数学在你身边

Mathematics all around

罗晓芳 编著

科学出版社
www.sciencep.com

数学在你身边

罗晓芳 编著

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书以浅显有趣的语言，通过选举、瓷砖拼装、人口增长等贴近生活的数学实例，阐述了数学在人们身边的应用及数学与社会科学等其他科学的联系，并介绍了当代数学的一些重大成果及其应用。

本书实例丰富、通俗易懂，适合中学生、大学生和数学爱好者阅读。

图书在版编目(CIP)数据

数学在你身边/罗晓芳编著. —北京：科学出版社，2007
ISBN 978-7-03-020000-6

Ⅰ.数…　Ⅱ.罗…　Ⅲ.数学-普及读物　Ⅳ. O1-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 153624 号

责任编辑：莫单玉　陈玉琢/责任校对：陈丽珠
责任印制：赵德静/封面设计：王　浩

科学出版社出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

新蕾印刷厂印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2007 年 8 月第　一　版　　开本：A5(890×1240)
2007 年 8 月第一次印刷　　印张：6 1/2
印数：1—2 500　　字数：241 000

定价：28.00 元

前　言

数学,这门古老而又常新的科学,已阔步迈进了 21 世纪。

回顾过去的一个世纪,数学科学有了巨大发展,数学比以往任何时候都更牢固地确立了它作为整个科学技术基础的地位。数学正突破传统的应用范围向几乎所有的知识领域渗透,并越来越直接地为人类物质生产与日常生活作出贡献。同时,数学作为一种文化,已成为人类文明进步的标志。因此,对于每一个有文化的人士而言,不论他从事何种职业,都需要学习数学、了解数学和运用数学。现代社会对数学的这种需要,在 21 世纪中无疑将与日俱增。

一般说来,一个国家数学普及的程度与该国数学发展的水平相应,并且是数学水平提高的基础。随着中国现代数学研究与数学教育的长足进步,数学普及工作在我国也越来越受到重视。早在 20 世纪 60 年代,华罗庚、吴文俊等一批数学家撰写的数学通俗读物激发了一代青少年学习数学的兴趣,影响绵延至今。改革开放以来,我国数学界对传播现代数学又作出了新的努力。但总体来说,我国的数学普及工作与发达国家相比尚有差距。我国数学要达到世界先进水平,数学普及与传播乃是重要的环节和迫切的任务,同时还要借鉴外国的先进经验。

数学是什么？这是数学家不能回避,必须向社会公众回答的问题。一个数学家不仅要在数学方面有所建树,更要有一种社会关怀,有一种强烈的使命感,向公众诠释数学,使公众理解他们的工作。数学家无需把自己装扮成居高临下、神秘莫测的霸主,数学也不应该是一群数学家玩弄数字游戏的桃花源。在欧美等西方发达国家,许多大牌数学家都自觉地承担科学普及工作,一些数学家还义务为中学生举办数学讲座。1982 年在华沙国际数学家大会(简称 ICM,每四年一次)上,德国数学家达韦诺夫就提出“为大众的数学”的口号。这一口号蕴涵两层含义:其一是数学教育必须顾及所有人的需求,使每个人在数学教育中得益;

其二是指不同的人可以达到不同的水平，但数学教育存在一个人人都能达到的水平。西方国家不少数学家投入了这场运动，纷纷为中学生开设数学讲座。

数学的普及，并不是要求每个人都去从事数学职业，做数学家。数学的普及是向公众诠释数学家的工作意义，数学对其他科学起的基础作用，以及数学内在的价值。

本书没有深奥的数学理论，不能使你学到许多纯数学知识，但它却能激发你学习数学的兴趣，把你引入数学殿堂。本书内容分门别类：有的深入浅出介绍当代数学的重大成就与应用；有的循循善诱启迪数学思维与发现技巧；有的富于哲理阐述数学与自然或其他科学的联系……试图为人们提供全新的观察视角，以窥探现代数学的发展概貌，领略数学文化的丰富多彩，让数学成为我们国人文化的一部分，让人们用数学的眼光体味自然、社会的和谐与简洁！

本书适当纳入了不同层次的作品，以使包括中学生、大学生及教师，一般科技工作者等在内的广大读者都能开卷有益，即使是对于专业数学工作者或普通民众，本书部分内容也是值得一读的。

作者编写本书参考了一些中外知名专家的著作，并得到了贾少华、万成荣、龚景中、张旭亮、张胜兵等老师的帮助，他们提出了许多宝贵的意见，使本书更加完善，在此一并致谢。

由于作者水平有限，错误和不足在所难免，敬请广大读者批评指正。

罗晓芳

2007.4.20

目　录

1　日常生活中的数据处理

数据伴随我们终生. 从出生的那天起,每个人的生日就是一个数据;每个中国人都有一个固定的身份证号;银行的账号、信用卡、电话磁卡等,都是一组数据;学校考试,结果是数据;到商店买东西,货物条形码、购货的数量、价格也都是数据. 在数字化的世界里,许多信息都已经数据化了.

