全国煤炭高职高专“十一五”规划教材

测量平差

主编 纪奕君

煤炭工业出版社

全国煤炭高职高专“十一五”规划教材

测量平差

主　编　纪奕君
副主编　宋太江

煤炭工业出版社
·北　京·

内 容 提 要

全书共分六章。前三章是测量平差基础部分，包括观测误差、精度指标、方差传播率、协因数传播率、最小二乘原理、间接平差、直接平差和条件平差等；第四章为误差椭圆；第五章为法方程式的解算方法，包括高斯消去法、三角分解法、三角分解求逆法和迭代法等解算方法；第六章为平差应用算例，包括测量平差的计算表格、水准网平差算例、三角网平差算例和导线网平差算例。

本书为全国煤炭高职高专工程测量专业“十一五”规划教材，也可作为测量及其相关专业工程技术人员和自学者参考用书。

图书在版编目(CIP)数据

测量平差/纪奕君主编.—北京：煤炭工业出版社，2007.6

全国煤炭高职高专“十一五”规划教材

ISBN 978-7-5020-3077-3

Ⅰ.测… Ⅱ.纪… Ⅲ.测量平差-高等学校：技术学校-教材 Ⅳ.P207

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 054898 号

煤炭工业出版社 出版
(北京市朝阳区芍药居 35 号 100029)
网址：www.cciph.com.cn
北京京科印刷有限公司 印刷
新华书店北京发行所 发行
*
开本 787mm×1092mm 1/16 印张 12
字数 285 千字 印数 1—5,000
2007 年 6 月第 1 版 2007 年 6 月第 1 次印刷
社内编号 5878 定价 22.00 元

全国煤炭高职高专工程测量技术类“十一五”规划教材

编审委员会

前　言

本书是全国煤炭高职高专工程测量技术专业“十一五”规划教材，由中国煤炭教育协会和中国矿业大学(北京)教材编审室共同组织编写。是根据2006年5月煤炭高等职业教育教材工作会议精神，按照全国煤炭高等职业教育工程测量技术专业规划教材专家编审委员会通过的《测量平差》教材编写提纲的要求编写的。

由于近年来，测量误差理论与数据处理方法产生了飞速发展，从只对偶然误差的分析处理到顾及系统误差、粗差的综合分析与处理；从独立观测值误差传播到广义误差传播；从传统的平差方法到近代平差方法；从以表格手工计算为主到以计算机计算为主等方面都有长足的发展和进步。另外，通过几年来的高职教学实践，笔者认为高职教育在理论上够用为度的前提下，应更加突出对学生动手能力的培养。因此对《测量平差》课程的教学改革是非常必要的，为满足高等职业教育工程测量技术专业新的教学体系需要，我们对传统的教材内容进行了较大的调整。

本书在内容上突出了两个基本，一个能力。即用较通俗的数学知识描述了测量平差的基本理论和基本方法；增加了大量的例题，以提高动手能力的培养。此外，本书与现有平差教材相比，增加了法方程解算方法一章，较详细介绍了法方程解算的理论和方法。这样，既可以使学生得到手工计算的训练，更主要的是为编写平差计算程序奠定了基础。

本书由纪奕君任主编，宋太江任副主编。具体分工：辽宁工程技术大学职业技术学院纪奕君编写绪论、第四章、第五章和第六章；重庆工程职业技术学院宋太江编写第三章；北京工业职业技术学院辛星编写第一章；山西煤炭职业技术学院曹海春编写第二章。全书由纪奕君统稿并定稿，由中国矿业大学(北京)戴华阳教授主审。

在本书的编写过程中，参阅了大量文献资料，引用了同类书刊中的部分内容与算例，在此谨向有关作者表示衷心感谢！

由于作者的水平有限，书中如有不妥与错误之处，恳请使用本教材的教师和广大读者提出宝贵意见，以便再版时修正。

编　者

2007年3月

目　　录

绪　论

测量平差是测绘专业的技术基础课，该课程的学习好坏不仅直接影响其他专业课程的学习质量，而且有可能影响到学习者今后在生产、科研上的自身成就和发展。要学好本课程，首先应明确测量平差的目的和任务。

