



荣德基 总主编

在思维里顿悟
在理解中通透
在运用上熟稔
——这就是点拨

特育名师

点拨[®]

用科学的CETC差距理论策划创作

贺点拨十周年华诞

高一数学

上

配人教试验修订版

内蒙古少年儿童出版社

责任编辑：巴 木
封面题字：沈 鹏
封面设计：典点瑞泰
010-67225575



荣德基 总主编

点拨 典点

高三用书	语文	数学	英语	物理	化学	生物	历史	政治	
高二用书	语文	数学	英语	物理	化学	生物	历史	政治	地理
高一用书	语文	数学	英语	物理	化学	历史	政治	地理	



高二用书	语文	数学	英语	物理	化学	生物
高一用书	语文	数学	英语	物理	化学	

荣德基主编2008年高考用书《特级教师**点拨**高考》（学生用书）科目一览
语文 数学（文） 数学（理） 英语 物理 化学 生物 历史 政治 地理

荣德基教辅继《点拨》《典中点》《三味》《剖析》之后推出的又一力作
——《荣德基CETC高考攻略第一卷 **NO.1**》

巅峰写作阵容：全国高考一线教学精英
全国高考创升学率新高名校
高考判卷老师
资深高考命题研究专家

科学备考攻略：三大战役 八期考卷

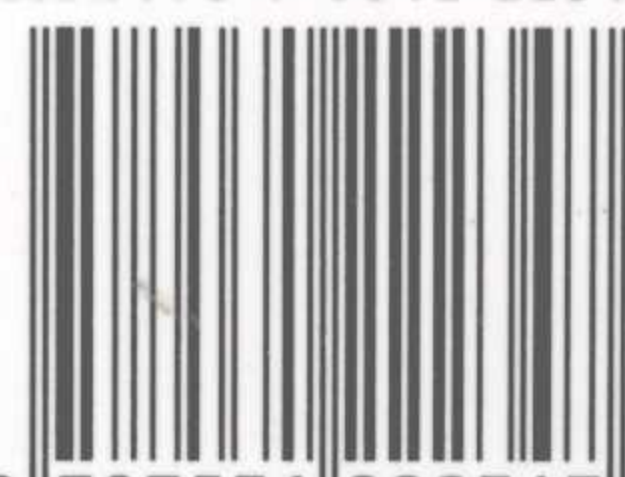
凡一次性购买正版荣德基《点拨》《典中点》《三味》《剖析》四大系列满六本（含）以上的读者朋友，可获赠当期《荣德基CETC高考攻略第一卷NO.1》和《助考快递》丛书各一本。

《点拨》——最能体现荣德基CETC差距理论的代表作

RD7110021690

ISBN 978-7-5312-2234-7
全套共8册 总定价：135.20元

ISBN 978-7-5312-2234-7



9 787531 222347 >



荣德基 总主编

骨干教师

点校本

高一数学(上)

(配人教试验修订版)

总主编:荣德基

本册主编:朱 东

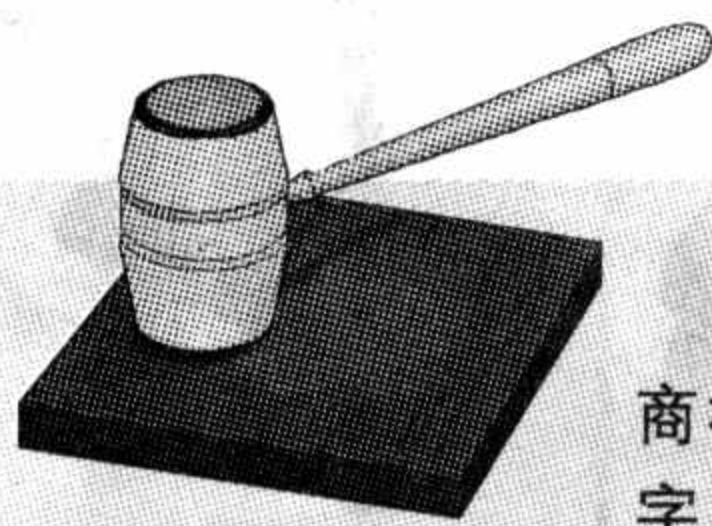
内蒙古少年儿童出版社

图书在版编目(CIP)数据

特高级教师点拨. 高一数学. 上/荣德基主编. —通辽:内蒙古少年儿童出版社, 2007. 5
ISBN 978-7-5312-2234-7

I. 特... II. 荣... III. 数学课-高中-教学参考资料 IV. G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 060540 号



律 师 声 明

据读者投诉并经调查, 近来发现某些出版社在出版书籍时假冒、盗用注册商标“**点拔**”二字, 或者使用与“**点拔**”读音、外形相近、相似的其他文字。这种违背诚信原则, 混淆视听, 欺骗和误导读者的行为, 不仅严重违反了《中华人民共和国商标法》等一系列法律法规, 侵害了北京典点瑞泰图文设计有限责任公司及读者的合法权益, 而且还违背了市场经济社会公平竞争的基本准则, 严重扰乱了市场秩序。为此, 本律师受北京典点瑞泰图文设计有限责任公司的委托, 发表如下声明:

1. “**点拔**”二字为专用权属于北京典点瑞泰图文设计有限责任公司的注册商标, 核定的商标类别为第16类印刷出版物和第41类书籍出版, 商标注册证书号分别为: 3734778和3734779。

