领军教辅 畅销十年

金太阳教育 编著

热点·重点·难点
专题透析

2007高考二轮复习必备

数学

吉林文史出版社

Qianyan 前言

本丛书为2007年高考第二轮复习专用.它与第一轮复习紧密衔接,根据教学实际,以专题归类的形式把高中各科主干知识的内容明晰化、条理化、概念化、规律化.专题关注各学科高考热点、重点、难点,"讲"、"练"结合,使同学们能针对不足,逐点突破,对第一轮复习的薄弱部分进行补充,同时在训练中熟记考试内容,掌握应试技巧,提高综合素质.本丛书分语文、数学、英语、物理、化学、生物、政治、历史、地理共九个分册.本册为数学分册,编写体例如下:

本分册突出知识的综合与交汇,致力于解题方法与技巧的归纳、点拨与提高.设有高考热点、思想方法、应考策略与2007年高考强化训练四大板块共十五个专题.前八个专题设置"考题特征剖析"、"考点题型再现与分析"、"高考命题趋势"、"考题预测与训练"四个栏目;后七个专题突出培养考生的数学思想方法与解法训练,与前八个专题的体例有所不同.

考题特征剖析 揭示涉及本专题内容的高考试题的特征与分值,展现这些试题中涉及的题型、解题方法、难度系数及由此体现出来的数学思想、数学方法,总结此类试题的总体解题思路等,从宏观上把握高考方向与题型特征.

考点题型再现与分析 揭示涉及本专题内容的各个考点,展现考题的形式与命题特征,精选典型习题,通过对解题过程的剖析,点拨解题关键点、易错点、拓展与变形方向,分析寻找解题切入点和突破口的主要思路与思想方法,总结题型特点、解题方法及思路,形成规律,以求提高实际解题能力.

高考命题趋势 揭示涉及本专题内容的高考试题的命题趋势与方向,包括题型、难易度及与其他内容的交汇联系、涉及的数学思想与主要解题方法,从高考发展趋势上指导考生进行有效复习,具有较强的前瞻性.

考题预测与训练 直接瞄准2007年高考,根据本专题内容命制与高考方向一致的练习试题,供考生在复习完本专题后自我检测,既具实战意义,同时也起到训练题型和提高解题速度的作用.

在编写过程中,我们本着对读者负责的态度,章章推敲,层层把关,但由于受时间的限制,书中疏漏之处在所难免,在此我们恳请广大读者和有关专家不吝指正.相信在你我的共同努力下,本书能以其卓越的品质为广大考生的高考之路奠定坚实的基础.

此书是我所研究员与十多位高考专家、特级教师经过呕心沥血、精益求精的编写,为百万学子奉献的一部经典力作.相信它会得到广大师生的好评和厚爱,相信它会给你人生最重要的渡口——高考指点迷津,让你翩然登上理想的高等学府的神圣殿堂.

愿你——翻遍此书有益处,得分不枉费工夫.

愿你——乘风破浪高考时,心领秘招济学海.

编　者

金太阳系列丛书

特别鸣谢以下学校的大力协助：

江西省： 南昌二中 江西师大附中 南昌一中 南昌三中 南昌十中 南昌十七中 临川一中 吉安一中 白鹭洲中学 新余一中 新余四中 瑞昌一中 新建二中 上高二中 宜春中学 临川二中 赣州一中 江西南大附中 玉山一中 南康中学 赣县中学 修水一中 安福中学 上饶一中 萍乡中学 贵溪一中 鹰潭一中 景德镇一中 赣州市三中 安义中学 峡江中学

北京市： 北京四中 北京景山学校 清华大学附中 北师大附属实验中学 首都师大附中 北师大附中 北京二中 北京二十中

天津市： 南开中学 耀华中学 天津实验中学 大港一中 静海县一中

河北省： 邯郸一中 唐山市一中 衡水中学 正定中学 遵化一中

内蒙古： 内蒙古师大附中 呼和浩特市二中 赤峰市二中

山西省： 太原五中 临汾一中 平遥中学 运城中学 大同一中 晋城一中 怀仁县一中 沁县中学

辽宁省： 沈阳市二中 东北育才中学 大连市八中 庄河高中

吉林省： 东北师大附中 省实验中学 长春市实验中学 吉林市一中 延边市二中 松原前郭五中 松原市第二中学

黑龙江： 哈尔滨市六中 哈尔滨市九中 鸡西市一中 齐齐哈尔市实验中学

江苏省： 南京师大附中 南京外国语学校 南京一中 南通中学 启东中学 姜堰中学 盐城中学 徐州一中 张家港高中

浙江省： 杭州高级中学 浙江大学附中 宁波效实中学 诸暨学勉中学 金华市一中 浙师大附中 东阳中学 衢州二中 绍兴柯桥中学 温州中学

山东省： 省实验中学 济南市一中 青岛市二中 曲阜师大附中 潍坊市一中 滨州市北镇中学 烟台市二中 济宁市实验中学 牟平一中

安徽省： 合肥市一中 马鞍山市二中 安庆市一中 濉溪中学

福建省： 福建师大附中 南平高级中学 福州三中 龙岩二中 龙岩一中 南平一中

河南省： 河南大学附中 开封市高中 潢川一中 新乡市一中 平舆二高

湖北省： 华中师大一附中 黄冈中学 荆州中学 武汉中学 天门中学 水果湖中学 武汉二中 荆门市一中 仙桃中学

湖南省： 湖南师大附中 长沙市一中 郴州市一中 株洲市二中 衡阳市八中 沅江市三中 岳阳市一中 岳阳县一中 桑植一中 株洲市南方中学

广东省： 华南师大附中 广东省实验中学 汕头金山中学 惠州市一中 深圳教育学院附中 顺德市一中 高州中学

广　西： 广西师大附中 南宁市二中 北海市教科所 桂林市临桂中学

四川省： 成都市七中 成都石室中学 成都市十二中 四川师大附中 新都一中 彭州中学 南充高级中学 攀枝花市三中

重庆市： 西南师大附中 重庆市一中 重庆市十一中 重庆市三中 重庆市八中

贵州省： 凯里市一中 贵阳师大附中 兴义市一中 瓮安县中学 独山县民族中学

云南省： 昆明一中 昆明三中 宣威一中 大理一中 曲靖一中

西　藏： 拉萨中学

陕西省： 陕西师大附中 西安中学 安康中学 延安中学 渭南市瑞泉中学 咸阳中学 韩城象山中学 绥德中学 榆林市第一中学 榆林中学

甘肃省： 西北师大附中 兰州市一中 天水一中

宁　夏： 宁夏大学附中 银川市一中 银川市唐徕回民中学

新　疆： 新疆实验中学 乌鲁木齐市一中 库尔勒华山中学兵团二中 乌鲁木齐铁路三中

（限于篇幅仅列部分学校，敬请谅解）

高考二轮复习期心理问题指导

一、学会缓减心理压力

高三阶段，同学们进入到紧张的复习备考状态，你追我赶，激烈的竞争带来了巨大的压力。心理研究发现，保持适度的心理压力有利于学习效率的提高；但压力过大，会造成紧张、急躁心理。所以，同学们必须学会调节自身的心理压力。

首先，同学们应当认识到，随着高考的临近，抓紧时间复习、积极备考是正常的，正如军队临战前要练兵、运动员比赛前要训练一样。有了这样的认识，就能把压力变为动力。

其次，要在老师的指导下制定自己的复习计划，做到以“我”为主，紧而不乱，不要盲目地跟着别人跑。要把平时当考时，考时当平时，尽量以平静的心态来复习备考。

再次，还要注意搞好团结。同学间既竞争，又友好，互相帮助，共同进步。在一种宽松友爱的氛围中复习，会收到更好的效果，高考中也能发挥出自己的最高水平。

二、正确看待信心问题

一些同学由于付出的努力短时间内看不到效果，就对自己的能力产生怀疑，这是没有树立正确的归因理念所致。精神分析专家阿德勒在《超越自卑》一书中说：“事实上，每个人都是自卑的，只是程度不同而已。因为我们发现我们的现状都是可以进一步改善的。”从这个意义上来说，自卑也可以成为一个人进步的动力，人生正是在对自卑的不断超越中渐入佳境的。但是，持久的、过分的自卑感则容易造成心理疾患。在遭遇挫折时，建议同学们不妨尝试以下策略：