测量平差的研究对象是观测数据，研究的目的是为各类观测数据的处理提供原则和方法。观测数据来源于外业观测（或称为信息采集），不可避免地会受到测量仪器、观测者和外界条件等诸方面的影响，使之与实际值存在差异，即存在观测误差。因此，要想学好测量平差，应先了解观测误差。

一、观测条件与观测误差

观测值是通过观测得到的测量信息。任何观测值，客观上总存在一个能反映其真实大小的数值，这个数值称为观测量的真值。然而，一个量的真值一般是得不到的，因为观测中不可避免地要存在误差，这一点可以通过对某一量进行多次重复观测或对某一几何图形进行观测就可以得到证实。例如，对某一段高差或某一距离或某一角度重复观测若干次，会发现各量重复观测值间均存在差异。再如，对某平面三角形的三内角进行观测，你会发现三个观测角之和与其理论值 180°存在差异。这些差异说明了观测误差的存在，因为，如果不存在观测误差，同一量的若干次观测值应相等，即都等于其真值，三角形三内角的观测值之和当然应等于内角和的理论值。

观测误差产生的原因很多，概括起来有以下三个方面：

1. 测量仪器

测量工作通常是利用测量仪器进行的。由于每一种仪器具有一定限度的精密度。因而使观测值的精密度受到了一定的限制。例如，丈量长度的各种各样的尺子，它们的格值都会含有误差，所标记的长度并不是真长，因此，用这些尺子量得的长度就不是真长。又如，水准仪的视准轴不平行于水准管轴时，在水准尺上的读数将会产生误差，而且这个误差将随着水准仪距水准尺的距离的增大而增大。同样，经纬仪、GPS、全站仪等测量仪器的误差也使测量结果产生误差。

2. 观测者

由于观测者的感觉器官的鉴别能力有一定的局限性，所以在仪器的安置、照准、读数等方面都会产生误差。同时，观测者的工作态度和技术水平，也是对观测成果质量有直接影响的重要因素。

3. 外界条件

观测时所处的外界条件，如温度、湿度、风力、大气折光等因素都会对观测结果直接产生影响；同时随着温度的高低及湿度的大小、风力的强弱以及大气折光的不同，它们对观测结果的影响也随之不同。因而，在这样的客观环境下进行观测，就必然使观测的结果产生误

差。

上述测量仪器、观测者、外界条件三个方面的因素是引起误差的主要来源。把这三方面的因素综合起来称为观测条件。不难想像,观测条件的好坏与观测成果的质量有着密切的联系,观测条件较好则观测成果的质量较高,观测条件较差则观测成果的质量较低,观测条件相同则观测成果的质量也相同。所以,观测成果的质量高低也就客观地反映了观测条件的优劣。

但是,不管观测条件如何,在整个观测过程中,由于受上述种种因素的影响,观测的结果总会产生这样或那样的误差。当然,在客观条件允许的范围内,测量工作者必须确保观测成果具有较高的质量。

二、观测误差的分类

根据观测误差的来源与对观测结果的影响性质,可将观测误差分为系统误差、偶然误差和粗差三种。

1. *系统误差*

在相同的观测条件下,作一系列的观测,如果误差在大小、符号上表现出系统性,或者在观测过程中按一定的规律变化,或者为某一常数,那么,这种误差就称为系统误差。

例如,用具有某一尺长误差的钢尺量距时,由于尺长误差所引起的距离误差与所测距离的长度成正比地增加,距离越长,所积累的误差也越大;经纬仪因校正或整置的不完善而使所测角度产生误差;等等。这些都是由于仪器不完善或工作前未经检验校正而产生的系统误差。又如,用钢尺量距时的温度与检定尺子时的温度不一致,而使所测的距离产生误差;测角时因大气折光的影响而产生的角度误差等等,这些都是由于外界条件所引起的系统误差。此外,如某些观测者在照准目标时,总是习惯于把望远镜十字丝对准目标中央的某一侧,也会使观测结果带有系统误差。