大众数学,曾是人们的一种教育理想. 在15世纪,文艺复兴之后,算术是人人都要学会的数学技能. 一个人不会算术,就无法在社会上生存. 到了18,19世纪,大家认为在工业化社会里,代数、几何、三角大概是人人必须掌握的. 可是,时至今日似乎还没有做到. 那么,在21世纪,人人都必需的数学究竟是哪些?对现代公民来说,最重要的数学知识和技能是什么?美国芝加哥大学的Z.尤什斯金认为,数据处理是最基本的内容之一,它比解方程和证几何题的要求更为基本.

1.1　数据的代表数:去掉最高分和最低分

生活中到处出现数据. 例如,班上每人的数学测验成绩;排球赛各个队的得分数;某工厂工人的工资;各种牌号牙膏的日销量;100只电灯各自的寿命等. 摆在我们面前的是一串数字,但是光靠这一串数字还不能直接得出结论,往往需要进一步分析,从中提取有用的信息.

在上述例子中,我们常说:"我们班数学成绩平均为82分","上场的6名排球队员每人平均得分为6.2分","某工厂职工的日平均工资为67元","大约10人中有5人喜欢某品牌牙膏","灯泡寿命约为1000小时". 这里的82,6.2,67,$\frac{5}{10}$,1000等数字,就是根据原始数据(许多数字的集合)选出来的一个"代表数". 这些代表数,反映并且标

志这些数字集合具有的“水平”,供我们作决断时参考.

那么怎样选取代表数呢?通常我们选取平均数. 例如全班 30 人,第 k 个同学的数学成绩为 x_k 分,这时全班同学的数学考试水平就用算术平均数来代表.

$$\bar{x}=\frac{1}{30}(x_1+x_2+\cdots+x_k+\cdots+x_{30}).$$

算术平均数虽然具有很高的代表性,但不是唯一的,而且还有一些缺点和局限. 我们还可以引进其他的代表数及方法.

先看体操比赛的例子. 在体操比赛中,当一个运动员做完一套动作后,4 个裁判分别给出 4 个评分. 那么如何根据这 4 个评分,定出一个足以代表该运动员水平的分数呢? 如果 4 个裁判的评分都一样,例如都是 10 分,那么该运动员无疑应得 10 分. 但是通常 4 个裁判的评分是不一样的,例如 4 个评分依次为:

$$8.6,9.4,9.6,9.9.$$

按常规,我们取它们的平均数,此时应为 9.375 分. 但是这时比赛场记分牌显示的却是 9.5 分. 这是什么原因?

原来,按体操竞赛规则,评分时应将 4 个裁判的打分依小到大排列,删除首尾两数,然后将中间两数取平均数. 这个数称为这 4 个数据的中位数. 在上述例子中,中位数是 9.5. 这就是记分牌上显示 9.5 分的来历. 这种评分方法,可以避免个别裁判误判以及有意偏袒或压低的情况. 例如在上述数据中,8.6 分是异常值,过分压低了,9.9 分则可能反映个别裁判的爱好. 将它们删除后,评分就比较公正了.

中位数的一般定义如下:设有 n 个数据,将它们从小到大依次排列为:

$$x_1,x_2,\cdots,x_k,\cdots,x_n.$$

如果 n 是奇数,则第 $\frac{n+1}{2}$ 项的值即为中位数;如果 n 是偶数,则取第 $\frac{n}{2}$ 项和第 $\frac{n}{2}+1$ 项的值作算术平均,以此数作为中位数. 例如:

(1) 有 9 个数据. 如 6.0,6.5,6.6,6.6,6.65,6.7,6.8,6.8,8.0,则取第 5 个数据 6.65 作为中位数.

(2) 有 10 个数据. 设除上述 9 个数据外,再增一个数据 9,则应取第 5 个和第 6 个数据的平均值$\frac{1}{2}(6.65+6.7)=6.675$ 作为中位数.