2. 任何单位或者个人, 未经北京典点瑞泰图文设计有限责任公司的书面许可使用, 在书籍印制、出版时使用“**点拔**”或者与此二字字形、字音相近、相似的其他文字为商标的, 均属非法, 北京典点瑞泰图文设计有限责任公司保留向任何一个印刷、出版、销售上述书籍的侵权人追究法律责任的权利。

3. 本律师同时提醒广大读者, 购买书籍时请认准注册商标“**点拔**”。

北京中济律师事务所

律师: 段彦

侵权举报电话: (010) 81671395

2007年3月15日

责任编辑/巴 木

装帧设计/典点瑞泰

出版发行/内蒙古少年儿童出版社

地址邮编/内蒙古通辽市霍林河大街西 312 号(028000)

经 销/新华书店

印 刷/山东中和新华印刷有限公司

总 字 数/2921 千字

规 格/890×1240 毫米 1/16

总 印 张/92.25

版 次/2007 年 5 月第 1 版

印 次/2007 年 5 月第 1 次印刷

总 定 价/135.20 元(全 8 册)

版权声明/版权所有 翻印必究

栏目观点

第1章 集合与简易逻辑

第1章 集合与简易逻辑

知识链接

1. 问题链接 某研究所共有成员 100 名,其中曾获得过科技奖的成员共 50 名,在各种杂志上发表过文章的成员共 40 名,发表过文章但没有获奖的成员共 10 名,求下列人数:

- (1) 既发表过文章又获奖的成员;
- (2) 既没发表过文章也没获奖的成员;
- (3) 获奖但没发表过文章的成员.

2. 趣味链接 歌德是 18 世纪德国的一位著名文艺大师.一天,他与一位文艺批评家“狭路相逢”.这位批评家生性古怪,遇

到歌德走来,不仅没有相让,反而变本加厉,一边高傲地往前走,一边大声说道:“我从不给傻子让路!”面对如此尴尬的局面,歌德依旧笑容可掬,幽默地闪到一旁,有礼貌地回答道:“呵呵,我可恰恰相反!”结果自作聪明的批评家,反倒自讨没趣.

在这个故事里,批评家用他的语言和行动表达了这样几个语句:(1)我不给傻子让路,(2)你歌德是个傻子,(3)我不给你让路,而歌德用语言和行动反击:(1)我给傻子让路,(2)你批评家是个傻子,(3)我给你让路.他们都运用了逻辑知识.本章我们将要学习高中数学基础知识——集合与简易逻辑.

第1节 集合

课前准备

一、关键概念和原理提示

关键概念:①集合;②特定集合: N ,自然数集; N_+ 或 N^+ :正整数集; Z :整数集; Q :有理数集; R :实数集;③有限集、无限集、空集;④属于($\in$)和不属于($\notin$).

关键原理:①集合中元素的特性:确定性、互异性、无序性.②集合的表示方法:列举法、描述法等.

基础知识必背

一、精彩点拨教材知识

知识点 1: 集合(这是重点)

讲解 集合是不加定义的原始概念.一般地,某些指定的对象集在一起就成为一个集合.集合通常用大写字母表示,如 $A = \{\text{所有的奇数}\}$, $B = \{\text{不等式 } x-1 > 0 \text{ 的解}\}$. 集合里的各个对象叫做集合的元素,常用小写字母表示,如元素 a , 元素 b 等.

拓展 集合的概念关键在八个字“指定对象”、“集在一起”.一般地,判断对象 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 能否构成集合,就是要看指定对象 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 确定不确定,客观标准是否存在.存在,则能;不存在,则否.这里的“存在”是指“确定”或“不确定”能说清楚;“不存在”是指“确定”或“不确定”说不清楚.

【例 1】下列所给对象不能构成集合的是()

- 平面内的所有点
- 直角坐标系中第一、二象限的角平分线上的所有点
- 清华大学附中高一年级全体女生
- 所有高大的树

解 由集合概念中“一些能够确定的对象”可知,一个元素不在集合中必须是明确的.而本例中 D 所指的对象含糊不清,所谓“高大”没有明确的客观标准,也难以判断某些对象是否属于这个范畴,故选 D.

创新讲解

一、学科综合思维专题点拨

学科综合思维 本节综合题常与求一元二次方程的根之类的问题综合起来进行考查.解此类问题,首先要正确理解集合语言,认清集合中含有怎样的元素,其次将集合语言转化成相应的数学语言来求解.

判断一个人,不是根据他自己的表白或对自己的看法,而是根据他的行动.

【例 1】已知集合 $A = \{x | ax^2 + 2x + 1 = 0, a \in R\}$,若 A 中至多有一个元素,求满足条件的 a 的所有可能取值组成的集合.

解 A 中至多有一个元素包括两种情形,即 A 中只有一个元素和 A 是空集.

(1) 若 A 中只有一个元素时,当 $a = 0$ 时,方程 $2x + 1 = 0$ 只有一个根;当 $a \neq 0$ 时, $\Delta = 0$,即 $4 - 4a = 0$,所以 $a = 1$;

(2) 若 A 为空集,则有 $\begin{cases} a \neq 0, \\ \Delta = 4 - 4a < 0 \end{cases}$ 解得 $a > 1$.

综上所述满足条件的 a 的所有可能取值组成的集合为 $\{a | a = 0 \text{ 或 } a \geq 1\}$.