1.对自己有一个客观的、全面的评价。

2.善于将成功归结为自己的能力。

3.体验内心的喜悦感和成就感，要相信之所以失败是由于自己努力不够或无效努力。

4.制定阶段性目标，在不断达到目标的过程中体验成就感。

5.增强自信心。

6.乐观、平静地对待挫折，因为挫折对于成功同样是必要的。

三、如何缓解学业焦虑

1.学业焦虑往往体现在对考分的过分看重，说到底是对自己未来前途的焦虑。之所以如此，原因有三：一是由于群体效应，将分数作为衡量自己能力的唯一指标；二是不自觉地将获取高学历等同于自己的人生价值；三是渴望自我实现与现实学业成绩的不理想而导致的认知不协调。只有减轻心理负担与学习负担，才能减轻精神上和学习上的压力，才能健康愉快地成长。为了缓解和消除学业焦虑，同学们可以尝试以下几种方法：

(1)选择适合自己的目标动机水平，过强或过弱的动机水平都容易产生失败体验而导致心理压力。

(2)未来对于每一个人来说都是一个未知数，不要过多地担忧将来的事情，而应将自己的精力和时间投入到现实的生活和学习中去。

(3)考前作好知识准备以及应付考试突发事件的心理准备，有备才能无患。

(4)不妨采用“极限思维法”，想象你所焦虑的事件可能的最坏结果，你会发现现状还是值得乐观的。

2.学习动力不足也常常令学生苦恼。一方面同学们都有提高成绩的需要，而另一方面，又容易产生浮躁、厌烦情绪，导致学习无动力或动力不足。学习动机分内在(具有持久性)和外在(具有短暂性)两种，学习者只有“知学”、“好学”并且“乐学”，从价值上给自己的学习以较高的评价，才会产生持久的学习动机。当然，学习的外在动机也是必要的，只有二者和谐作用，才会相辅相成，相得益彰。

四、如何克服精力分散

中学生在学习中常常会出现注意力不集中、精力分散、“走神”等现象。造成注意力分散的原因可能有以下几点：因单调刺激而引起的厌倦感，如学习繁重、枯燥；否定注意对象的价值导致意志努力失败或放弃努力；由精神疲劳而引起的疲劳效应。

“注意紧张状态”理论提出学习单元时间的概念。由于个性差异，每个人的学习单元时间可能不尽相同，有人认为一个人的最佳学习单元时间约为25分钟，通俗地讲，一个学习单元时间即是一个注意紧张状态，学习者应避免在一个既定学习单元时间内分心。

可以尝试以下克服注意力分散的三步控制法：

第一步，当出现某种滞涩情绪时，同学们应敏感地意识到，并提醒自己不能成为情绪的俘虏。

第二步，尽快着手按已定的复习计划学习。

第三步，继续学习，直到完成。

明白了上述道理，同学们就能够克服在一个学习单元时间内注意力分散的不良习惯，从而提高学习的效率。

Contents 目录

第一部分　高考热点重点与难点

第一专题　高考集合、映射与不等式题型分析与预测 …… (1)

第二专题　高考函数题型分析与预测 …… (11)

第三专题　高考三角函数与平面向量题型分析与预测 …… (25)

第四专题　高考数列题型分析与预测 …… (35)

第五专题　高考排列、组合、二项式定理及概率与统计题型分析与预测 · (47)

第六专题　高考直线与圆锥曲线题型分析与预测 …… (57)

第七专题　高考直线、平面与简单几何体题型分析与预测 …… (70)

第八专题　高考创新题型分析与预测 …… (85)

第二部分　数学思想方法

第九专题　函数与方程的思想方法 …… (99)

第十专题　数形结合的思想方法 …… (110)

第十一专题　分类讨论的思想方法 …… (118)

第十二专题　化归与类比的思想方法 …… (127)

第三部分　应考策略

第十三专题　怎样解客观题 …… (135)

第十四专题　怎样解解答题 …… (140)

第四部分　强化训练

第十五专题　2007年高考强化训练 …… (147)

参考答案 …… (153)

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

第一部分　高考热点重点与难点

第一专题 高考集合、映射与不等式题型分析与预测

考题特征剖析

从2006年全国各地18套高考试卷及近年的高考试题来看,对集合、映射和不等式问题的考查主要涉及以下几类:

(1)集合的基本概念和运算;

(2)命题的四种形式及充要条件的判定;

(3)映射及映射与函数的关系;

(4)不等式及不等式的解法与证明.

集合与简易逻辑是每年高考必考的知识点之一,其中对命题的判定及充要条件的考查力度较大,还常常以集合为工具考查集合语言和集合思想的运用.考题多为较容易的选择题、填空题,但偶尔也会出现考查充要条件的论证或先寻求充要条件再加以证明的能力题,也有用集合表现出来的解答题.

不等式具有应用广泛、变换灵活、知识综合、能力复合等特点,它不仅是中学数学的重点内容,也是高等数学的基础和工具.不等式问题在高考中一直是考查的重点和热点,在近年来的高考试题中占有相当大的比重.这些试题不仅考查有关不等式的基础知识、基本技能和基本方法,而且能更有效地测试逻辑推理能力、运算能力以及运用相关的知识和方法去分析问题和解决问题的能力.

不等式试题在高考试卷中形式活泼且多种多样,既有选择题、填空题,又有解答题.从近年高考试题的综合分析情况来看,不等式内容大致有以下四类:解不等式问题、求参数的取值范围问题、不等式的证明问题和不等式的应用问题.

高考近几年加大了在知识交汇点处命题的力度,单独解不等式或证明不等式的题目明显减少.不等式试题更多的是与集合、函数、方程、数列、三角、解析几何、立体几何及实际应用问题相互交叉和渗透,充分体现出不等式在知识网络中所具有的极强的辐射作用.

考点题型再现与分析

考点1:集合、映射及充要条件

解决此类问题,要深刻理解集合、映射及充要条件的概念,熟练集合的交、并、补等基本运算.判定与证明充要条件时,首先必须弄清条件是什么,结论是什么,然后再判定并证明条件是结论的哪种条件.

1.集合间的关系

【例1】设集合 $P=\{x|x=\frac{k}{3}+\frac{1}{6},k\in\mathbf{Z}\}$,$Q=\{x|x=\frac{k}{6}+\frac{1}{3},k\in\mathbf{Z}\}$,则 (　　)

(A)$P=Q$.　　(B)$P\subsetneqq Q$.

(C)$P\supsetneqq Q$.　　(D)$P\cap Q=\varnothing$.

【分析】要判断两个集合间的相互关系,往往从缩小集合代表元素表示形式的差异入手.

【解析】$P=\{x|x=\frac{2k+1}{6},k\in\mathbf{Z}\}$,$Q=\{x|x=\frac{k+2}{6},k\in\mathbf{Z}\}$.对任意 $x\in P$,有 $x=\frac{2k+1}{6}=\frac{(2k-1)+2}{6}\in Q$,$2k-1\in\mathbf{Z}$,$\therefore P\subseteq Q$.又存在 $x_0=\frac{0+2}{6}=\frac{1}{3}\in Q$,但 $x_0\notin P$,$\therefore P\subsetneqq Q$,故选B.

【答案】B

【点评】转化和数形结合是解决集合问题的常用思想方法,要熟练掌握并灵活运用.本题是选择题,也可用特殊值法加排除法来判断,还可以利用列举法求解.