中位数的特征是它处于几个数据依大小次序排列后的中间位置,即大于此数的数据个数和小于此数的数据个数一样多. 中位数的优越性是不受个别特异值的影响. 此外,与求算术平均数相比,不需要作繁琐的计算.

中位数是真正代表"中等水平"的,而一般的平均数有时并不能反映出"中等水平"来. 例如某班有 30 人,有两位同学成绩很差,只得了 10 分,5 位同学得 90 分,22 位同学得 80 分,某同学得了 78 分. 这 30 个人的平均分数是

$$\frac{1}{30}(2\times 10+5\times 90+22\times 80+78)=\frac{1}{30}\times 2308=76.9.$$

如果以平均数 76.9 分为代表数,那么某同学得了 78 分岂不是中等偏上,属中上水平了吗? 但是,这位同学在班上是倒数第 3 名! 如果取中位数,那么这 30 个数据中第 15 位和第 16 位都是 80 分,中位数是 80,得 78 分只能是中等偏下,这就比较真实地反映了客观情况.

除了中位数外,还可选择众数作为代表数,即数据中重复出现次数最多的那个数据. 例如全班 30 人所穿鞋子的尺码如下.

尺码号	33	34	35	36	37
穿该号码的人数	5	6	15	3	1

用什么数来代表全班所穿鞋子的尺码? 如取平均数,得到平均尺码约为 34.63 码. 如取众数,则取班上同学穿得最多的那个尺码——35 码(有 15 个人穿). 显然,35 比 34.63 更有代表性. 这是因为市场上并不生产 34.63 码的鞋,此数值参考意义不大,而 35 码这个数却有重要意义. 例如一家鞋店如果拿 35 码的鞋到该班来推销,自然是最有销路的.

众数往往作为反映一般水平的标志. 例如本班同学成绩大多在 70~80 分这一段;在各种牙膏中 A 型最受人喜爱;新发行的 10 张唱片

中,第 7 号最受欢迎;一场篮球赛中,得 10 分的队员最多等. 通常的"最佳"、"最受欢迎"、"最畅销"等都是用投票法取众数得到的,它反映人们最普遍的倾向,因而有广泛的应用.

上面介绍了三种代表数:平均数、中位数和众数. 让我们来考虑下面的例子,不同的人从不同的角度会选取不同的代表数.

例 1.1　某厂职工的月工资情况如下:

月工资数(元)	得此工资的人数
10000	1(总经理)
7000	2(副经理)
5000	2(助理)
3000	5
2000	12
1200	18
1000	23
800	5
600	2

那么如何来选取代表数,即如何用一个数字来标志该厂职工的月工资?经计算,平均数约为 1754 元,中位数为 1200 元,众数为 1000 元. 工厂主为了说明本厂工资水平高,自然用平均数 1754 元. 但是达到此水平以上的人数只有 10 人,少数人的高工资提高了平均工资数的水平. 工会领导人则说,工人月工资为 1000 元,因为拿 1000 元的人最多,最有代表性. 而税务官则采用中位数,他认为征收所得税时应当了解目前的税率对多数职工有利还是不利,因而中位数最有代表性. 这样一来,三种代表数各有各的用处,各有各的目的. 我们在研究某些统计数据的时候,一定要注意到这一点.

现在让我们总结一下这三种代表数的优缺点.

(1) 算术平均数通常使用最广,它可以用公式表示,且考虑每个因子提供的数量信息,因而最能标志数据集中的趋势. 其缺点是容易受异常数值的影响,以至失去代表性.

(2) 中位数只和数据所处的位置有关,不受特大或特小的异常数值的影响,计算简单,往往一眼就能看出来,且最能反映中等水平. 不

过如果数据明显地在中位数附近密集，而且重复次数很高，就会形成中位数不在中间的情形．例如，1，1，1，2，2，2，2，2，4 这 9 个数据，中位数是 2，这时就很难说它代表中间状态了．另外中位数没有公式可计算，不能反映许多数值提供的全部数量信息，这是埋伏着的缺点．

(3) 众数由于出现频率最高，常被人们采用．尤其在评"最佳"的时候，总以得票最多为依据．不过众数只讲频率，不讲数值大小，有和中位数一样的缺点．特别是当有多个数据出现频率一样的时候(并列第 1 名)，就很难选择众数了．

最后，我们列出一批数据，请大家根据需要，挑选适当的代表数．

(1) 在一个 20 人的班级中，他们在某学期出勤的天数是：7 人未缺课，6 人缺课 1 天，4 人缺课 2 天，2 人缺课 3 天，1 人缺课 90 天．试确定该班学生该学期的缺课天数．