点拨 集合 A 中至多有一个元素包括 A 中只有一个元素和 A 是空集两种情况,很多同学容易忽视 A 是空集这一特殊情况,这也说明同学们没有牢固掌握和理解空集这一概念.关于集合的分类,尤其对于空集的考查历来都是高考热点,必须加以重视.

IV 高考专题点拨

高考命题趋势 集合是中学数学的基础,涉及集合的试题将会在高考试题中继续出现.本节考查:(1)对集合的基本概念的认识和理解水平.如集合的表示法,元素与集合间的关系;(2)对集合知识的应用水平,如求不等式的解集等.常以选择题、填空题的形式出现.在考查集合知识的同时重点考查准确使用数学语言的能力及用数形结合、分类讨论的思想方法解决问题的能力.

【例】(2006, 山东, 5 分) 定义集合运算: $A \odot B = \{x | x = xy(x+y), x \in A, y \in B\}$. 设集合 $A = \{0, 1\}$, $B = \{2, 3\}$, 则集合 $A \odot B$ 的所有元素之和为()

- 0
- 6
- 12
- 18

解 D 点拨 当 $x = 0$ 时,不管 y 取何值, $A \odot B = 0$, 当 $x = 1$, 且 $y = 2$ 时, $A \odot B = 1 \times 2 \times (1+2) = 6$; 当 $x = 1$, 且 $y = 3$ 时, $A \odot B = 1 \times 3 \times (1+3) = 12$. 综上,集合 $A \odot B$ 的所有元素之和为 $0 + 6 + 12 = 18$. 本题是一道新信息题,主要考查了集合的基本概念与分析问题、解决问题的能力.

V 趣味阅读

集合论的创始人

德国数学家康托(1845~1918),是集合论的创始人,他引入了基数的概念,定义了有限集、无限集、开集等概念,他是点集理论的开拓者,点集理论是点集理论的起源,康托的老师冯·施泰因、康托的好友数学家施瓦兹等都强烈反对集合论并且攻击他、阻止他,他在患 34 年的精神病之后去世.

名言警句

通过已学的知识经验、试验事实、趣味知识、情景问题引出本章知识内容,激发创新思维、建立知识链接.

归纳本节关键概念、原理、法则、必记知识、必记内容、巧记方法等,让你对本节内容有一个整体了解.教材中的“?”解答将对教材中所提出的问题细致回答.

荟萃所有知识点,精讲具体内容,点拨易错点和易忽略点,让你把本节知识内容一网打尽.具体分为四部分:精彩点拨教材知识、易错点和易忽略点导析、构建知识网络、知识点针对性练习及答案点拨.

精选最新经典高考题,给出详细讲解和方法点拨,让你领会高考精神,学会解高考题的方法和技巧,同时点出本节知识在历年高考中的命题形式,使你轻松面对高考.

通过对学科综合思维、实际应用思维等专题的讲解和实例点拨,让你掌握创新题的解题方法,领会素质教育之精髓.

栏目观点

2

高一数学(上)

VI 强化练习题

A 卷: 基础训练题 (60分 45分钟) (143)

一、选择题 (每题5分,共20分)

1. (测试知识点1) 下列表述: ①充分接近 $\sqrt{2}$ 的实数的全体 ②方程 $x^2+x-1=0$ 的实数根 ③全国著名的高等院校 ④个子很高的学生, 能够构成集合的是 ()
A. ①② B. ①③ C. ② D. ①②③④
2. (测试知识点2) 已知集合 $A=\{a,b,c\}$ 中的三个元素, 可成为 $\triangle ABC$ 的边长, 则 $\triangle ABC$ 一定不是 ()
A. 等腰三角形 B. 直角三角形
C. 锐角三角形 D. 钝角三角形
3. (测试知识点3) 若集合 $A=\{x|-3<x<2, x\in\mathbb{N}\}$, 则集合A为 ()

A. {1} B. {0,1} C. {-2,-1,0,1} D. 以上均不对

B 卷: 新课标新题型练习 (50分 30分钟) (143)

一、学科内综合题 (每题5分,共10分)

1. 集合 $M=\{(x,y)|xy>0, x\in\mathbb{R}, y\in\mathbb{R}\}$ 的意义是 ()
A. 第一象限的点 B. 第三象限的点
C. 第一象限和第三象限的点
D. 既不在第二象限也不在第四象限的点
2. 方程组 $\begin{cases} x-y+1=0, \\ 2x+y-4=0 \end{cases}$ 的解集可以表示为 ① $(1,2)$, ② $\{(1,2)\}$, ③ $\{x,y|x=1,y=2\}$, ④ $\begin{cases} x=1, \\ y=2 \end{cases}$, ⑤ $\{(x,y)|\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}\}$, 以上正确的个数有 ()
A. 5个 B. 4个 C. 3个 D. 2个

根据题型和难易程度分为A、B卷,A卷为基础训练题,考查你对基础知识的掌握能力;B卷为课标新题型练习,考查你对新型题的掌握能力以及对解题方法的灵活运用能力。习题紧贴课标、联系生活,注重知识迁移,渗透命题趋向。真正体现同步性、层次性、科学性、新颖性。

二、本章知识结构梳理

1. 逻辑联结词
2. 简易逻辑
3. 四种命题及关系
4. 充要条件及判定

第1章 达标检测题

(120分 90分钟) (152)