2. *偶然误差*

在相同的观测条件下,作一系列的观测,如果误差在大小和符号上都表现出偶然性,即从单个误差看,该系列误差的大小和符号没有规律性,但就大量误差的总体而言,具有一定的统计规律,这种误差称为偶然误差。

例如,在用经纬仪测角时,误差是由照准误差、读数误差、外界条件变化所引起的误差、仪器本身不完善而引起的误差等综合的结果。而其中每一项误差又是由许多偶然(随机)因素所引起的小误差的代数和。例如,照准误差可能是由于脚架或觇标的晃动或扭转、风力,风向的变化、目标的背影、大气折光和大气透明度等偶然因素影响而产生的小误差的代数和。因此,测角误差实际上是许许多多微小误差项的和,而每项微小误差又随着偶然因素的影响不断变化,其数值忽大忽小,其符号或正或负,这样,由它们所构成的总和,就某个体而言,无论是数值的大小或符号的正负都是不能事先预知的,因此,把这种性质的误差称为偶然误差。

3. *粗差*

粗差是一种大量级的观测误差,它是测量上的失误。在测量成果中,是不允许粗差存在的。

粗差产生的原因较多,主要是作业员疏忽大意、失职而引起的,如大数被读错、读数被记录员记错、照错目标等。

在观测数据中应尽可能设法避免出现粗差。行之有效的发现粗差的方法有:进行必要的重复观测;通过多余观测,采用必要而又严格的检核、验算等方式均可发现粗差。国家测绘机构制定的各类测量规范和细则,一般也能起到防止粗差出现和发现粗差的作用。

含有粗差的观测值都不能采用。因此,一旦发现粗差,该观测值必须舍去或重测。尽管测量者十分小心谨慎,粗差有时仍然在所难免。因此,如何在大量的观测数据中发现和剔除粗差,或在数据处理中削弱含粗差的观测值对平差计算结果的影响,乃是测绘界十分关注的课题之一。

系统误差和偶然误差在观测过程中总是同时产生的。当观测值中有显著的系统误差时,偶然误差就居于次要地位,观测误差就呈现出系统的性质,反之,则呈现出偶然的性质。

系统误差对于观测结果的影响一般具有积累的作用,它对成果质量的影响也特别显著。在实际工作中,应该采用各种方法来消除系统误差,或者减小其对观测成果的影响,达到实际上可以忽略不计的程度。例如,在进行水准测量时,使前、后视距相等,以消除视准轴不平行于水准管轴对观测高差所引起的系统误差;对量距用的钢尺预先进行检定,求出尺长误差的大小,对所量的距离进行尺长改正,以消除由于尺长误差对量距所引起的系统误差等,都是消除系统误差的方法。

当观测列中已经排除了系统误差的影响,或者与偶然误差相比已处于次要地位,则该观测列中主要是存在着偶然误差。这样的观测列称为带有偶然误差的观测列。这样观测结果和偶然误差便都是一些随机变量,如何处理这些随机变量,是测量平差这一学科所要研究的内容。

由于观测结果不可避免地存在着偶然误差的影响,因此在实际工作中,为了提高成果的质量,同时也为检查和及时发现观测值中有无粗差存在,通常要使观测值的个数多于未知量的个数,也就是要进行多余观测。例如,对一条导线边,丈量一次就可得其长度,但实际上总要丈量两次或两次以上;一个平面三角形,只需观测其中两个内角,即可决定它的形状,但通常是观测三个内角。由于偶然误差的存在,通过多余观测必然会发现在观测结果之间不相一致,或不符合应有关系而产生的不符值。因此,必须对这些带有偶然误差的观测值进行处理,使得消除不符值后的结果,可以认为是观测量的最可靠的结果。由于这些带有偶然误差的观测值是一些随机变量,因此,可以根据概率统计的方法来求出观测量最可靠结果,这就是测量平差的一个主要任务。

测量平差的另一项任务,就是评定观测值及其函数的最可靠结果的精度,也就是考核测量结果的质量。人们把这一数据处理的整个过程叫做“测量平差”。概括起来讲,测量平差有两大任务:一是通过数据处理求待定量的最佳估值;二是评估观测成果的质量。

思考题与习题

0-1　什么叫观测误差?观测误差给观测结果带来什么影响?