(2) 确定你所在班级中同学身高的代表数，如果是为了：①体格检查，②服装推销．

(3) 一个生产小组有 15 个工人，每人每天生产某零件数目是 6，6，7，7，7，8，8，8，8，8，9，11，12，12，18．欲使多数人超额生产，每日生产定额(标准日产量)应为多少？

(提示：(1)取中位数；(2)①取平均数，②取众数；(3)取中位数．)

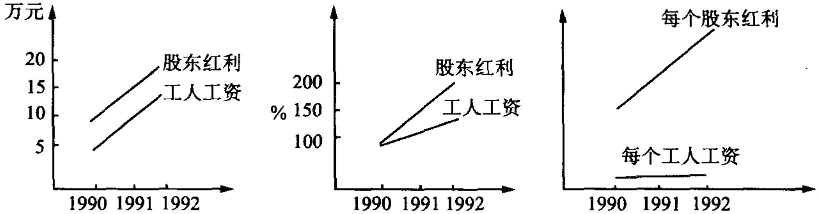
1.2 数据的运用："公说公有理，婆说婆有理"

香港的中学数学教材里有这样一节，名为"公说公有理，婆说婆有理"．数学教材里有这样的标题，在大陆十分罕见．在一些人看来，数学应该板起面孔才是．让我们来看其内容．

某企业有 5 位股东，100 名工人．1990，1991，1992 三年的利润分配情况是：

年份	工资总额(万元)	股东红利(万元)
1990	10	5
1991	12.5	7.5
1992	15	10

在企业从业人员大会上，股东老板上台画了一张图（见图 1.1(a)），标题是“有福共享，有难同当”．图上是两条平行线．三年来工资和股东红利都增加了 5 万元，劳资双方的利益同步增加．



(a) 老板所画　(b) 工会主席所画　(c) 某工人所画

图 1.1

但是，工会的负责人说，我也来画一张图（见图 1.1(b)）．大家都以 1990 年为基础，定为 100%．三年来，工资总额从 10 万元到 15 万元，增长了 50%，而股红却从 5 万元到 10 万元，增长了 100%，翻了一番．所以，工资增长速度赶不上股东红利速度，今后应当多加工资．

一位工人的发言指出，每个工人的平均工资从 1000 元增加到 1500 元，股东红利从 1 万元增至 2 万元．我也画一个图（见图 1.1(c)）．一个太高，一个太低，工人工资应该多多增加．

请大家注意，香港特别行政区实行“一国两制”，过去和现在都是实行资本主义制度．所以，这节数学课的标题是“公说公有理，婆说婆有理”，大家都有理．至于如何处理不同意见，那是劳资协商的问题了．

令人深思的是，在江苏某地师范院校附中高一的测验中，全班 40 人所画的图，竟然全都是图 1.1(a)：两条平行线．这也难怪学生，因为我们的数学教材中从来只有把图表转换为函数图像的一种画法，而很少用数据处理．

1.3 把报纸上的数据和图表读懂

以下是一组从报纸、杂志和现实生活中选出来的问题．

1.3.1 房地产广告

《新民晚报》1993 年 1 月 24 日登载一则房地产广告，如图 1.2 所示. 请回答下列问题：

(1) 大约在哪几年，日本和中国台湾的价值变化率相同？

(2) 1980 年后，日本和中国台湾的价值上升率谁快？

(3) 中国台湾的价值变化率上升最快的是哪几年？

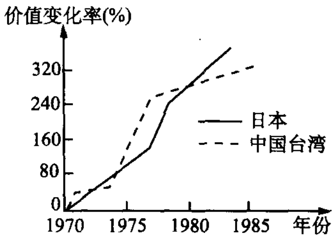


图 1.2 房地产价值变化示意图

解 (1) 1973，1974 和 1980 三年.

(2) 日本.

(3) 1974 年至 1977 年之间.

说明 社会主义市场经济的发展，要求我们经常从报刊、杂志、电视等新闻媒介中获取大量有用信息，而数据、表格和图表是最常见的形式.

