　21507－00

前　言

本书是与同济大学数学系编《线性代数》第五版相配套的学习辅导书，是在第四版辅导书的基础上修订而成的。修订时对原书中要求偏高的内容作了较大幅度的删节或改写，使它更贴近"工科类本科数学基础课程教学基本要求"。

本书按《线性代数》第五版的章节顺序逐章编写，每章包括以下几部分内容：

一、基本要求　主要根据教育部高教司颁发的"工科类本科数学基础课程教学基本要求"确定，同时也根据当前的教学实际作了少许修改并细化。

二、内容提要　归纳本章的主要内容。

三、学习要点　概括地阐明本章的重点和学习的关键。

四、释疑解难　针对本章的重点内容和较难理解的内容，针对学生在学习本章时常常问及的一些共同性的并有较大意义的问题，编选出若干个问题予以分析、解答，以帮助读者释疑解难并加深理解。

五、例题剖析与增补　对教材中约1/2的例题加以剖析，分析其解题思路、所用的原理和方法，说明该例的意义或引申到一般化的结论。并适当补充若干例题，补充的例题不在于它的解题技巧，其内容和要求仍属于基本要求的范围。

六、习题解答　对教材中全部习题作出解答，其中部分习题给出几种解法，并视需要作适当的评述。

七、补充习题(附答案和提示)　为满足读者练习的需要，补充少量习题，其中包括若干选择题。

本书由同济大学数学系骆承钦、胡志库合编。限于水平，书中难免存在不足之处，恳请同行和读者批评指正。

编　者

2007年1月

使用说明

1. 本书中所称“教材”是指同济大学应用数学系编《线性代数》第四版。

2. “释疑解难”中的问题编号用“问 $m \cdot n$”，其中 m 为章号，n 为题号。“例题剖析与增补”中例题的编号“例 n”为该例在教材同一章中的编号，补充例题的编号用“例 $m \cdot n$”，其中 m 为章号，n 为题号。“习题选解”中的题号为该习题在教材同一章中的编号，“补充习题”的编号用“$m \cdot n$”，m 为章号，n 为题号。

3. 补充例题和习题中，有一部分选自历年硕士研究生入学考试试题，这些题的编号后有一个括弧，括弧中的数字是该题用于考研试题的年份。例如例 4.1(1988)，表示该例是 1988 年的考研试题。

4. 本书中采用的逻辑符号的含义：

$\forall$　任给

$\Rightarrow$　推出

$\Leftrightarrow$　互推，等价，充分必要条件

$\because$　因为

$\therefore$　所以

目　　录

第一章

行　列　式

基本要求

1. 会用对角线法则计算二阶和三阶行列式.
2. 知道 n 阶行列式的定义及性质.
3. 知道代数余子式的定义及性质
4. 会利用行列式的性质及按行(列)展开计算简单的 n 阶行列式.
5. 知道克拉默法则.

内容提要

1. 行列式的定义

n 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{p_1 p_2 \cdots p_n} (-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n},$$

其中 $p_1 p_2 \cdots p_n$ 为自然数 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列,t 为这个排列的逆序数,求和符号 $\sum\limits_{p_1 p_2 \cdots p_n}$ 是对所有排列 $p_1 p_2 \cdots p_n$ 求和.

n 阶行列式 D 中所含 n^2 个数叫做 D 的元素,位于第 i 行第 j 列的元素 a_{ij} 叫做 D 的 (i,j) 元.

二阶和三阶行列式的计算适用对角线法则.

2. 行列式的性质

(1) 行列式 D 与它的转置行列式 D^{T} 相等.

(2) 互换行列式的两行(列),行列式变号.

(3) 行列式的某一行(列)中所有元素都乘以同一数 k,等于用数 k 乘此行

列式;或者,行列式的某一行(列)的各元素有公因子 k,则 k 可提到行列式记号之外.

(4) 行列式中如果有两行(列)元素完全相同或成比例,则此行列式为零.

(5) 若行列式的某一列(行)中各元素均为两项之和,则此行列式等于两个行列式之和.

例如

$$\begin{array}{c} \text{第 } j \text{ 列} \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & (a_{1j}+a'_{1j}) & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & (a_{2j}+a'_{2j}) & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & (a_{nj}+a'_{nj}) & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \end{array}$$

$$= \begin{array}{c} \text{第 } j \text{ 列} \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \end{array} + \begin{array}{c} \text{第 } j \text{ 列} \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a'_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a'_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a'_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \end{array}.$$

如果这样,就形象地称为行列式按第 j 列拆成两个行列式.