【备选题1】已知集合 $A=\{(x,y)|ax+y=1,x,y\in\mathbf{R}\}$,$B=\{(x,y)|x+ay=1,x,y\in\mathbf{R}\}$,$C=\{(x,y)|x^2+y^2=1,x,y\in\mathbf{R}\}$.若 $(A\cup B)\cap C$ 是由两个元素构成的集合,则实数 $a=$ ________.

2.映射的概念

【例2】设集合 $A=\{-2,0,1\}$,$B=\{1,2,3,4,5\}$,映

射 $f:A\to B$ 使对任意 $x\in A$ 都有 $x+f(x)+xf(x)$ 是奇数.则这样的映射 f 的个数是　　(　　)

(A)45.　　(B)27.

(C)15.　　(D)11.

【分析】要确定映射的个数,必须明确映射的概念.对集合 A 中的每一个元素,在集合 B 中有唯一一个元素与之对应,且满足 $x+f(x)+xf(x)$ 是奇数,每个映射的确定要分三步完成.

【解析】当 $x=-2$ 时,$x+f(x)+xf(x)=-2+f(-2)-2f(-2)$ 为奇数,则 $f(-2)$ 可取 1,3,5,有 3 种取法;

当 $x=0$ 时,$x+f(x)+xf(x)=f(0)$ 为奇数,则 $f(0)$ 可取 1,3,5,有 3 种取法;

当 $x=1$ 时,$x+f(x)+xf(x)=1+2f(1)$ 为奇数,则 $f(1)$ 可取 1,2,3,4,5,有 5 种取法.

由乘法原理可知,共有 $3\times3\times5=45$ 个映射.

【答案】A

【点评】准确理解映射的定义是解决映射问题的关键.在解决计数问题时,要注意分类计数原理和分步计数原理的正确应用.

【备选题 2】设集合 $A=\{1,2,3,m\}$,$B=\{4,7,n^4,n^2+3n\}$,对应法则 $f:a\to b=pa+q$ 是从 A 到 B 上的一一映射.已知 $m,n\in\mathbf{N}$,1 的象是 4,7 的原象是 2,求 p,q,m,n 的值.

3.充要条件的判定

【例 3】已知 p:关于 x 的不等式 $|x-1|+|x-3|<m$ 有解;q:$f(x)=(7-3m)^x$ 为减函数,则 p 是 q 成立的　　(　　)

(A)充分而不必要条件.

(B)必要而不充分条件.

(C)充要条件.

(D)既不充分也不必要条件.

【分析】要判定充要条件,首先要明确命题 p、q 中参数 m 的取值范围.

【解析】由 $|x-1|+|x-3|\geqslant|(x-1)+(3-x)|=2$,得 $p:m>2$;由 $0<7-3m<1$ 得 $q:2<m<\frac{7}{3}$.

故 $p\nRightarrow q$,但 $q\Rightarrow p$.

【答案】B

【点评】判定充要条件的常用方法有:定义法、等价转化法、传递法、集合法等,要能针对不同问题选用合适的判定方法.注意用符号"⇒"表示两命题的关系时,箭头所指为必要条件,箭尾所连为充分条件,不能混淆.

【备选题 3】已知 $p:\left|1-\frac{x-1}{3}\right|\leqslant2$;$q:x^2-2x+1-m^2\leqslant0(m>0)$.若 $\neg p$ 是 $\neg q$ 的充分而不必要条件,求实数 m 的取值范围.

考点 2:有关不等式的解法

解不等式的关键是等价转化,如分式不等式转化为整式不等式,无理不等式转化为有理不等式,绝对值不等式转化为不含绝对值的不等式.对于含有参数的不等式,由于参数的取值范围不同,其结果就不同,因此必须对参数进行分类讨论.

1.基本不等式的解法

【例 4】解下列关于 x 的不等式:

(1)$x^5-6x^4+8x^3\geqslant(5x^2+6x)(x^2-6x+8)$;

(2)$\frac{3}{x-2}\leqslant1-\frac{2}{x+2}$;

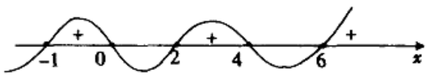
(3)$ax^2-(a+1)x+1<0$.

【分析】(1)是一个高次整式不等式,解决的办法是先进行因式分解,然后用数轴标根法.(2)的关键是转化为整式不等式.对于(3),先求对应方程的根,再根据二次项系数与不等号确定解集,但要注意对字母进行讨论.

【解析】(1)将原不等式化为

$x^3(x^2-6x+8)-(5x^2+6x)(x^2-6x+8)\geqslant 0$,

即 $x(x+1)(x-6)(x-2)(x-4)\geqslant 0$.



由图可知,原不等式的解集为

$\{x|-1\leqslant x\leqslant 0$ 或 $2\leqslant x\leqslant 4$ 或 $x\geqslant 6\}$.

(2)$\frac{3}{x-2}\leqslant 1-\frac{2}{x+2}\Leftrightarrow\frac{3}{x-2}\leqslant\frac{x}{x+2}$

$\Leftrightarrow\frac{-x^2+5x+6}{(x-2)(x+2)}\leqslant 0\Leftrightarrow\frac{(x-6)(x+1)}{(x-2)(x+2)}\geqslant 0$

$\Leftrightarrow\begin{cases}(x-2)(x+2)(x-6)(x+1)\geqslant 0,\\(x-2)(x+2)\neq 0.\end{cases}$

用数轴标根法得到原不等式的解集为

$(-\infty,-2)\cup[-1,2)\cup[6,+\infty)$.

(3)由题可知$(ax-1)(x-1)<0$.

(Ⅰ)当 $a=0$ 时,$x>1$.

(Ⅱ)当 $a\neq 0$ 时,对应一元二次方程的两根为$\frac{1}{a}$,1,

①当$\frac{1}{a}=1$,即 $a=1$ 时,解集为 $\varnothing$;

②当 $0<\frac{1}{a}<1$,即 $a>1$ 时,解集为$\{x|\frac{1}{a}<x<1\}$;

③当 $a<0$ 时,解集为$\{x|x>1$ 或 $x<\frac{1}{a}\}$;

④当$\frac{1}{a}>1$,即 $0<a<1$ 时,解集为$\{x|1<x<\frac{1}{a}\}$.

综上知,当 $a=0$ 时,解集为$\{x|x>1\}$;

当 $a=1$ 时,解集为 $\varnothing$;

当 $a>1$ 时,解集为$\{x|\frac{1}{a}<x<1\}$;

当 $a<0$ 时,解集为$\{x|x>1$ 或 $x<\frac{1}{a}\}$;

当 $0<a<1$ 时,解集为$\{x|1<x<\frac{1}{a}\}$.

【点评】将分式不等式化为整式不等式求解时,要注意同解变形,特别是有等号时.对于含参数的不等式,进行分类讨论时,关键是分类标准的正确划分,由于 a 与 x 不同,故最后结果不能写成并集.

【备选题4】已知函数 $f(x)=\frac{x^2}{ax+b}$(a、b 为常数),且方程 $f(x)-x+12=0$ 有两个实根 $x_1=3$,$x_2=4$.

(1)求函数 $f(x)$的解析式;

(2)设 $k>1$,解关于 x 的不等式:$f(x)<\frac{(k+1)x-k}{2-x}$.

2.简单对数、指数不等式的解法

【例5】当 $a>1$ 时,解关于 x 的不等式:

$\log_a[a^{2x}-2^x\cdot(a^x+2^{x+1})+1]>0$.

【分析】本题是一个对数型的含参数不等式,但对数的底数范围已知,所以无需讨论,这样很快就可以将表面复杂的对数不等式等价转化为含参数的指数型不等式,视 a^x 为变量转化为二次型的不等式.

【解析】原不等式等价于

$\log_a[a^{2x}-2^x\cdot(a^x+2^{x+1})+1]>0=\log_a 1$.

$\because a>1$,$\therefore a^{2x}-2^x\cdot a^x-2^{2x+1}>0$,

即$(a^x+2^x)(a^x-2^{x+1})>0$.