0-2　产生观测误差的原因有哪些?

0-3　观测条件是由哪些因素构成的?它与观测结果的质量有什么联系?

0-4　根据观测误差对观测结果影响的不同,说明误差的分类。

0-5　为什么在观测中一定存在偶然误差?能否将其消除?

0－6 什么叫多余观测？测量中为什么要进行多余观测？

0－7 测量平差的任务是什么？带有系统误差的观测值能否参与平差？

0－8 在测角中用正、倒镜观测，水准测量中使用前、后视距相等，这些规定都是为了消除什么误差？

0－9 用钢尺丈量距离，有下列几种情况，使量得的结果产生误差，试判别误差的性质。

(1)尺长不准确　(2)尺不水平　(3)估读小数不准确　(4)尺垂曲　(5)尺端偏离直线方向

0－10 在水准测量中，有下列几种情况，使水准尺读数带有误差，试判别误差的性质。

(1)视准轴与水准轴不平行　(2)仪器下沉　(3)读数不准确　(4)水准尺下沉

第一章　观测误差及其传播

测量平差的基本任务是处理一系列带有偶然误差的观测值，求出未知量的最佳值及评定测量成果的精度。因此首先要对偶然误差的性质进行研究，找出它们对观测值的影响规律。偶然误差是一种随机变量，一组误差表面上看没有规律性，但就其总体来说具有一定的统计规律，随机变量的统计学原理适用于此。

本章从测量误差的统计规律入手，引出测量中的常用的“精度”概念，详细讨论测量平差中最重要的内容之一，即偶然误差的传播定律，并给出其在测量中的应用实例，最后给出权的定义以及测量中常用的定权方法。

第一节　偶然误差的统计性质

任何一个被观测量，客观上总是存在一个能代表其真实大小的数值，这一数值就称为该观测量的真值。从概率和数理统计角度来看，当观测量仅含偶然误差时，数学期望也就是它的真值。

设进行了 n 次观测，其观测值为 L_1、L_2、…、L_n，假定观测量的真值为 $\widetilde{L}_1$、$\widetilde{L}_2$、…$\widetilde{L}_n$，由于各观测值都带有一定的误差，因此，每一观测值 L_i，与其真值 $\widetilde{L}_i$ 或 $E(L_i)$ 之间必存在一差数，设

$$\Delta_i = L_i - \widetilde{L}_i \tag{1-1}$$

式中，Δ_i 为真误差，又简称为误差。若记

$$\underset{n\times 1}{L} = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix}, \quad \underset{n\times 1}{\widetilde{L}} = \begin{pmatrix} \widetilde{L}_1 \\ \widetilde{L}_2 \\ \vdots \\ \widetilde{L}_n \end{pmatrix}, \quad \underset{n\times 1}{\Delta} = \begin{pmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \vdots \\ \Delta_n \end{pmatrix}$$

则有

$$\Delta = L - \widetilde{L} \tag{1-2}$$

如果以被观测量的数学期望

$$E(L) = [E(L_1), E(L_2), \cdots, E(L_n)]^{\mathrm{T}}$$

表示其真值，则

$$\left.\begin{aligned} E(L) &= \tilde{L} \\ \Delta &= L - E(L) \end{aligned}\right\} \tag{1-3}$$

测量平差处理的观测值是假定不含系统误差的,因此这里的 Δ 仅仅是指偶然误差。就单个偶然误差而言,其大小和符号没有规律性,即呈现出一种偶然性(或随机性)。但就总体而言,却呈现出一定的统计规律性。人们从大量的测量实践中发现,相同观测条件下,大量偶然误差的分布也确实表现出了一定的规律性。下面举例说明。

在某测区,在相同的观测条件下,独立观测 358 个三角形的全部内角,求得 358 个三角形的闭合差,由于观测值带有误差,故三内角观测值之和不等于其真值 180°。根据式(1-1),各个三角形内角和的真误差可由下式算得:

$$\Delta_i = (L_1 + L_2 + L_3)_i - 180° \quad (i = 1, 2, \cdots, 358)$$

式中,$(L_1 + L_2 + L_3)_i$ 表示各三角形内角和的观测值。现取误差区间的间隔 $d\Delta = 0.20''$,将这一组误差按其正负号与误差值的大小排列,统计误差出现在各区间内的个数 v_i,以及误差出现在某一区间内的频率 $\frac{v_i}{n}$(此处 $n = 358$),其结果见表 1-1。