一、选择题 (每题5分,共60分)

1. 设全集 $I=\{1,3,5,7,9\}$, 集合 $A=\{1,|a-5|,9\}$, $\complement_I A=\{5,7\}$, 则a的值为 ()

A. 8 B. 2 C. 2或8 D. -2或8
A. 4个 B. 6个 C. 7个 D. 8个

第一学期期中测验题

(150分 120分钟) (164)

一、选择题 (每题5分,共60分)

1. 由实数 $x, -x, |x|, \sqrt{x}, -\sqrt{x}$ 所构成的集合中, 最多含有元素的个数为 ()
A. 2个 B. 3个 C. 4个 D. 5个

2. 设U为全集, 子集 $A=\{x|f(x)=0\}$, $B=\{x|g(x)=0\}$, $C=\{x|h(x)=0\}$, 则方程 $\frac{f^2(x)+g^2(x)}{h(x)}=0$ 的解集是 ()
A. $A\cap B\cap C$ B. $A\cap B$ C. $A\cap B\cap(\complement_U C)$ D. $A\cup B\cup C$

第一学期期末测验题

(150分 120分钟) (172)

一、选择题 (每题5分,共60分)

1. 已知全集 $U=\mathbb{R}$, $A=\{-1\}$, $B=\{x|\lg(x^2-2)=\lg x\}$, 则 ()
A. $A\subseteq B$ B. $A\cup B=\emptyset$ C. $A\supseteq B$ D. $(\complement_U A)\cap B=\{2\}$
2. 已知不等式 $(x+5)(3-2x)>0$, 则其解集为 ()
A. $\{x|x>\frac{3}{2}\text{或}x<-5\}$ B. $\{x|-5<x<\frac{3}{2}\}$

C. $\{x|x>\frac{3}{2}\}$ D. $\{x|x<-5\}$

3. 如果B是A的必要不充分条件, B是C的充分不必要条件, 那么C是A的 ()
A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

参考答案及点拨

第1章 集合与简易逻辑

第1节 集合

1. C 点拨: ①③④集合中的元素不确定, 故选C. 集合中的元素是确定的, 而没有量化的标准和相对模糊的概念是不能构成集合的.

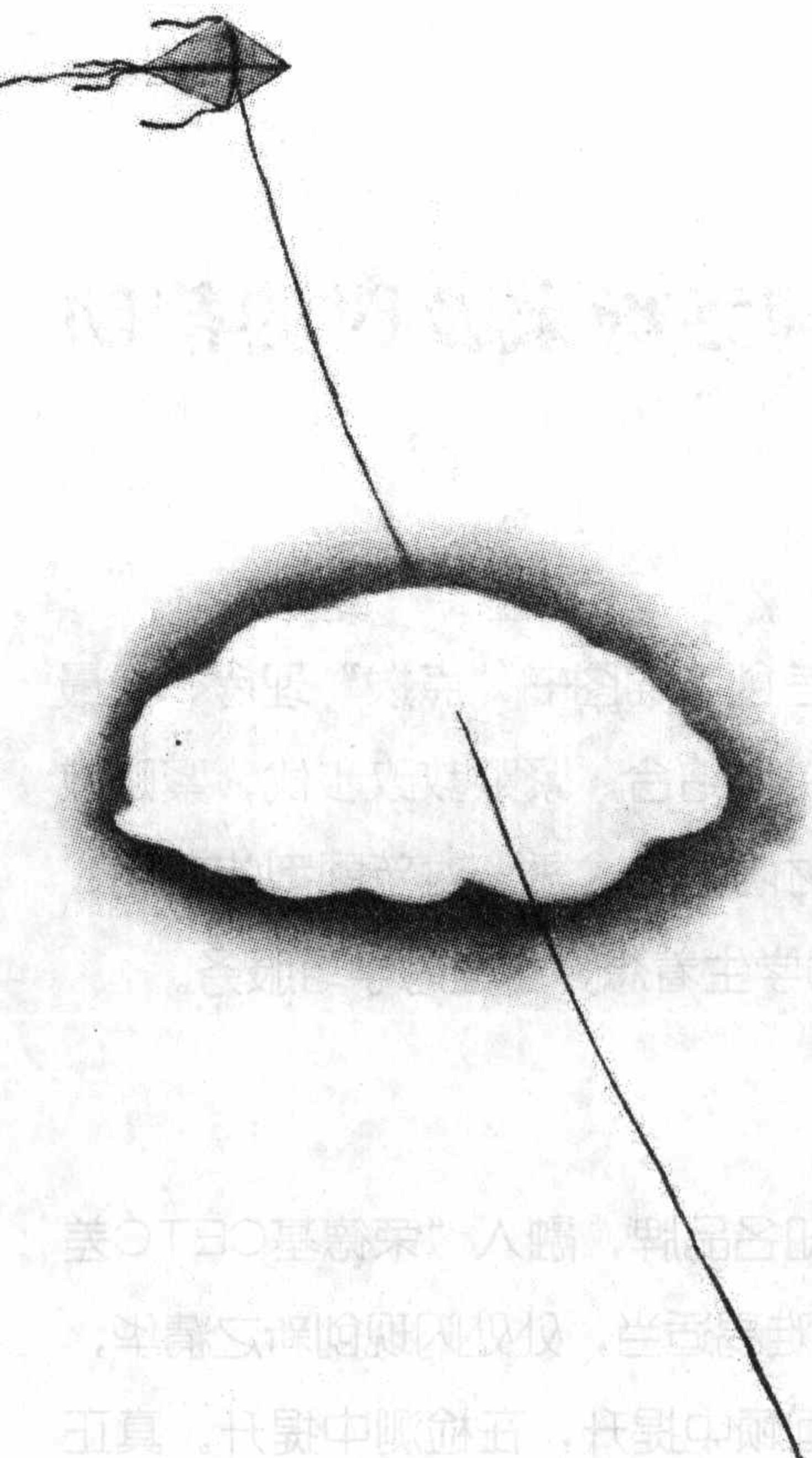
2. A 点拨: 由集合中元素的互异性, 可知 a, b, c 两两互不相等, 故 $\triangle ABC$ 一定不是等腰三角形.
3. B 点拨: 由自然数的概念可知 $0\in\mathbb{N}$, $1\in\mathbb{N}$, $-2\notin\mathbb{N}$, $-1\notin\mathbb{N}$, 故选B.
4. B 点拨: 梯形不符合平行四边形的概念, 故 $b\notin A$, 而菱形、正方形、矩形都是特殊的平行四边形, 所以 $a\in A, c\in A, d\in A$.