1.3.2 价格与成交量趋势图

图 1.3 为上海物资贸易中心信息部提供的一份上海金属期货市场 1＃电解镍价格与成交量趋势图，原载 1993 年 4 月 5 日《解放日报》. 请从图中读出下列数字(近似数)：

(1) 最大成交量和最小成交量；

(2) 最高价格和最低价格；

(3) 从图中判断以下断言是否正确：

A 平均成交量大于 2500 吨；

B 平均价格低于 58000 元；

C 1 月 8 日至 1 月 13 日价格下跌最快；

D 成交量大时价格必然高；

E 1 月 23 日春节期间成交量最低；

F 成交量的第二个高峰产生于低价格时；

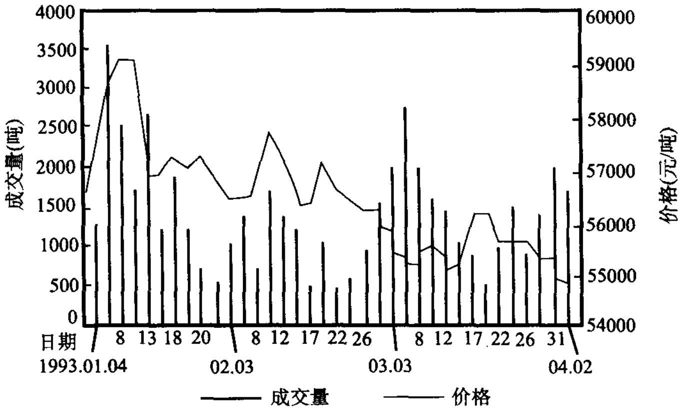


图 1.3　上海金属期货市场 1# 电解镍价格与成交量趋势图

（起止时间：1993 年 1 月 4 日～1993 年 4 月 2 日）

G 价格的总趋势呈下降态势；

H 成交量的趋势呈波浪形.

解　(1),(2)由读者据图 1.3 读出.

(3) A 错;B 对;C 对;D 错;E 错;F 对;G 对:H 对.

1.3.3　股市走势图

1993 年 1 月 24 日《文汇报》登载了一幅根据深圳大学股票分析智能系统 TSAS3.0 绘制的上海股市走势图(图 1.4),请从图中提供下列信息:

(1) 从 1992 年 5 月 21 日到 1993 年 1 月 22 日之间,大约在何时上海指数处于最高峰? 最高峰值是多少? 大约何时处于最低谷? 最低指数是多少?

(2) 成交量何时最高,其成交股数是多少? 指数最高的时候其成交量是多少?

(3) 11 月 23 日到 12 月 8 日的半个月内指数上升最快,试测算这段时期的日平均增长率.

解　(1) 约在 5 月下旬达到最高指数约 1440 点,在 11 月 23 日左

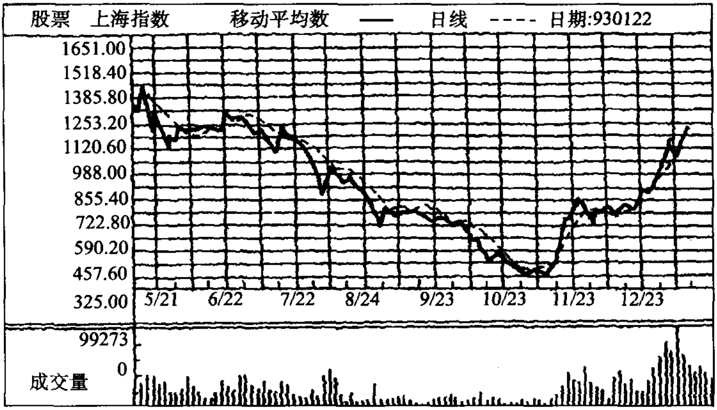


图 1.4 上海股市走势图

右达到最低指数约 440 点.

(2) 成交量在 12 月 25 日至年底的某天达到最大值 99273 股. 在指数最高的 5 月下旬,成交量约为 4.3 万股.

(3) 从图中估算,11 月 23 日为最低指数 391.30 点,12 月 8 日约为 830 点. 故日增长率为:

$$(830 - 391.30) \div 15 \approx 29.25(\text{点} / \text{天}).$$

说明 股票将会成为未来经济生活中一个重要部分. 股市走势图公之于报刊,乃是“大众数学”的组成部分.

图 1.4 直接取自计算机荧屏,不甚清晰,但可供大致地估算、了解股市的走向,由图表得到信息,应注意单位,善于捕捉各种信息来源,提出有价值的问题. 此题是开放性的,读者可根据图表提出其他问题进行研究.

我国教材中的函数图像,都是有解析式的,对这种实际的函数图很少接触,但实际应用很多,值得重视.

1.3.4 有奖销售

1993 年 4 月 1 日上海《新民晚报》刊登一则有奖销售广告(见图 1.5). 计算奖品总金额占销售总额的比例,并与该公司若实行 9.8 折