表 1-1

误差的区间/(″)	Δ 为负值			Δ 为正值			备注
	个数 v_i	频率 $\frac{v_i}{n}$	$\frac{v_i/n}{d\Delta}$	个数 v_i	频率 $\frac{v_i}{n}$	$\frac{v_i/n}{d\Delta}$	
0.00~0.20	45	0.126	0.630	46	0.128	0.640	$d\Delta = 0.20''$ 等于区间左端值的误差算入该区间内
0.20~0.40	40	0.112	0.560	41	0.115	0.575	
0.40~0.60	33	0.092	0.460	33	0.092	0.460	
0.60~0.80	23	0.064	0.320	21	0.059	0.295	
0.80~1.00	17	0.047	0.235	16	0.045	0.225	
1.00~1.20	13	0.036	0.180	13	0.036	0.180	
1.20~1.40	6	0.017	0.085	5	0.014	0.070	
1.40~1.60	4	0.011	0.055	2	0.006	0.030	
1.60 以上	0	0	0	0	0	0	
$\sum$	181	0.505		177	0.495		

从表 1-1 中可以看出,误差的分布情况具有以下性质:

(1) 误差的绝对值有一定的限值;

(2) 绝对值小的误差比绝对值大的误差出现的个数多;

(3) 绝对值相等的正负误差的个数相近。

为了便于以后对误差分布互相比较,下面对另一测区的 421 个三角形内角和的一组真误差,按上述方法作了统计,其结果列于表 1-2。

表 1-2 中所列的 421 个真误差,尽管其观测条件不同于表 1-1 中的真误差,但从表中可以看出:愈接近于零误差的区间,其频率愈大;随着离开零误差愈来愈远,其频率亦逐渐递

表 1－2

误差的区间/(″)	Δ为负值 个数 v_i	Δ为负值 频率$\frac{v_i}{n}$	Δ为负值 $\frac{v_i/n}{d\Delta}$	Δ为正值 个数 v_i	Δ为正值 频率$\frac{v_i}{n}$	Δ为正值 $\frac{v_i/n}{d\Delta}$	备注
0.00～0.20	40	0.095	0.475	37	0.088	0.440	
0.20～0.40	34	0.081	0.405	36	0.085	0.425	
0.40～0.60	31	0.074	0.370	29	0.069	0.345	
0.60～0.80	25	0.059	0.295	27	0.064	0.320	
0.80～1.00	20	0.048	0.240	18	0.043	0.215	
1.00～1.20	16	0.038	0.190	17	0.040	0.200	
1.20～1.40	14	0.033	0.165	13	0.031	0.155	$d\Delta=0.20''$等于区间左端值的误差算入该区间内
1.40～1.60	9	0.021	0.105	10	0.024	0.120	
1.60～1.80	7	0.017	0.085	8	0.019	0.095	
1.80～2.00	5	0.012	0.060	7	0.017	0.085	
2.00～2.20	6	0.014	0.070	4	0.009	0.045	
2.20～2.40	2	0.005	0.025	3	0.007	0.035	
2.40～2.60	1	0.002	0.010	2	0.005	0.025	
2.60以上	0	0	0	0	0	0	
$\sum$	210	0.499		211	0.501		

减；超过一定值(2.60″)的误差出现的频率为0；且出现在正负误差区间内的频率基本上相等。因而，表1－2的误差分布情况与表1－1的误差分布情况具有相同的性质。

误差分布的情况，除了采用上述误差分布表的形式表达外，还可利用图形来表达。例如，以横坐标表示误差出现的不同区间，纵坐标代表各区间内误差出现的频率除以区间的间隔值，即$\frac{v_i/n}{d\Delta}$(此处间隔值均取为$d\Delta=0.20''$)。分别根据表1－1和表1－2中的数据绘制出图1－1和图1－2。可见，此时图中每一误差区间上的长方条面积就代表误差出现在该区间内的频率。例如，图1－1中画有斜线的长方条面积，就是代表误差出现在0.00″～＋0.20″区间内的频率0.128。这种图通常称为直方图，它形象地表示了误差的分布情况。