系统归纳本章知识结构, 全面总结本章涉猎专题, 并配以专题强化练习题, 让你快速回顾本章知识, 做到学无所漏。

合理设置题型、题量, 精心选材, 难度适中, 做到特色与高考要求最大程度的吻合。全面考查你对所学知识的掌握情况和对解题方法的灵活运用能力。

单独成册放于书后, 为你自测提供评判依据, 及时纠偏改错。点拨独到, 解题方法灵活多样, 思路清晰, 难点讲解及总结归纳清晰易懂。

打造中学生最喜爱的教辅书



青春

青春是一首歌

这首歌，是五千年来飞天长袖中私藏的花瓣

这首歌，是雪山高原静立的清纯雪莲

这首歌，是山间缭绕的冬不拉的袅袅余音

这首歌，是《点拨》，有我优美的歌词，有你清澈的歌喉

青春是一段路

这段路，有“野火烧不尽，春风吹又生”的温暖情怀

这段路，有狂放的心境，有深沉的意志

这段路，有恢弘的想象，有奔放的性情

这段路，是《点拨》，是我的生命之泉，是你的火山喷发

青春是一本书

这本书，镌刻着不懈追求的夸父精神

这本书，浸透了大成殿前古柏的绿阴

这本书，燃烧了奥林匹亚山上文明的圣火

这本书，升腾了学海上的中华蛟龙

这本书，是《点拨》，是我的心血，是你的辉煌

2007年4月于北京

荣德基教辅特色

——荣德基教辅给你最及时的帮助

点拨



荣德基教育研究中心主打品牌之一，首创教辅图书“点拨”理念，是最能体现荣德基CETC差距理论的代表作。讲练结合，紧跟教改步伐，紧贴教学大纲，注重对知识点的归纳总结、对教材内容的渗透、对新题型的应用，涵盖信息丰富，答案点拨精准到位，全力为学生着想，全程为学习服务。

典中点



与《点拨》并驾齐驱，是教辅市场的知名品牌，融入“荣德基CETC差距学习法”。该丛书高屋建瓴，题型丰富，难易适当，处处闪现创新之精华，注重对学生的学习方法与技巧的提升，在回顾中提升，在检测中提升。真正让学生知在书中、行在书中、乐在书中！

剖析



荣德基教育研究中心的又一力作，是学生学习的特色知识素材库，板块设置以“基础篇、应用篇、拔高篇、练习篇”的科学结构来安排，从而构建了全程优化学习的严密体系，步步为营，节节拔高，相信《剖析》一定能成为同学们学习前进中的有力助推器！

《自助作业》

荣德基教育研究中心的新品牌之一，以课时为单位，与教学完全同步。条理清晰，脉络分明，反馈中查漏补缺，提高中自我检测，题少而精，好而准。是精准的教学效果检测工具。



自助作业

《单元盘点》

参考高考的题型命题，以试卷的形式出现，对各单元（章）、各阶段学习效果进行检测。难易适度，注重在开放题、探究题等新型题中渗透教学大纲要求，全面覆盖，全面展示，全面提升学生学习成绩，是优化学习的最佳选择！



单元盘点

《第一卷》

与高考备考节奏一致，分期同步跟踪，备考全程，专题、评估、诊断、预测……各期试卷的主题、目标各有不同，以各备考阶段的备考任务为宗旨，更好地配合、辅助师生备考。



第一卷

目录

CONTENTS

第1章 集合与简易逻辑

- 1 知识链接
- 1 第1节 集 合
- 6 第2节 子集、全集、补集
- 11 第3节 交集、并集
- 17 第4节 含绝对值的不等式解法
- 23 第5节 一元二次不等式解法
- 30 第1章第一单元检测题
- 31 第6节 逻辑联结词
- 36 第7节 四种命题
- 41 第8节 充分条件与必要条件
- 46 第1章第二单元检测题
- 47 本章复习
- 50 第1章达标检测题

第2章 函 数

- 52 知识链接
- 52 第1节 函 数
- 59 第2节 函数的表示法
- 64 第3节 函数的单调性
- 70 第4节 反函数
- 75 第2章第一单元检测题