$\because a^x+2^x>0$,$\therefore a^x>2^{x+1}$,即$(\frac{a}{2})^x>2$.

下面需取两边以$\frac{a}{2}$为底的对数,$\because a>1$,

$\therefore$当$\frac{a}{2}>1$,即 $a>2$ 时,解为 $x>\log_{\frac{a}{2}}2$;

当$\frac{a}{2}=1$,即 $a=2$ 时,$1^x>2$,不等式无解;

当 $0<\frac{a}{2}<1$,即 $1<a<2$ 时,解为 $x<\log_{\frac{a}{2}}2$.

综上,当 $1<a<2$ 时,解集为$(-\infty,\log_{\frac{a}{2}}2)$;

当 $a>2$ 时,解集为$(\log_{\frac{a}{2}}2,+\infty)$;

当 $a=2$ 时,解集为 $\varnothing$.

【点评】指数、对数不等式的解题过程中常常用到换元法,底数是参数时,需进行分类讨论.

【备选题 5】(1)设 $f(x)=\begin{cases}2e^{x-1}, x<2,\\ \log_3(x^2-1), x\geqslant 2,\end{cases}$ 则不等式 $f(x)>2$ 的解集为　　(　　)

(A)$(1,2)\cup(3,+\infty)$.　　(B)$(\sqrt{10},+\infty)$.

(C)$(1,2)\cup(\sqrt{10},+\infty)$.　　(D)$(1,2)$.

(2)解不等式 $\log_{\frac{1}{2}}(x^2-x-2)>\log_{\frac{1}{2}}(x-1)-1$.

3.有关抽象函数不等式的解法

【例 6】已知 $f(x)$ 是定义在 $[-1,1]$ 上的奇函数，且 $f(1)=1$，若 $a,b\in[-1,1]$，$a+b\neq 0$，有 $\dfrac{f(a)+f(b)}{a+b}>0$.

(1)判断 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上是增函数还是减函数，并证明你的结论；

(2)解不等式 $f(x+\frac{1}{2})<f(\frac{1}{x-1})$；

(3)若 $f(x)\leqslant m^2-2am+1$ 对所有 $x\in[-1,1]$，$a\in[-1,1]$ 恒成立，求实数 m 的取值范围.

【分析】求解有关抽象函数的不等式其实就是研究抽象函数的单调性，在把抽象函数不等式转化为普通不等式时，不能忘记抽象函数的定义域要求.

【解析】(1)任取 $x_1,x_2\in[-1,1]$，且 $x_1<x_2$，

则 $-x_2\in[-1,1]$，又 $f(x)$ 是奇函数，于是

$f(x_1)-f(x_2)=f(x_1)+f(-x_2)$

$=\dfrac{f(x_1)+f(-x_2)}{x_1+(-x_2)}\cdot(x_1-x_2)$.

由已知 $\dfrac{f(x_1)+f(-x_2)}{x_1+(-x_2)}>0$，$x_1-x_2<0$，

$\therefore f(x_1)-f(x_2)<0$，即 $f(x_1)<f(x_2)$，

$\therefore f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上是增函数.

(2)据函数 $f(x)$ 是定义在 $[-1,1]$ 上的增函数，

不等式 $f(x+\frac{1}{2})<f(\frac{1}{x-1})$ 等价于不等式组

$$\begin{cases}-1\leqslant x+\frac{1}{2}\leqslant 1,\\ -1\leqslant \frac{1}{x-1}\leqslant 1,\\ x+\frac{1}{2}<\frac{1}{x-1},\end{cases}$$

解得 $-\frac{3}{2}\leqslant x<-1$，

$\therefore$ 原不等式的解集为 $\{x|-\frac{3}{2}\leqslant x<-1\}$.

(3)由(1)知 $f(x)$ 是 $[-1,1]$ 上的增函数，且 $f(1)=1$，故对所有的 $x\in[-1,1]$，有 $f(x)\leqslant 1$.

由已知，对所有的 $x\in[-1,1]$，$a\in[-1,1]$，

$f(x)\leqslant m^2-2am+1$ 恒成立，

$\therefore m^2-2am+1\geqslant 1$ 成立，即 $m^2-2am\geqslant 0$.

记 $g(a)=-2am+m^2$.

对所有的 $a\in[-1,1]$，$g(a)\geqslant 0$ 都成立，

则 $\begin{cases}g(-1)\geqslant 0,\\ g(1)\geqslant 0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}m^2+2m\geqslant 0,\\ m^2-2m\geqslant 0,\end{cases}$

解得 $m\leqslant -2$ 或 $m=0$ 或 $m\geqslant 2$.

故 m 的取值范围为 $m\leqslant -2$ 或 $m=0$ 或 $m\geqslant 2$.

【点评】在判断抽象函数单调性以及变换不等式时，都要对给定的抽象关系进行函数式与函数值的灵活转化.

【备选题 6】定义在 $(-1,1)$ 上的函数 $f(x)$ 满足：①对任意 $x,y\in(-1,1)$，都有 $f(x)+f(y)=f(\frac{x+y}{1+xy})$；②当 $x\in(-1,0)$ 时，$f(x)>0$.

(1)讨论 $f(x)$ 的单调性；

(2)若 $f(\frac{1}{2})=1$，试解不等式 $f(x)+f(x-1)<2$.

4. 有关参数的取值范围

在方程或不等式中求参数的取值范围是近年来高考数学试题的一大热点. 求解这类问题的常用策略有：转化法、分离参数法、主元法、数形结合法等.

【例 7】关于 x 的不等式 $|x-\frac{1}{2}(a+1)^2|\leqslant\frac{1}{2}(a-1)^2$ 与 $x^2-3(a+1)x+2(3a+1)\leqslant 0(a\in\mathbf{R})$ 的解集分别为 A 和 B，且 $A\cap B=A$，求 a 的取值范围.

【分析】$A\cap B=A\Leftrightarrow A\subseteq B$. 先求出集合 A，再对方程 $x^2-3(a+1)x+2(3a+1)=0$ 的根进行大小比较，结合 $A\subseteq B$ 确定 a 的范围.

【解析】由不等式 $|x-\frac{1}{2}(a+1)^2|\leqslant\frac{1}{2}(a-1)^2$，

得 $A=\{x|2a\leqslant x\leqslant a^2+1\}$.

由 $x^2-3(a+1)x+2(3a+1)\leqslant 0(a\in\mathbf{R})$，

得 $(x-2)[x-(3a+1)]\leqslant 0$.

当 $a\geqslant\frac{1}{3}$ 时，$B=\{x|2\leqslant x\leqslant 3a+1\}$；

当 $a<\frac{1}{3}$ 时，$B=\{x|3a+1\leqslant x\leqslant 2\}$.

又 $A\cap B=A\Rightarrow A\subseteq B$，当 $a\geqslant\frac{1}{3}$ 时，

有 $\begin{cases}2\leqslant 2a,\\ a^2+1\leqslant 3a+1\end{cases}\Rightarrow 1\leqslant a\leqslant 3$，

当 $a<\frac{1}{3}$ 时，有 $\begin{cases}3a+1\leqslant 2a,\\ a^2+1\leqslant 2\end{cases}\Rightarrow a=-1$.

$\therefore a$ 的取值范围是 $1\leqslant a\leqslant 3$ 或 $a=-1$.

【点评】要注意分类讨论和数形结合思想方法的应用.

【备选题 7】设函数 $f(x)=|x-a|,g(x)=ax,a>0$.

(1)当 $a=2$ 时，解关于 x 的不等式 $f(x)<g(x)$；

(2)记 $F(x)=f(x)-g(x)$，若 $F(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有最小值，求 a 的取值范围.

【例 8】已知函数 $f(x)=\frac{x^2+c}{ax+b}$ 为奇函数，$f(1)<f(3)$，且不等式 $0\leqslant f(x)\leqslant\frac{3}{2}$ 的解集是 $[-2,-1]\cup[2,4]$.