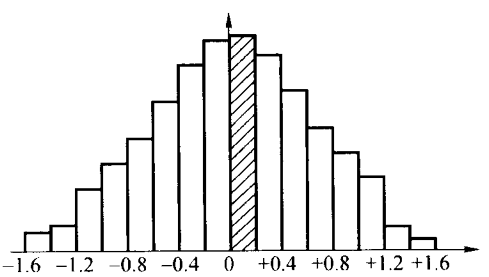

图1－1

由此可知，在相同观测条件下所得到的一组独立观测的误差，只要误差的总个数n足够多，那么，误差出现在各区间内的频率总是稳定在某一常数(理论频率)附近，而且当观测个数愈多时，稳定的程度也就愈大。例如，就表1－1的一组误差而言，在观测条件不变的情况下，如果再继续观测更多的三角形，则可预期，随着观测的个数愈来愈多，误差出现在各区间内的频率，其变动幅度也就愈来愈小，当$n\to\infty$时，各频率也就趋近于一个完全确定的数值，这就是误差出现在各区间的概率。这就是说，在一定观测条件下，对应着一定的误差分布。

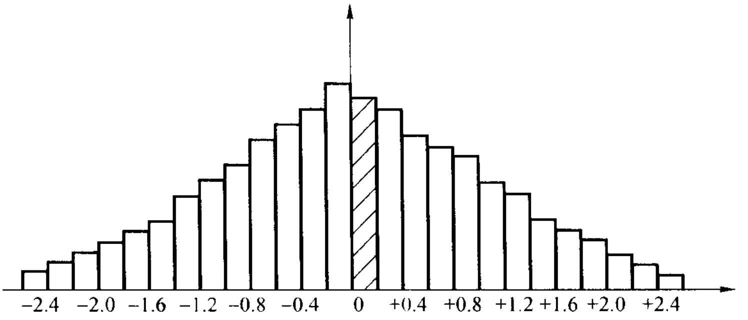

图 1－2

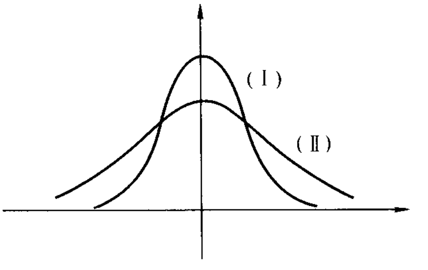

图 1－3

在 $n\to\infty$ 的情况下，由于误差出现的频率已趋于完全稳定，此时若把误差区间间隔无限缩小，则可想像到，图 1－1 及图 1－2 中各长方条顶边所形成的折线将分别变成如图 1－3 所示的两条光滑的曲线。这种曲线也就是误差的概率分布曲线，或称为误差分布曲线。由此可见，偶然误差的频率分布，随着 n 的逐渐增大，都是以正态分布为其极限的。通常也称偶然误差的频率分布为其经验分布，而将正态分布称为它们的理论分布。因此，在以后的理论研究中，都是以正态分布作为描述偶然误差分布的数学模型，这不仅可以带来工作上的便利，而且基本上也是符合实际情况的。

将上述讨论的偶然误差用概率术语来概括其特性：

(1) 在一定的观测条件下，误差的绝对值有一定的限值，或者说，超出一定限值的误差，其出现的概率为零。

(2) 绝对值较小的误差比绝对值较大的误差出现的概率大。

(3) 绝对值相等的正负误差出现的概率相等。

(4) 根据式(1－3)可知，偶然误差的数学期望为零，即

$$E(\Delta)=E(L-E(L))=E(L)-E(L)=0 \tag{1-4}$$

也就是说，偶然误差的理论平均值为零。即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{[\Delta]}{n}=0 \tag{1-5}$$