- 77 第5节 指 数
- 80 第6节 指数函数
- 85 第7节 对 数
- 90 第8节 对数函数
- 95 第9节 函数的应用举例
- 100 第2章第二单元检测题
- 101 本章复习
- 103 第2章达标检测题
- 105 第一学期期中测验题

第3章 数 列

- 107 知识链接
- 107 第1节 数 列
- 113 第2节 等差数列
- 119 第3节 等差数列的前 n 项和
- 125 第4节 等比数列
- 130 第5节 等比数列的前 n 项和
- 136 本章复习
- 139 第3章达标检测题
- 141 第一学期期末测验题
- 143 参考答案及点拨

第1章 集合与简易逻辑

知识链接

1. **问题链接**: 某科研所共有成员 100 名, 其中曾获得过科技奖的成员共 50 名, 在各种杂志上曾发表过文章的成员共 40 名, 发表过文章但没有获奖的成员共 10 名, 求下列人数:

- (1) 既发表过文章又获奖的成员;
- (2) 既没发表过文章也没获奖的成员;
- (3) 获奖但没发表过文章的成员.

2. **趣味链接**: 歌德是 18 世纪德国的一位著名文艺大师. 一天, 他与一位文艺批评家“狭路相逢”. 这位批评家生性古怪, 遇

到歌德走来, 不仅没有相让, 反而卖弄聪明, 一边高傲地往前走, 一边大声说道: “我从不给傻子让路!” 面对如此尴尬的局面, 歌德依旧笑容可掬, 谦恭地闪到一旁, 有礼貌地回答道: “呵呵, 我可恰恰相反!” 结果自作聪明的批评家, 反倒自讨没趣.

在这个故事里, 批评家用他的语言和行动表达了这样几个语句: (1) 我不给傻子让路, (2) 你歌德是个傻子, (3) 我不给你让路. 而歌德用语言和行动反击: (1) 我给傻子让路, (2) 你批评家是个傻子, (3) 我给你让路. 他们都运用了逻辑知识. 本章我们将要学习高中数学基础知识——集合与简易逻辑.

第1节 集合

I 课前准备

一、关键概念和原理提示

关键概念: ①集合; ②特定集合; N : 自然数集; N_+ 或 N^* : 正整数集; Z : 整数集; Q : 有理数集; R : 实数集; ③有限集、无限集、空集; ④属于($\in$)和不属于($\notin$).

关键原理: ①集合中元素的特性: 确定性、互异性、无序性. ②集合的表示方法: 列举法、描述法等.

二、必记知识背牢

序号	项目	必记知识	必记内容	巧记方法
1	基本概念	集合	某些指定的对象集在一起就成为一个集合, 用大写拉丁字母表示, 如 A 、 B 等.	一组确定的, 不同的对象组成的一个整体
2	基本概念	元素与集合间的从属关系	元素 a 是集合 A 的元素, 就说 a 属于 A , 记作 $a \in A$; 元素 a 不是集合 A 的元素, 就说 a 不属于 A , 记作 $a \notin A$ (或 $a \notin A$).	元素 a 与集合 A 的关系 $\begin{cases} a \in A \\ a \notin A \end{cases}$
3	基本性质	集合中元素的特性	(1) 确定性: 设 A 是一个给定的集合, a 是某一具体对象, 则 a 或者是 A 的元素, 或者不是 A 的元素, 两种情况必具其一; (2) 互异性: 对于一个给定集合, 它的任意两个元素都不同; (3) 无序性: 集合与其元素的排列次序无关.	集合中的元素是确定的、互异的、无序的.
4	基本概念	集合的分类	含有有限个元素的集合叫做有限集; 含有无限个元素的集合叫做无限集; 不含任何元素的集合叫做空集, 记作 $\emptyset$.	有限集: 元素有限 无限集: 元素无限 空集: 不含元素
5	基本方法	集合的表示方法	(1) 列举法: 将元素一一列出, 写在大括号内表示集合的方法. (2) 描述法: 把集合中的元素的公共属性描述出来, 写在大括号内表示集合的方法, 一般形式是 $\{p p \text{ 适合的条件}\}$.	列举法: 大括号内元素一一列出的方法. 描述法: 形式为 $\{p p \text{ 适合的条件}\}$ 的表示法.

II 基础知识必备

一、精彩点拨教材知识

知识点 1: 集合(这是重点)

详解: 集合是不加定义的原始概念. 一般地, 某些指定的对象集在一起就成为一个集合. 集合通常用大写拉丁字母表示, 如 $A = \{\text{所有的奇数}\}$; $B = \{\text{不等式 } x-1 > 0 \text{ 的解}\}$. 集合里的各个对象叫做集合的元素, 常用小写拉丁字母表示, 如元素 a , 元素 b 等.

拓展: 集合的概念关键在八个字“指定对象”、“集在一起”. 一般地, 判断对象 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 能否构成集合, 就是要看指定对象 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 确定不确定, 客观标准是否存在. 存在, 则能; 不存在, 则否. 这里的“存在”是指“确定”或“不确定”能说清楚; “不存在”是指“确定”或“不确定”说不清楚.