(1)求 a,b,c 的值；

(2)是否存在实数 m 使不等式 $f(-2+\sin\theta)<-m^2+\frac{3}{2}$ 对一切 $\theta\in\mathbf{R}$ 成立？若存在，求出 m 的取值范围；若不存在，请说明理由.

【分析】(1)由奇函数的定义得 $b=0$，再结合不等式的解集得 $f(2)=0,f(4)=\frac{3}{2}$，进而求出 a,c；(2)求出 $f(-2+\sin\theta)$ 的最大值.

【解析】(1) $f(x)$ 是奇函数 $\Leftrightarrow f(-x)=-f(x)$ 对定义域内一切 x 都成立 $\Leftrightarrow b=0$，从而 $f(x)=\frac{1}{a}(x+\frac{c}{x})$.

又 $\begin{cases}f(2)\geqslant 0,\\ f(-2)\geqslant 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}f(2)\geqslant 0,\\ -f(2)\geqslant 0\end{cases}\Leftrightarrow f(2)=0\Leftrightarrow c=-4$，

$\therefore f(x)=\frac{1}{a}(x-\frac{4}{x})$.

再由 $f(1)<f(3)$，得 $a>0$，

$\therefore f(x)=\frac{1}{a}(x-\frac{4}{x})$ 在 $[2,4]$ 上是增函数，注意到 $f(2)=0$，则必有 $f(4)=\frac{3}{2}$，即 $\frac{1}{a}(4-\frac{4}{4})=\frac{3}{2}$，

$\therefore a=2$，综上知，$a=2,b=0,c=-4$.

(2)由(1)知，$f(x)=\frac{1}{2}(x-\frac{4}{x})$ 在 $(-\infty,0)$ 上为增函数，而 $-3\leqslant -2+\sin\theta\leqslant -1$，所以 $f(-2+\sin\theta)$ 的值域为 $[-\frac{5}{6},\frac{3}{2}]$.

符合题设的实数 m 应满足 $\frac{3}{2}-m^2>\frac{3}{2}$，即 $m^2<0$，故符合题设的实数 m 不存在.

【点评】本题第(1)问关键是由 $\begin{cases}f(2)\geqslant 0,\\ f(-2)\geqslant 0\end{cases}$ 结合 $f(x)$ 是奇函数的条件导出 $f(2)=0$. 第(2)问转化为求不等式 $\frac{3}{2}-m^2>f(-2+\sin\theta)_{\max}$ 的解集.

【备选题 8】设二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c(a,b,c\in\mathbf{R})$ 满足下列条件：

①当 $x\in\mathbf{R}$ 时，$f(x)$ 的最小值为 0，且 $f(x-1)=f(-x-1)$ 成立；

②当 $x\in(0,5)$ 时，$x\leqslant f(x)\leqslant 2|x-1|+1$ 恒成立.

(1)求 $f(1)$ 的值；

(2)求 $f(x)$ 的解析式；

(3)是否存在实数 t，使得当 $x\in[1,m]$ 时，$f(x+t)\leqslant x$ 恒成立？若存在，求出 m 的最大值；若不存在，请说明理由.

考点 3：有关不等式的证明

不等式的证明非常活跃，它可以和很多知识如：函数、数列、三角等相联系，证明时不仅要用到不等式的性质、不等式证明的技能、技巧，还要用到相关内容的技能、技巧，应注意加强逻辑推理能力的训练.

1. 有关三个“二次”的问题

【例 9】已知二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$.

(1)已知 $x_1,x_2\in\mathbf{R}$，$x_1<x_2$，且 $f(x_1)\neq f(x_2)$，求证：关于 x 的方程 $f(x)=\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]$ 有两个不相等的实根，且必有一个根在区间 (x_1,x_2) 内；

(2)若关于 x 的方程 $f(x)=\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]$ 在区间 (x_1,x_2) 内的根为 m，且 $x_1,m-\frac{1}{2},x_2$ 成等差数列，设函数 $f(x)$ 的图象的对称轴方程为 $x=x_0$.

求证：$x_0<m-\frac{1}{2}$.

【分析】本题属于三个“二次”的问题，这类问题在解题时，首先要充分利用相应的二次函数的性质，特别是图象特征与单调性.

【解析】(1)∵ $f(x)=\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]$，

∴ $ax^2+bx+c=\frac{1}{2}(ax_1^2+bx_1+c+ax_2^2+bx_2+c)$，

整理得 $2ax^2+2bx-a(x_1^2+x_2^2)-b(x_1+x_2)=0$，

$\Delta=4b^2+8a[a(x_1^2+x_2^2)+b(x_1+x_2)]$

$=2[(2ax_1+b)^2+(2ax_2+b)^2]$.

∵ $x_1,x_2\in\mathbf{R}$，$x_1<x_2$，

∴ $2ax_1+b\neq 2ax_2+b$，

∴ $\Delta>0$，故方程有两个不相等的实数根.

令 $g(x)=f(x)-\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]$，

则 $g(x_1)\cdot g(x_2)=-\frac{1}{4}[f(x_1)-f(x_2)]^2$.

又∵ $f(x_1)\neq f(x_2)$，

∴ $g(x_1)\cdot g(x_2)<0$，

故方程 $f(x)=\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]$ 必有一个根在区间 (x_1,x_2) 内.

(2)∵方程 $f(x)=\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]$ 在区间 (x_1,x_2) 内的根为 m，

∴ $f(m)=\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]$，

∴ $a(2m^2-x_1^2-x_2^2)+b(2m-x_1-x_2)=0$.

∵ $x_1,m-\frac{1}{2},x_2$ 成等差数列，∴ $x_1+x_2=2m-1$，

∴ $b=-a(2m^2-x_1^2-x_2^2)$，

故 $x_0=-\frac{b}{2a}=\frac{2m^2-(x_1^2+x_2^2)}{2}=m^2-\frac{x_1^2+x_2^2}{2}=m^2-\frac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{2}=m^2-\frac{(2m-1)^2}{2}+x_1x_2$.

∵ $x_1<m<x_2$，

∴ $(m-x_1)(m-x_2)<0$，

即 $m^2-m(x_1+x_2)+x_1x_2<0$，

$x_1x_2<-m^2+m(2m-1)=m^2-m$，

∴ $x_0<m^2-\frac{(2m-1)^2}{2}+m^2-m=m-\frac{1}{2}$.

【点评】本题考查了对一元二次方程、二次函数和一元二次不等式这三个“二次”之间关系的本质认识，对学生灵活处理参数的能力及不等式的转换能力有较高要求.

【备选题 9】已知函数 $f(x)=ax^2+bx+c(a,b,c\in\mathbf{R})$，当 $x\in[-1,1]$ 时，$|f(x)|\leqslant 1$.

(1)证明：$|b|\leqslant 1$；

(2)若 $f(0)=-1$，$f(1)=1$，求 a 的值.

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

2. 函数(曲线)与不等式的联系

【例10】设函数 $f(x)=ax^3-2bx^2+cx+4d(a,b,c,d\in\mathbf{R})$ 的图象关于原点对称，且当 $x=1$ 时，$f(x)$ 取得极小值 $-\frac{2}{3}$.

(1)求 a、b、c、d 的值；

(2)当 $x\in[-1,1]$ 时，图象上是否存在两点，使得过此两点处的切线互相垂直？试证明你的结论；

(3)若 $x_1,x_2\in[-1,1]$，求证：$|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant\frac{4}{3}$.

【分析】本题是关于函数图象的切线以及函数与不等式的联系问题，这类问题一方面要考虑函数的导数与切线的联系，另一方面要考虑不等式有关性质的应用及函数的单调性与不等式的联系.

【解析】∵(1) $f(x)$ 为奇函数，∴ $b=d=0$，

则 $f(x)=ax^3+cx$，$f'(x)=3ax^2+c$.