(6) 把行列式的某一行(列)的各元素乘以同一数然后加到另一行(列)的对应元素上去,行列式的值不变.

3. 行列式的按行(按列)展开

(1) 把 n 阶行列式中 (i,j) 元 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列划去后所成的 $n-1$ 阶行列式称为 (i,j) 元 a_{ij} 的余子式,记作 M_{ij};记 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$,称 A_{ij} 为 (i,j) 元 a_{ij} 的代数余子式.

(2) n 阶行列式等于它的任意一行(列)的各元素与对应的代数余子式的乘积的和.即可以按第 i 行展开:

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in} \quad (i=1,2,\cdots,n);$$

或者按第 j 列展开:

$$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj} \quad (j=1,2,\cdots,n).$$

(3) 行列式中任一行(列)的元素与另一行(列)的对应元素的代数余子式乘积之和等于零.即

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+A_{in}A_{jn}=0, i\neq j,$$

和

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+A_{ni}A_{nj}=0, i\neq j.$$

4. 一些常用的行列式

(1) 上、下三角形行列式等于主对角线上的元素的乘积.即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

(未标明的元素均为零,下同).

特别,对角行列式等于对角线元素的乘积,即

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix} = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n .$$

(2) 设 $D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}, D_2 = \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$,

则

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & & & \\ \vdots & & \vdots & & 0 & \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & & & \\ c_{11} & \cdots & c_{1k} & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nk} & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} = D_1D_2 .$$

5. 克拉默法则

含有 n 个未知元 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的 n 个线性方程的方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases}$$

当 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 全为零时,称为齐次线性方程组;否则,称为非齐次线性方程组.

(1) 如果上列方程组的系数行列式 $D \neq 0$,那么它有惟一解:$x_i = \dfrac{D_i}{D}$ $(i=1, 2, \cdots, n)$,其中 D_i $(i=1,2,\cdots,n)$是把 D 中第 i 列元素用方程组的右端的自由项替代后所得到的 n 阶行列式;

(2) 如果上列方程组无解或有两个不同的解,那么它的系数行列式 $D=0$;

(3) 如果齐次线性方程组的系数行列式 $D \neq 0$,那么它只有零解;如果齐次线性方程组有非零解,那么它的系数行列式必定等于零.

学习要点

本章的重点是行列式的计算.对于 n 阶行列式的定义只需了解其大概的意思,对于行列式各条性质的证明只需了解其基本思路.要注重学会利用这些性质及按行(列)展开等基本方法来简化行列式的计算,并掌握两行(列)交换、某行(列)乘数、某行(列)加上另一行(列)的 k 倍这三类运算.按照"会计算简单的 n 阶行列式"这一基本要求,对于计算行列式的技巧毋需作过多的探求.

释疑解难

问 1.1 行列式与行列式的值有什么区别?

答 这是一个"形式"与"内涵"的问题.以二阶行列式为例.式子 $\begin{vmatrix} x & y \\ u & v \end{vmatrix}$ 叫做二阶行列式,它表示一个数

$$xv - yu,$$

这个数叫做二阶行列式的值,并记作

$$\begin{vmatrix} x & y \\ u & v \end{vmatrix} = xv - yu.$$

注意上式中的等号是"记作"的意思,但由于等号通常理解为两边的数相等,因此上式左边的行列式记号也就表示行列式的值.两个行列式相等是指它们的值相等.

由于行列式记号既表示行列式,又表示它的值,因此教材中没有明确提出"行列式的值"这一名称,把"行列式的值"也叫做"行列式".

问 1.2 如何理解行列式的定义?

答 n 阶行列式 $D = \det(a_{ij})$ 的定义

$$D = \sum(-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n},$$

其中 t 是排列 $p_1 p_2 \cdots p_n$ 的逆序数.此定义中应注意两点:

(1) 和式记号 $\sum$ 是对集合 $P = \{p_1 p_2 \cdots p_n \mid p_1 p_2 \cdots p_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的排列$\}$ 作和,因 n 个不同元素的排列数是 $n!$,于是该和式共有 $n!$ 项;

(2) 和式中的任一项 σ 是取自 D 中不同行、不同列的元素之积.由排列知识知,D 中这样不同行、不同列的 n 个元素之积共有 $n!$ 个.

(3) 和式中任一项 σ 都带有符号$(-1)^t$，t 是列标排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 的逆序数，即根据此排列的逆序数为偶数或奇数，σ 依次取"+"或"−".根据排列的性质，和式中各有$\frac{n!}{2}$项取"+"和取"−".