【例 1】 下列所给对象不能构成集合的是()

- A. 平面内的所有点
- B. 直角坐标系中第一、二象限的角平分线上的所有点
- C. 清华大学附中高一年级全体女生
- D. 所有高大的树

解: 由集合概念中“一些能够确定的对象”可知, 一个元素在不在集合中必须是明确的. 而本例中 D 所指的对象含糊不清, 所谓“高大”没有明确的客观标准, 也就难以判断某些对象是否属于这个范畴, 故选 D.

知识点 1 针对性练习

1. 现有 ① 不大于 10 的正有理数; ② 我校高一年级所有高个子同学; ③ 全部正方形; ④ 全体无实根的一元二次方程. 四个条件中所指对象不能组成集合的有 _____. (填代号即可)

2. 下列各组对象中能组成集合的是()

- A. 比较小的数
- B. 比 π 小的数
- C. 平面直角坐标系中与原点距离为 1 的一些点
- D. 高一(三)班成绩好的学生

知识点 2: 集合中元素的三个特性(这是重难点)

详解: 由集合的定义可推知集合的元素具有确定性、互异性、无序性.

(1) 确定性: 给定一个集合, 任何一个对象是不是这个集合的元素也就确定了. 例如, 给出集合 $\{\text{地球上的四大洋}\}$, 它只有太平洋、大西洋、印度洋、北冰洋这四个元素, 其他对象都不是它的元素. 又如“好心人”、“著名的演员”这类对象不能构成数学意

判断一个人, 不是根据他自己的表白或对自己的看法, 而是根据他的行动.

名言警句

义的集合,因为找不到用以判断每一具体对象是否都属于集合的明确标准.

(2)互异性:集合中任何两个元素都是不相同的,在同一集合中,相同的对象只能算作一个元素,即 $a \in A, b \in A$,必有 $a \neq b$.如方程 $x^2 - 2x + 1 = 0$ 的解集用集合记为 $\{1\}$,而不能记为 $\{1, 1\}$.

(3)无序性:集合中的元素是没有次序的.如 $\{a, b\}, \{b, a\}$ 是同一集合.

引申思考:集合中的元素可以是任意的对象,无论是数、式、点、人,还是其他事物,只要具备以上三个特性,就能组成一个集合.

【例 2】 下列各个集合的意义是否相同?为什么?

$\{1, 3\}, \{3, 1\}, \{(1, 3)\}, \{(3, 1)\}$.

解: $\{1, 3\}$ 是由两个数 1, 3 组成的集合,根据集合中元素的无序性,它与 $\{3, 1\}$ 是同一集合; $\{(1, 3)\}$ 是一个点(1, 3)组成的单元素集合, $\{(3, 1)\}$ 是一个点(3, 1)组成的单元素集合,由于(1, 3)和(3, 1)是两个不同的点,所以 $\{(1, 3)\}$ 与 $\{(3, 1)\}$ 是两个不同的集合.因此共表示三个不同集合. **点拨:**由集合中元素的无序性得知 $\{1, 3\}$ 与 $\{3, 1\}$ 表示同一集合.(1, 3)与(3, 1)表示的是直角坐标系中两个不同的点,所以 $\{(1, 3)\}$ 与 $\{(3, 1)\}$ 表示两个不同的集合.集合中元素的确定性、互异性、无序性是解本题的关键.

知识点 2 针对性练习

3. 集合 $\{3, x, x^2 - 2x\}$ 中, x 应满足的条件是.

4. 已知集合 $A = \{a + 2, (a + 1)^2, a^2 + 3a + 3\}$,若 $1 \in A$,求实数 a 的值.

知识点 3: 集合的表示方法(这是热点)

详解:集合的表示方法有:列举法、描述法、韦恩图法等.

(1)列举法:把集合中的元素一一列举出来,写在大括号内表示集合的方法,如 $\{1, 2, 3\}$.列举法适合表示有限集,当集合中的元素较少时,用列举法表示较为合适.

(2)描述法:把集合中的元素的公共属性描述出来,写在大括号内表示集合的方法,一般形式为 $\{p | p \text{ 适合的条件}\}$,如 $\{x | x = 2k, k \in \mathbb{Z}\}$.常适用于无限集.

描述法的语言形式有三种:文字语言、符号语言、图形语言,如表示由直线 $y = -x$ 上所有的点构成的集合,可用下列三种方法:

①文字语言形式:直线 $y = -x$ 上所有的点的集合;

②符号语言形式: $\{(x, y) | y = -x\}$;

③图形语言形式:在平面直角坐标系内画出直线 $y = -x$ (略).

(3)韦恩图法:用一封闭的曲线的内部来表示集合,其特点是形象、直观,但通常只作为一种解题的辅助工具,一般不用来表示集合最终结果.

警示:不同情况下应选择适当的表示法,正确地表示一个集合和通过对集合的认识去准确地理解一个集合中元素的特性,往往是解决集合相应问题的一个重要保证.

【例 3】 用适当的方法表示下列集合:

(1)由 2 和 3 的所有公倍数组成的集合;

(2)所有奇数组成的集合;

(3)绝对值小于 5 的整数.

解:(1)描述法表示为: $\{x | x = 6n, n \in \mathbb{Z}\}$; (2)描述法表示为: $\{x | x = 2n - 1, n \in \mathbb{Z}\}$; (3)列举法表示为: $\{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$;描述法表示为: $\{x | |x| < 5, x \in \mathbb{Z}\}$.

点拨:(1)中 2 和 3 的公倍数是 6 的倍数,用描述法.(2)所有的奇数有无穷多个,用描述法.(3)绝对值小于 5 的整数是有限

的,用列举法.