由题意知 $x=1$ 时，$f(x)$ 取得极小值 $-\frac{2}{3}$，

则 $f'(1)=3a+c=0$，$f(1)=a+c=-\frac{2}{3}$，

解得 $a=\frac{1}{3}$，$c=-1$，即 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x$.

(2)当 $x\in[-1,1]$ 时，图象上不存在两点，使得过此两点处的切线互相垂直.

假如存在点 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$ 使得过此两点处的切线互相垂直，则由 $f'(x)=x^2-1$ 知两点处的切线斜率分别为 $k_1=x_1^2-1$，$k_2=x_2^2-1$，且 $(x_1^2-1)(x_2^2-1)=-1$. 又 $x_1,x_2\in[-1,1]$，∴ $x_1^2-1\leqslant0$，$x_2^2-1\leqslant0$. 从而与 $(x_1^2-1)(x_2^2-1)\geqslant0$ 矛盾，所以假设不成立.

(3)∵ $f'(x)=x^2-1$，令 $f'(x)=x^2-1=0$，

得 $x=\pm1$.

当 $x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$；

当 $x\in(-1,1)$ 时，$f'(x)<0$.

所以，$f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上是减函数，

且 $f(x)_{\max}=f(-1)=\frac{2}{3}$，$f(x)_{\min}=f(1)=-\frac{2}{3}$，

∴在 $[-1,1]$ 上，$|f(x)|\leqslant\frac{2}{3}$.

则当 $x_1,x_2\in[-1,1]$ 时，$|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant|f(x_1)|+|f(x_2)|\leqslant\frac{2}{3}+\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$，

∴ $|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant\frac{4}{3}$.

【点评】本题考查的重点是导数的概念和计算、切线的概念和方程、不等式的基本性质和证明. 以导数为工具研究函数的变化率，为解决函数极值问题提供了一条有效的途径. 将新课程新增加的内容(导数)和一些传统内容(不等式证明)有机地结合在一起设问，这是一种新颖的命题模式.

【备选题10】已知函数 $f(x)=ax^2+bx+c(a>b>c)$ 的图象上有两点 $A(m_1,f(m_1))$，$B(m_2,f(m_2))$，满足 $f(1)=0$，且 $a^2+a[f(m_1)+f(m_2)]+f(m_1)f(m_2)=0$.

(1)求证：$b\geqslant0$；

(2)求证：$f(x)$ 的图象被 x 轴所截得的线段长的取值范围是 $[2,3)$；

(3)问能否得出 $f(m_1+3)$，$f(m_2+3)$ 中至少有一个为正数？并证明你的结论.

3. 比较函数值的大小

【例11】已知 $f(x)=x^2+(a+1)x+\lg|a+2|(a\neq-2,a\in\mathbf{R})$. 若 $f(x)$ 能表示成一个奇函数 $g(x)$ 和一个偶函数 $h(x)$ 的和.

(1)求 $g(x)$ 和 $h(x)$ 的解析式；

(2)若 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在区间 $[\lg|a+2|,(a+1)^2]$ 上都是减函数，求 a 的取值范围；

(3)在(2)的条件下，比较 $f(1)$ 和 $\frac{1}{6}$ 的大小.

【分析】利用待定函数法及奇、偶函数的定义，求 $g(x)$ 和 $h(x)$ 的解析式. 区间 $[\lg|a+2|,(a+1)^2]$ 应是 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的单调递减区间的子区间.

【解析】(1)由已知得 $f(x)=g(x)+h(x)$(其中 $g(x)$ 是奇函数，$h(x)$ 是偶函数)，①

∴ $f(-x)=g(-x)+h(-x)=-g(x)+h(x)$. ②

由①②解得 $g(x)=(a+1)x$，$h(x)=x^2+\lg|a+2|$.

(2)由 $g(x)=(a+1)x$ 知，当且仅当 $a+1<0$，

即 $a<-1$ 时，$g(x)$ 是减函数，∴ $a<-1$.

又 $f(x)=x^2+(a+1)x+\lg|a+2|$

$=(x+\frac{a+1}{2})^2+\lg|a+2|-\frac{(a+1)^2}{4}$，

∴ $f(x)$ 的单调递减区间是 $(-\infty,-\frac{a+1}{2})$.

由已知得 $\lg|a+2|<(a+1)^2\leqslant-\frac{a+1}{2}$.

且 $a<-1$，即 $\begin{cases}a<-1, & ③\\(a+1)^2\leqslant-\frac{a+1}{2}, & ④\\\lg|a+2|<(a+1)^2. & ⑤\end{cases}$

解③④得 $-\frac{3}{2}\leqslant a<-1$.

而当 $-\frac{3}{2}\leqslant a<-1$ 时，$\lg|a+2|<(a+1)^2$ 恒成立，

$\therefore a$ 的取值范围是 $[-\frac{3}{2},-1)$.

(3) $f(1)=1+(a+1)+\lg|a+2|=a+2+\lg|a+2|$ $(-\frac{3}{2}\leqslant a<-1)$.

$\because (a+2)$ 和 $\lg|a+2|$ 在 $[-\frac{3}{2},-1]$ 上为增函数，

$\therefore f(1)\geqslant(-\frac{3}{2}+2)+\lg\left|(-\frac{3}{2})+2\right|=\frac{1}{2}+\lg\frac{1}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\lg\frac{1}{8}>\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\lg\frac{1}{10}=\frac{1}{6}$,

$\therefore f(1)>\frac{1}{6}$.

【点评】(1)揭示了这样的一个事实：任意一个定义在关于原点对称的区间上的函数，总能表示为一个奇函数与一个偶函数的和. 对于(3)，要用到在同一定义域内两个增函数之和为增函数，事实上两个减函数之和仍为减函数.

【备选题 11】定义在 $(0,+\infty)$ 上的函数 $f(x)$，对于任意的实数 $m,n\in(0,+\infty)$，都有 $f(mn)=f(m)+f(n)$ 成立，且当 $x>1$ 时，$f(x)<0$.

(1)求 $f(1)$ 的值；

(2)证明：$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是减函数；

(3)比较 $f(\frac{m+n}{2})$ 与 $\frac{f(m)+f(n)}{2}$ 的大小.

高考命题趋势

1. 由于集合与简易逻辑的基础性和工具性作用，高考更注意考查对基本概念的透彻理解，对基本原理的准确把握及与其他知识的密切联系. 对于集合，高考中一般以选择题、填空题的形式出现，难度偏小，主要考查集合的概念和运算，以及对集合语言的理解与应用. 对于简易逻辑，包括充要条件的判断与应用，既能在选择题、填空题中借考查充要条件来与其他章节的知识相结合，又能在解答题中与方程、不等式知识相结合，一般会辅之以判断命题的真假的新形式. 映射，则以基本概念为主，包括象、原象及映射的个数等.

2. 不等式仍将是高考数学的重点内容之一. 在选择题、填空题、解答题三种题型中均有各种类型的不等式题.

3. 单独考查不等式内容的试题将不多见，更多的是与函数、数列、解析几何等交叉和渗透的命题，以不等式为工具解决较复杂的综合问题. 解不等式内容将充斥整张试卷，特别是利用函数单调性解不等式(包括抽象函数的不等式)值得注意.

4. 除了利用均值不等式和函数的性质求最值外，利用导数求函数最值及单调区间的问题更会突出.

5. 以含参变数的函数(特别是二次函数)为中心设计不等式证明题仍是热点；导数(新课程新增内容)与传统的不等式证明有可能有机地结合在一起设问，不排除利用导数方法证明不等式的可能.

考题预测与训练

一、选择题

1. 已知函数 $f(x)$、$g(x)$ $(x\in\mathbf{R})$，设不等式 $|f(x)|+|g(x)|<a\ (a>0)$ 的解集为 M，不等式 $|f(x)+g(x)|<a\ (a>0)$ 的解集为 N，则解集 M 与 N 的关系是　(　　)

(A) $M\subseteq N$.　　(B) $M=N$.