由上所述可知，n 阶行列式D恰好是它的不同行、不同列的 n 个元素之积的代数和，是一个"积和式"，其中一半带有正号，一半带有负号.

问 1.3 (1) 余子式与代数余子式有什么特点？(2) 它们之间有什么联系？

答 (1) 对于给定的 n 阶行列式$D=\det(a_{ij})$，(i,j)元 a_{ij} 的余子式 M_{ij} 和代数余子式A_{ij}仅与位置(i,j)有关，而与 D 的(i,j)元的数值无关.

(2) 它们间的联系是 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{i+j}$，因而当 $i+j$ 为偶数时，二者相同；当 $i+j$ 为奇数时，二者符号相反.它们间的关系也可用图示为

$$\begin{pmatrix} + & - & & & \\ - & + & - & & \ddots \\ & - & + & & \\ & & & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & - \\ & & & - & + \end{pmatrix},$$

其中，符号"+"表示对应位置上 $A_{ij}=M_{ij}$；符号"−"表示对应位置上 $A_{ij}=-M_{ij}$.上图的规律可简单地归结为：对角线上为正，正的"邻居"为负，负的"邻居"为正.

例题剖析与增补

例 5 证明 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \iddots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n,$$

其中未写出的元素都是0.

析 本例根据行列式的定义来证明.在 n 阶行列式的定义中，元素 a_{ij}不仅代表一个数，还表明这个数在行列式中的位置.本例中的数 λ_i 不能显示它在行列式中的位置.因此需要按 λ_i 在行列式中的位置，把 λ_i 改记作$a_{i,n-i+1}$，从而得到乘积 $\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$ 中各元素的列标排列为

$$n(n-1)\cdots 21,$$

由此计算出这个排列的逆序数为

$$t=0+1+\cdots+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}.$$

例 7　计算

$$D=\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}.$$

析　教材分别在§5及§6两节中,利用行列式性质(包括按行(列)展开性质)计算此行列式 D 的值.§5中,把 D 化成上三角形行列式.§6中,把 D 按行(或列)展开,因第三行元素的数值较简单,故按第三行展开.为减少展开式中非零项的项数,先利用行列式性质,把第三行除元素 a_{33} 之外全化成0,使展开式中只有一项.这两种方法是行列式计算的基本方法,要熟练掌握.

例 8　计算

$$D=\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

析　本例中 D 属于一类重要的行列式,在后继内容中会多次遇到此类行列式,其特点是对角元相同,并且非对角元也相同.它的一般形式为教材习题8(2),可以用多种方法计算其值,但最基本也最方便的方法就是本例介绍的,即利用各列(行)元素之和相等,把各行(列)同时加到第1行(列).

例 10　设

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & & & \\ \vdots & & \vdots & & 0 & \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & & & \\ c_{11} & \cdots & c_{1k} & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nk} & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix},D_1=\det(a_{ij})=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix},$$

$$D_2=\det(b_{ij})=\begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix},$$

证明 $D=D_1D_2$.

析　学习本例,应侧重于它的结果,以后常要用到此结果.用第二章矩阵的

语言来叙述,此结果是

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{A}_2 \end{vmatrix} = |\boldsymbol{A}_1||\boldsymbol{A}_2|.$$

例 11 计算 $2n$ 阶行列式

$$D_{2n} = \underbrace{\begin{vmatrix} a & & & & & b \\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & a & b & & \\ & & c & d & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ c & & & & & d \end{vmatrix}}_{2n},$$

其中未写出的元素为 0.

析 此例的目的是介绍递推法.递推法是行列式,尤其是高阶行列式计算中常用的、有效的方法.应用递推法的实质是数学归纳法,因此建立了递推公式 $D_{2n}=(ad-bc)D_{2(n-1)}$ 之后应注意要验证归纳的基础,例如 $n=1$ 或 $n=2$ 时命题成立.

例 12 证明范德蒙德(Vandermonde)行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{n\geqslant i>j\geqslant 1}(x_i - x_j),$$

其中记号“$\prod$”表示全体同类因子的乘积.

析 (1) 应注意教材中把 D_n 降阶的技巧:从第 n 行开始,后行减前行的 x_1 倍.如果进行相反方向的运算,即从第 2 行开始,后行减前行的若干倍,则无法得到关于 D_n 的递推公式.