对于一系列的观测而言，不论其观测条件是好是差，也不论是对同一个量还是对不同的量进行观测，只要这些观测是在相同的条件下独立进行的，则所产生的一组偶然误差必然都具有上述四个特性。

图 1－1 和图 1－2 中各长方条的纵坐标为 $\frac{v_i/n}{\mathrm{d}\Delta}$，其面积即为误差出现在该区间内的频率。如果将这个问题提到理论上来讨论，则以理论分布(图 1－3)取代经验分布，此时，图 1－1 和图 1－2 中各长方条的纵坐标就是 Δ 的密度函数 $f(\Delta)$，而长方条的面积为 $f(\Delta)\mathrm{d}\Delta$，即代表误差出现在该区间内的概率，即

$$P(\Delta)=f(\Delta)\mathrm{d}\Delta \tag{1-6}$$

根据数理统计知识，顾及式(1-3)，可写出 Δ 的概率密度式为

$$f(\Delta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{\Delta^2}{2\sigma^2}} \tag{1-7}$$

式中，σ 为中误差。当上式中的参数 σ 确定出后，即可画出它所对应的误差分布曲线。由于 $E(\Delta)=0$，所以该曲线是以纵轴为对称轴。当 σ 不同时，曲线的位置不变，但分布曲线的形状将发生变化。例如，图 1-3 中就是表示 σ 不相等时的两条曲线。由上述讨论可知，偶然误差 Δ 是服从 $N(0,\sigma^2)$ 分布的随机变量。

第二节　衡量精度的指标

测量平差的任务之一，就是评定测量成果的精度。如何正确理解“精度”的含意以及怎样衡量精度的高低，是本节所要讨论的主要内容。

为了阐述精度的含义，先分析上节的两个实例。图 1-1 和图 1-2 分别是在不同观测条件下所测得的两组误差的频率分布图(直方图)，图中每个长方条的面积就是误差出现在该区间内的频率。频率的大小见表 2-1 及表 2-2 中的数值。不难理解，如果将表 1-1 中的 0.00″～-0.20″和 0.00″～+0.20″这两个区间的频率相加，即得区间-0.20″～+0.20″内的频率为 0.254。如果按此法进行累计，则知误差出现于-0.60″～+0.60″区间内的频率为 0.665。这就是说，在表 1-1 的这组误差中，出现于区间-0.60″～+0.60″以内的误差占误差总数的 66.5%，而出现在这一区间以外的误差，即绝对值大于 0.6″的误差，其频率为1-0.665=0.335，即占区间总数的 33.5%。如果对表 1-2 的误差也进行累计，可知出现在-0.60″～+0.60″区间内的频率为 0.492，而出现于这一区间以外的频率为 1-0.492=0.508。这就是说，出现于-0.60″～+0.60″这一区间之内和区间之外的误差，各占误差总数的 49.2%和 50.8%。

上述数字表明，表 1-1 中的误差更集中于零的附近，因此可以说这一组误差分布得较为密集，或者说它的离散度小。相对而言，表 1-2 中的误差分布得较为离散或者说它的离散度大。

从直方图来看，误差分布较为密集的图 1-1，其图形在纵轴附近的顶峰较高，且由各长方条所构成的阶梯比较陡峭；而误差较为分散的图 1-2，在纵轴附近的顶峰则较低，且其阶梯较为平缓。这个性质同样反映在误差分布曲线(图 1-3)的形态上，即误差分布曲线(Ⅰ)较为高而陡峭，误差分布曲线(Ⅱ)则较低而平缓。

在一定观测条件下进行的一组观测，它对应着一种确定的误差分布。不难理解，如果分布较为密集，即离散程度较小时，则表示该组观测质量较好，也就是说，这一组观测精度较高；反之，如果分布较为离散，即离散程度较大时，则表示该组观测质量较差，也就是说，这一组观测精度较低。

所谓精度，就是指误差分布的密集或离散程度，也就是指离散度的大小。离散度越大，则精度越低。假如两组观测成果的误差分布相同，便是两组观测成果的精度相同；反之，若误差分布不同，则精度也就不同。