(C) $N\subsetneqq M$.　　(D) $M\subsetneqq N$.

2. 下列大小关系正确的是　(　　)

(A) $0.4^3<3^{0.4}<\log_4 0.3$.

(B) $0.4^3<\log_4 0.3<3^{0.4}$.

(C) $\log_4 0.3<0.4^3<3^{0.4}$.

(D) $\log_4 0.3<3^{0.4}<0.4^3$.

3. 设 P、M 为集合 U 的子集，下列四个命题：

① $[(\complement_U P)\cap M]\cap(\complement_U M)=\varnothing$;

②$P\cup[M\cap(\complement_U P)]=P\cup M$;

③$[P\cap(\complement_U P)]\cup(P\cap M)=P$;

④$(P\cap M)\cup[P\cap(\complement_U M)]=P$.

其中真命题是　(　　)

(A)①②④.　(B)②③④.

(C)①②③.　(D)①②④.

4. 在$\mathbf{R}$上定义运算$\otimes$:$x\otimes y=\frac{x}{2-y}$,若关于x的不等式$(x-a)\otimes(x+1-a)>0$的解集是集合$\{x|-2\leqslant x\leqslant 2,x\in\mathbf{R}\}$的子集,则实数$a$的取值范围是　(　　)

(A)$-2\leqslant a\leqslant 2$.　(B)$-1\leqslant a\leqslant 1$.

(C)$-2\leqslant a\leqslant 1$.　(D)$1\leqslant a\leqslant 2$.

5. 已知命题p:关于x的方程$x^2-ax+4=0$有实根;命题q:关于x的函数$y=2x^2+ax+4$在$[3,+\infty)$上是增函数.若"p或q"是真命题,"p且q"是假命题,则实数a的取值范围是　(　　)

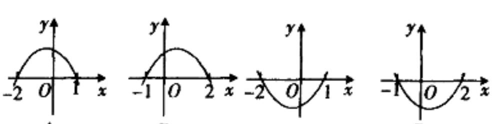
(A)$(-12,-4]\cup[4,+\infty)$.

(B)$[-12,-4]\cup[4,+\infty)$.

(C)$(-\infty,-12)\cup(-4,4)$.

(D)$[-12,+\infty)$.

6. 不等式$f(x)=ax^2-x-c>0$的解集为$\{x|-2<x<1\}$,则函数$y=f(-x)$的图象为　(　　)



A　B　C　D

7. 已知4枝郁金香和5枝丁香的价格之和小于22元,而6枝郁金香和3枝丁香的价格之和大于24元,设2枝郁金香的价格为a,3枝丁香的价格为b,则a、b的大小关系为　(　　)

(A)$a<b$.　(B)$a=b$.

(C)$a>b$.　(D)不确定.

8. 若$a,b\in\mathbf{R}$,则不等式$|2+ax|\geqslant|2x+b|$的解集为$\mathbf{R}$的充要条件是　(　　)

(A)$a=\pm 2$.　(B)$a=b=\pm 2$.

(C)$ab=4$且$|a|\leqslant 2$.　(D)$ab=4$且$|a|\geqslant 2$.

9. 若$f(x)$是$\mathbf{R}$上的减函数,且$f(x)$的图象经过点$A(0,4)$和点$B(3,-2)$,则当不等式$|f(x+t)-1|<3$的解集为$(-1,2)$时,实数t的值为　(　　)

(A)0.　(B)-1.

(C)1.　(D)2.

10. 由等式$x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4=(x+1)^4+b_1(x+1)^3+b_2(x+1)^2+b_3(x+1)+b_4$,定义$f(a_1,a_2,a_3,a_4)=(b_1,b_2,b_3,b_4)$,则$f(4,3,2,1)$等于　(　　)

(A)$(1,2,3,4)$.　(B)$(0,3,4,0)$.

(C)$(-1,0,2,-2)$.　(D)$(0,-3,4,-1)$.

二、填空题

11. 已知集合$A=\{x|x^2-2x-3>0\}$,$B=\{x|x^2+ax+b\leqslant 0\}$.若$A\cup B=\mathbf{R}$,$A\cap B=\{x|3<x\leqslant 4\}$,则$a+b=$______.

12. 设$a>0,a\neq 1$,函数$f(x)=a^{\lg(x^2-2x+3)}$有最大值,则不等式$\log_a(x^2-5x+7)>0$的解集为______.

13. 已知在整数集合内,关于x的不等式$2^{x^2-4}<2^{2x-2a}$的解集为$\{1\}$,则实数a的取值范围是______.

14. 若$x^2-xy+y^2=1$,则x^2-y^2的取值范围是______.

三、解答题

15. 已知命题p:方程$a^2x^2+ax-2=0$在$[-1,1]$上有解;命题q:只有一个实数x满足不等式$x^2+2ax+2a\leqslant 0$,若命题"p或q"是假命题,求a的取值范围.

16. 设函数$y=f(x)$是定义在$\mathbf{R}_+$上的减函数,并且满足$f(xy)=f(x)+f(y)$,$f(\frac{1}{3})=1$,

(1)求$f(1)$的值;

(2)如果$f(x)+f(2-x)<2$,求x的取值范围.

17. 求实数 λ 的取值范围，使不等式 $\left|\frac{1-ab\lambda}{a\lambda-b}\right|>1$ 对满足 $|a|<1$、$|b|<1$ 的一切实数 a,b 恒成立.

18. 已知函数 $f(x)=\log_2(x+m)$，且 $f(0)$、$f(2)$、$f(6)$ 成等差数列．若 a、b、c 是两两不相等的正数，且 a、b、c 成等比数列，试判断 $f(a)+f(c)$ 与 $2f(b)$ 的大小关系，并证明你的结论.

19. 对于函数 $f(x)$，若 $f(x)=x$，则称 x 为 $f(x)$ 的"不动点"；若 $f[f(x)]=x$，则称 x 为 $f(x)$ 的"稳定点". 函数 $f(x)$ 的"不动点"和"稳定点"的集合分别记为 A 和 B，即 $A=\{x|f(x)=x\}$，$B=\{x|f[f(x)]=x\}$.

(1)求证：$A\subseteq B$；

(2)若 $f(x)=ax^2-1(a,x\in\mathbf{R})$，且 $A=B\neq\varnothing$，求 a 的取值范围.

20. 已知 $a>0$，函数 $y=f(x)=x^3-ax$ 在 $x\in[1,+\infty)$ 上是单调函数.

(1)若函数 $f(x)$ 在区间 $[1,+\infty)$ 上是增函数，试求实数 a 的取值范围；

(2)试问函数 $y=f(x)$ 在 $a>0$ 的条件下，在 $x\in[1,+\infty)$ 上能否是减函数？请说明理由；

(3)设 $x_0\geqslant1$，$f(x_0)\geqslant1$ 且 $f[f(x_0)]=x_0$，求证：$f(x_0)=x_0$.

第二专题
高考函数题型分析与预测

考题特征剖析

高考对函数(包括导数、极限与连续)问题的考查主要涉及函数、导数、极限与连续的概念问题,函数的性质(单调性、奇偶性、周期性、对称性、最值等)问题,含参数的函数的讨论问题;以基本函数出现的综合题和应用问题.

函数是高中数学中极为重要的内容,其观点和方法都贯穿高中数学的全过程.近几年高考都对函数进行了重点考查,在选择题、填空题、解答题中都有函数试题,分值约占卷面总分的25%,其特点是:稳中求变,变中求新、求活.试题设计从传统的套用定义、简单地使用性质,发展到了挖掘本质、活用性质,出现了不少创设新情境、新定义的信息题,与实际密切联系的应用题,以及与其他知识综合交汇的能力题,重点考查考生的逻辑推理能力、基本运算能力和综合解决问题的能力,考查等价转化、函数与方程、分类讨论、数形结合、待定系数法、配方法、换元法、构造法等数学思想方法.