(2) 范德蒙德行列式看做 n 个变元 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的函数,有三个特点:

(i) 从列的角度看,第 j 列元素从上到下依次为变元 x_j 的零次幂、一次幂、…、$(n-1)$次幂,$j=1,2,\cdots,n$;

(ii) 从行的角度看,第 i 行(i,k)元是变元 x_k 的$(i-1)$次幂,$k=1,2,\cdots,n$,$i=1,2,\cdots,n$;

(iii) 从结果看,范德蒙德行列式是以所有可能的足标大的变元与足标小的变元之差作为因子的乘积.

例 13 设

$$D=\begin{vmatrix}3&-5&2&1\\1&1&0&-5\\-1&3&1&3\\2&-4&-1&3\end{vmatrix},$$

D 的(i,j)元的余子式和代数余子式依次记作 M_{ij}和A_{ij},求

$$A_{11}+A_{12}+A_{13}+A_{14}\text{及 }M_{11}+M_{21}+M_{31}+M_{41}.$$

析 本例的目的是熟悉代数余子式(或余子式)的性质以及行列式的按行(或按列)展开.以求 $\sigma=A_{11}+A_{12}+A_{13}+A_{14}$为例.

(1) 如果直接用代数余子式定义,那么要计算 4 个三阶行列式,显然计算量比较大.

(2) 代数余子式 A_{ij}的特点是它与D 的(i,j)元的数值无关.因此,与其说 D 的(i,j)元 a_{ij}对应着A_{ij},倒不如说 D 的(i,j)元所在的位置(i,j)对应着 A_{ij}.由此可知,和式 σ 与D 的第 1 行元素无关.令

$$D_1=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&1&0&-5\\-1&3&1&3\\2&-4&-1&3\end{vmatrix},$$

则 D_1 与 D 的第一行元素的代数余子式是相同的,即 A_{1j}也是D_1 的$(1,j)$元的代数余子式,从而和式 σ 恰好是D_1 按第 1 行的展开式,于是

$$\sigma=A_{11}+A_{12}+A_{13}+A_{14}=D_1.$$

同理,因 $M_{11}+M_{21}+M_{31}+M_{41}=A_{11}-A_{21}+A_{31}-A_{41}$,此和式与 D 的第 1 列元素无关.

例 1.1 由行列式定义,计算

$$f(x)=\begin{vmatrix}2x&x&1&2\\1&x&1&-1\\3&2&x&1\\1&1&1&x\end{vmatrix}$$

中 x^4 与 x^3 的系数.

解 由行列式定义,$f(x)$是所给行列式中所有取自不同行、不同列的元素之积的代数和,记为 D,它是关于 x 的 4 次多项式.因行列式中每个元素至多是 x 的一次多项式,于是

σ 是 D 中的 x^4 项

$\Leftrightarrow\sigma$ 含有 4 个取自不同行、不同列的 x 的一次多项式的元素;

$\Leftrightarrow\sigma$ 是D 的$(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)$元之积；

$\Leftrightarrow\sigma=2x^4$(容易知道该项的符号为正)；

σ 是D 中的x^3 项

$\Leftrightarrow\sigma$ 含有 3 个取自不同行、不同列的 x 的一次多项式的元素，而余下一行、一列的元素(已惟一确定)是常数；

$\Leftrightarrow\sigma$ 是D 的$(1,2),(2,1),(3,3),(4,4)$元之积；

$\Leftrightarrow\sigma=-x^3$ (容易知道该项的符号为负).

例 1.2 计算五阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}1&2&3&4&5\\2&3&4&5&1\\3&4&5&1&2\\4&5&1&2&3\\5&1&2&3&4\end{vmatrix}.$$

解一 利用各行的元素之和相同的特点，把除第 1 列以外的各列加到第 1 列，得

$$D=\begin{vmatrix}15&2&3&4&5\\15&3&4&5&1\\15&4&5&1&2\\15&5&1&2&3\\15&1&2&3&4\end{vmatrix}=15\begin{vmatrix}1&2&3&4&5\\1&3&4&5&1\\1&4&5&1&2\\1&5&1&2&3\\1&1&2&3&4\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\substack{r_3-r_2\\r_2-r_1}]{\substack{r_5-r_4\\r_4-r_3}}15\begin{vmatrix}1&2&3&4&5\\0&1&1&1&-4\\0&1&1&-4&1\\0&1&-4&1&1\\0&-4&1&1&1\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{按第 1 列展开}}15\begin{vmatrix}1&1&1&-4\\1&1&-4&1\\1&-4&1&1\\-4&1&1&1\end{vmatrix},$$