在相同条件下所进行的一组观测，由于它们对应着同一种误差分布，因此，对于这一组中的每一个观测值，都称为同精度观测值。例如表 1-1 中所列的 358 个观测结果是在相同

观测条件下测得的,各个结果的真误差彼此并不相等,有的甚至相差很大,但是由于它们所对应的误差分布相同,因此这些结果是彼此同精度的。

将表 1－1 及表 1－2 中的数值相比较可知,表 1－2 的误差分布比表 1－1 的误差分布较为离散,因此,表 1－2 中的 421 个观测值其精度均低于表 1－1 中的观测值。

为了衡量观测值精度高低,可以按照第一节的方法,把在一组相同条件下得到的误差,可用误差分布表、直方图或误差分布曲线的方法进行比较。但在实际工作中,这样做比较麻烦,有时甚至很困难,而且还需要对精度有一个数字概念。这种具体的数字应该能够反映误差分布的密集或离散程度,即应能够反映其离散度的大小,因此称它为衡量精度的指标。

衡量精度的指标有很多种,下面介绍几种常用的精度指标。

一、方差和中误差

首先看看在数理统计中,是如何度量随机变量 X 的离散程度的,容易看到用 $E\{|X-E(X)|\}$能度量 X 与其均值$E(X)$的偏离程度。但由于式中含有绝对值,运算不方便,故通常用 $E\{(X-E(X))^2\}$来度量随机变量与其均值的偏离程度,并称其为方差,即

$$\sigma_X^2 = D(X) = E(\{(X-E(X))^2\} = \int_{-\infty}^{+\infty}(X-E(X))^2 f(x)\mathrm{d}x \tag{1-8}$$

式中,$f(x)$为 X 的概率分布密度函数,X 的方差也可记为$D(X)$;σ_X 称为标准差,或称为中误差。

对于观测值 L 及其真误差 Δ,因它们均为随机变量,方差分别为

$$D(L)=\sigma_L^2=E\{(L-E(L))^2\}$$

$$D(\Delta)=\sigma_\Delta^2=E\{(\Delta-E(\Delta))^2\}$$

顾及到 $E(L)=\widetilde{L}$,$(L-E(L))^2=(L-\widetilde{L})^2=\Delta^2$,且 $E(\Delta)=0$,则

$$D(L)=D(\Delta)=E(\Delta^2) \tag{1-9}$$

可见,一组观测值的中误差与一组误差的中误差是相同的,而 $\sigma=\sqrt{E(\Delta^2)}$即为标准差,或中误差。

由上可知,不同的 σ 将对应着不同形状的分布曲线,同时正态分布曲线具有两个拐点(图 1－4),它们在横轴上的坐标为 $\Delta_{拐}=\mu\pm\sigma$,μ 为变量Δ 的数学期望。对于偶然误差而言,其数学期望 $E(\Delta)=0$,所以拐点在横轴上的坐标应为

$$\Delta_{拐}=\pm\sigma \tag{1-10}$$

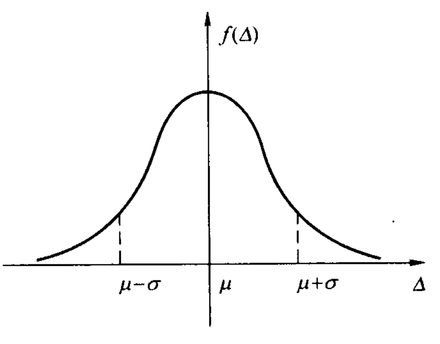

图 1－4

由图可见,σ 愈小,曲线愈陡峭,误差分布越密集;σ 愈大,曲线愈平缓,误差分布越分散。即 σ 的大小可以反映精度的高低,故常用中误差 σ 作为衡量精度的指标。

现在来推求中误差 σ 的计算公式。前已述及,误差 Δ 概率密度函数为

$$f(\Delta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{\Delta^2}{2\sigma^2}}$$

如果在相同的观测条件下得到了一组独立的观测误差,由方差的定义可知:

$$\sigma^2 = D(\Delta) = E(\Delta^2) = \int_{-\infty}^{+\infty}\Delta^2 f(\Delta)\mathrm{d}\Delta \tag{1-11}$$