应用意识的体现与求导方法的灵活运用是高考考查导数的主要特点.导数知识的引入,给函数试题的命制增添了活力.近年的高考试题中与导数知识方法有关的分值均占20分左右,其特点是:以填空、选择题形式考查导数的概念,求函数的导数,单调区间,函数极值,最值及切线方程;利用导数的几何意义构建切线与其他曲线形成的几何图形的面积函数,再求最值;以函数单调性的导数定义为载体,考查解不等式的能力;利用导数解决实际问题中的最值或不等式的综合问题,为中档偏难题.

考点题型再现与分析

考点1:函数的基本概念

函数的基本概念包括函数"三要素"、函数图象等,求函数定义域与解析式是每年必考的内容,函数的图象是函数的直观体现,运用函数的图象研究函数的性质非常方便.函数的图象正成为高考命题的热点之一,解这类题要把图象和性质结合起来思考,注意双向交流对比.

1.函数的表示

【例1】若对于任意的$x\in[a,b]$,函数$f(x)$、$g(x)$满足$\left|\dfrac{f(x)-g(x)}{f(x)}\right|\leqslant\dfrac{1}{10}$,则称在$[a,b]$上$g(x)$可以替代$f(x)$.若$f(x)=\sqrt{x}$,则下列函数中可以在$[4,6]$上替代$f(x)$的是　　(　　)

(A)$g(x)=x-2$.　　(B)$g(x)=\dfrac{x}{4}$.

(C)$g(x)=\dfrac{x+6}{5}$.　　(D)$g(x)=2x-6$.

【分析】对四个选项,逐个验证不等式$\left|\dfrac{f(x)-g(x)}{f(x)}\right|\leqslant\dfrac{1}{10}$.

【解析】对于(C).$f(x)-g(x)=\sqrt{x}-\dfrac{x+6}{5}$

$=-\dfrac{1}{5}(\sqrt{x}^2-5\sqrt{x}+6)=-\dfrac{1}{5}(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)$

故当$\sqrt{x}\in(2,3)$即$x\in(4,9)$时有$f(x)-g(x)>0$.

$\therefore f(x)>g(x)$.

又$\dfrac{g(x)}{f(x)}=\dfrac{x+6}{5\sqrt{x}}\geqslant\dfrac{2\sqrt{6x}}{5\sqrt{x}}=\dfrac{2\sqrt{6}}{5}$.

$\therefore\left|\dfrac{f(x)-g(x)}{f(x)}\right|=\dfrac{f(x)-g(x)}{f(x)}=1-\dfrac{g(x)}{f(x)}$

$\leqslant1-\dfrac{2\sqrt{6}}{5}<\dfrac{1}{10}$,

即$\left|\dfrac{f(x)-g(x)}{f(x)}\right|\leqslant\dfrac{1}{10}$成立.故选C.

【答案】C

【点评】在$[a,b]$上$g(x)$不可替代$f(x)\Leftrightarrow$存在$x_0\in[a,b]$,使得$\left|\dfrac{f(x_0)-g(x_0)}{f(x_0)}\right|>\dfrac{1}{10}$.本题还可取$x=6$.用特值法求解.

【备选题1】现代社会对破译密码的难度要求越来越高.有一种密码把英文的明文(真实文)按字母分解,其中英文的$a,b,c,\cdots,z$的26个字母(不论大小写)依次对应1,2,3,…,26这26个自然数(见下表):

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26

给出如下一个变换公式：

$$x'=\begin{cases}\dfrac{x+1}{2}(x\in\mathbf{N},1\leqslant x\leqslant 26,x\text{ 不能被 2 整除}),\\[2ex] \dfrac{x}{2}+13(x\in\mathbf{N},1\leqslant x\leqslant 26,x\text{ 能被 2 整除}).\end{cases}$$

如：将明文转换成密文，如 $8\rightarrow\frac{8}{2}+13=17$，即 h 变成 q；$5\rightarrow\frac{5+1}{2}=3$，即 e 变成 c.

按上述规定，若将某明文译成的密文是 $shxc$，那么原来的明文是　　（　　）

(A) $lhho$.　(B) $ohhl$.　(C) $love$.　(D) $eovl$.

2. 函数的定义域和解析式

【例 2】已知二次函数 $f(x)=ax^2+bx+a$ 满足条件 $f(\frac{7}{4}+x)=f(\frac{7}{4}-x)$，且方程 $f(x)=7x+a$ 有两个相等的实数根.

(1)求 $f(x)$ 的解析式；

(2)是否存在实数 m、$n(0<m<n)$，使 $f(x)$ 的定义域为 $[m,n]$，值域为 $[\frac{3}{n},\frac{3}{m}]$？若存在，求出 m、n 的值；若不存在，请说明理由.

【分析】对于题(1)，先确定 $f(x)$ 图象的对称轴，再结合方程有两个相等的实数根即 $\Delta=0$，求出系数 a，b. 题(2)中隐含着函数 $g(x)=\frac{3}{x}$，关键是求出 $f(x)$ 与 $g(x)$ 图象的交点的横坐标.

【解析】(1)由 $f(\frac{7}{4}+x)=f(\frac{7}{4}-x)$，知 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{7}{4}$ 对称，则 $b=-\frac{7}{2}a$，有 $f(x)=ax^2-\frac{7}{2}ax+a$.

又方程 $ax^2-(\frac{7}{2}a+7)x=0$ 有等根，

则 $\Delta=(\frac{7}{2}a+7)^2=0$，

$\therefore a=-2$，故 $f(x)=-2x^2+7x-2$.

(2)设 $g(x)=\frac{3}{x}(x>0)$，则由 $f(x)=g(x)$，

得 $x_1=1$，$x_2=3$.

当 $x\in[1,3]$ 时，$f(x)$ 的值域为 $[1,\frac{33}{8}]$.

又当 $x=\frac{8}{11}$ 时，

$f(x)=f(\frac{8}{11})=-2\times(\frac{8}{11})^2+7\times\frac{8}{11}-2$

$=-2\times\frac{64}{121}+\frac{56}{11}-2$

$=\frac{-128+616-22}{121}=\frac{466}{121}\in[1,\frac{33}{8}]$.

故取 $m=\frac{8}{11}$，$n=3$ 时，$f(x)$ 在 $[\frac{8}{11},3]$ 上的值域为 $[1,\frac{33}{8}]$.

【点评】一般地，对于函数 $y=f(x)$，若存在 $a,b\in\mathbf{R}$，使得对定义域中的任意实数 x，均有 $f(a+x)=f(b-x)$，则函数 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{a+b}{2}$ 对称.

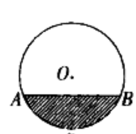
【备选题 2】已知函数 $f(x)=\log_2\frac{x+1}{x-1}+\log_2(x-1)+\log_2(p-x)$，

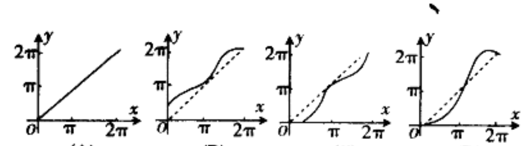
(1)求 $f(x)$ 的定义域；

(2)求 $f(x)$ 的值域.

3. 函数的图象

【例 3】如图所示，单位圆中弧 $\overset{\frown}{AB}$ 的长为 x，$f(x)$ 表示弧 $\overset{\frown}{AB}$ 与弦 AB 所围成的弓形面积的 2 倍，则函数 $y=f(x)$ 的图象是　　（　　）





(A)　(B)　(C)　(D)

【分析】先求出 $y=f(x)$ 的表达方式，再结合选项确定 $f(x)$ 的图象.

【解析】连结 OA、OB，易知 $f(x)=x-\sin x$，

$f(\frac{\pi}{2})=\frac{\pi}{2}-1<\frac{\pi}{2}$，$f(\frac{3\pi}{2})=\frac{3\pi}{2}+1>\frac{3\pi}{2}$.

【答案】D

【点评】本题也可以从定性的角度来考虑（不求

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com