对上式最后一个行列式作变换：把各行加到第 1 行并提取第 1 行的公因子 -1，得

$$D=-15\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&1&-4&1\\1&-4&1&1\\-4&1&1&1\end{vmatrix}\xlongequal[\substack{r_3-r_1\\r_4-r_1}]{r_2-r_1}-15\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&0&-5&0\\0&-5&0&0\\-5&0&0&0\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{按第 4 列展开}} 15\begin{vmatrix} 0 & 0 & -5 \\ 0 & -5 & 0 \\ -5 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1875.$$

解二 从 D 的最后一行开始，后行减去前行，得

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal[i=2,3,4,5]{c_i - c_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -5 \\ 1 & 0 & 0 & -5 & 0 \\ 1 & 0 & -5 & 0 & 0 \\ 1 & -5 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_1 + \sum_{i=2}^{5} \frac{1}{5} c_i} \begin{vmatrix} a & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & & & & -5 \\ \vdots & & & -5 & \\ & & -5 & & \\ 0 & -5 & & & \end{vmatrix} \xlongequal{\text{按第 1 列展开}} a \begin{vmatrix} & & & -5 \\ & & -5 & \\ & -5 & & \\ -5 & & & \end{vmatrix}$$

$$= a \times (-5)^4,$$

其中 $a = 1 + \dfrac{1+2+3+4}{5} = 3$，所以 $\quad D = 1875.$

例 1.3 计算 n 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_2 & & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \\ 1 & & & a_n \end{vmatrix}, \text{其中 } a_1 a_2 \cdots a_n \neq 0.$$

解一 通过把 D 的第 1 行中除 $(1,1)$ 元 a_1 外其他元素均变成为零，化 D 为下三角形行列式，具体如下：

$$D \xlongequal[\substack{\cdots \\ r_1 - \frac{1}{a_n} r_n}]{r_1 - \frac{1}{a_2} r_2} \begin{vmatrix} b & & & & \\ & a_2 & & 0 & \\ & & a_3 & & \\ & * & & \ddots & \\ & & & & a_n \end{vmatrix} = b a_2 a_3 \cdots a_n \text{[注]},$$

其中，$b = a_1 - \dfrac{1}{a_2} - \cdots - \dfrac{1}{a_n}$，于是，$D = a_2 a_3 \cdots a_n \left(a_1 - \sum_{i=2}^{n} \dfrac{1}{a_i} \right)$.

解二 把 D 按第 1 行展开，由代数余子式

[注] 在行列式的计算中，我们常用“$*$”表示那里可能有一些非零元素，但对行列式的值没有影响；用 0 表示那里的元素都是零.

$$A_{1j}=(-1)^{1+j}\begin{vmatrix} 1 & a_2 & & & & & & \\ \vdots & & \ddots & & & & & \\ 1 & & & a_{j-1} & & & & \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & & & & a_{j+1} & & \\ \vdots & & & & & \ddots & \\ 1 & & & & & & a_n \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{按第 } j-1 \text{ 行展开}} -a_2\cdots a_{j-1}a_{j+1}\cdots a_n \quad (j=2,3,\cdots,n)$$

得
$$D = a_1a_2\cdots a_n - \sum_{j=2}^{n}\frac{a_2a_3\cdots a_n}{a_j},$$

注 解二毋须 $a_1a_2\cdots a_n\neq 0$ 的条件.

例 1.4 利用范德蒙德行列式计算四阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \\ b+c+d & a+c+d & a+b+d & a+b+c \end{vmatrix}.$$

解 $D \xlongequal[r_4\div(a+b+c+d)]{r_4+r_1} (a+b+c+d)\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix},$

把上式等号右边的行列式的最后一行依次与前面的行交换,共交换 3 次,得

$$D=-(a+b+c+d)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix},$$

此为 4 阶范德蒙德行列式,根据例 12 的结果,得

$$D=-(a+b+c+d)(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c).$$

例 1.5 计算 $n+1$ 阶行列式

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix} a_1^n & a_1^{n-1}b_1 & a_1^{n-2}b_1^2 & \cdots & b_1^n \\ a_2^n & a_2^{n-1}b_2 & a_2^{n-2}b_2^2 & \cdots & b_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n+1}^n & a_{n+1}^{n-1}b_{n+1} & a_{n+1}^{n-2}b_{n+1}^2 & \cdots & b_{n+1}^n \end{vmatrix}.$$

解 首先,我们恒可设 $a_i\neq 0, i=1,2,\cdots,n+1$. 因若有某一 $a_i=0$,例如