知识点 3 针对性练习

5. 用列举法表示下列集合:

(1) $\{x | x \text{ 是 } 15 \text{ 的约数}, x \in \mathbb{N}\}$;

(2) $\left\{x \left| x = \frac{|a|}{a} + \frac{|b|}{b}, a, b \text{ 为非零实数} \right.\right\}$;

(3) $\left\{(x, y) \left| \begin{cases} x + y = 2 \\ x - 2y = 4 \end{cases} \right.\right\}$;

(4) $\{x | x = (-1)^n, n \in \mathbb{N}\}$;

(5) $\{(x, y) | 3x + 2y = 16, x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{N}\}$.

6. 用描述法表示使 $y = \frac{x}{\sqrt{2-3x}}$ 有意义的实数 x 的集合.

知识点 4: 元素与集合的从属关系(这是重点)

详解:元素与集合有属于($\in$)和不属于($\notin$)两种关系.如果 a 是集合 A 的元素,就说 a 属于集合 A ,记作 $a \in A$;如果 a 不是集合 A 的元素,就说 a 不属于集合 A ,记作 $a \notin A$.给定的元素 a 和集合 A ,要么 $a \in A$,要么 $a \notin A$,二者必具其一,且只具其一.

警示:①符号“ $\in, \notin$ ”只能用在元素和集合之间,表示元素与集合的从属关系.如 $0 \in \mathbb{N}, 0 \notin \mathbb{N}^*$,除此之外,“ $\in, \notin$ ”没有其他用途.

②无论何时,“ $x \in \emptyset$ ”的写法都是错误的,应为 $x \notin \emptyset$.

③ a 与 $\{a\}$ 是不同的, a 表示一个元素, $\{a\}$ 表示由一个元素 a 构成的集合, 0 与 $\{0\}$ 是不同的.

④ $\{0\}$ 与 $\emptyset$ 是不同的. $\{0\}$ 含有一个元素 0 ,而 $\emptyset$ 不含任何元素.

【例 4】 用符号 $\in$ 或 $\notin$ 填空:

(1) $3.14 \quad \mathbb{Q}$; (2) $0 \quad \emptyset$;

(3) $2\sqrt{3} \quad \{x | x < \sqrt{11}\}$; (4) $\mathbb{R} \quad \{\mathbb{R}\}$.

解:(1) $\in$; (2) $\notin$; (3) $\notin$; (4) $\in$.

点拨:(1)中 $3.14 \neq \pi, 3.14 \in \mathbb{Q}$; (2) $\emptyset$ 不包含任何元素,故 $0 \notin \emptyset$; (3) $\{x | x < \sqrt{11}\}$ 是小于 $\sqrt{11}$ 的数组成的集合,而 $2\sqrt{3} > \sqrt{11}$,故 $2\sqrt{3} \notin \{x | x < \sqrt{11}\}$; (4) $\{\mathbb{R}\}$ 是以实数集为元素的集合,而 $\mathbb{R}$ 表示实数集,故 $\mathbb{R} \in \{\mathbb{R}\}$.

知识点 4 针对性练习

7. 已知 $A = \{x | x = 3n, n \in \mathbb{Z}\}, B = \{x | x = 3n + 1, n \in \mathbb{Z}\}, C = \{x | x = 3n + 2, n \in \mathbb{Z}\}$.若 $a \in A, b \in B, c \in C$,则()

A. $ab \in A \quad bc \in B \quad ca \in C$

B. $ab \in A \quad bc \in C \quad ca \in A$

C. $ab \in B \quad bc \in C \quad ca \in A$

D. $ab \in B \quad bc \in A \quad ca \in B$

8. 双元素集合 S 中元素均为自然数,若 $a \in S$ 且 $6 - a \in S$,则 $S =$.

知识点 5: 集合的分类(这是重点)

详解:根据“集合中元素个数是有限还是无限”的将集合分为三类:

(1)有限集:含有有限个元素的集合;

(2)无限集:含有无限个元素的集合;

(3)空集:不含任何元素的集合,记作 $\emptyset$.空集有两方面作用:①空集客观地反映了一些问题的实际意义,如不等式 $x^2 + 1 < 0$ 的解的集合是空集;②空集在反映集合与集合之间的关系上起到了“桥梁”的作用,使一些难以表达的问题得到了简明扼要的表述.如 $M = \{(x, y) | x + y = 16\}, N = \{(x, y) | x^2 + y^2 = 1\}$,则 M 与 N 的关系简记为 $M \cap N = \emptyset$.这一点将在第三节中作详细介绍.

【例 5】 用适当的方法表示下列集合,然后说出它们是有限

集还是无限集:

(1)由大于9的所有自然数组成的集合;

(2)由24与6的所有公约数组成的集合.

解:(1)用描述法表示为: $\{x|x>9, x\in\mathbf{N}\}$,集合是无限集;

(2)用列举法表示为: $\{1,2,3,6\}$,集合是有限集.

点拨:描述法适用于无限集,列举法适用于有限集.

知识点5 针对性练习

9.用描述法表示下列集合,然后说出它们是有限集,无限集还是空集:

(1)方程 $x^2-3x+3=0$ 的解的集合;

(2)所有正偶数组成的集合.

二、易错点和易忽略点导航

易错点和易忽略点:集合中元素的确定性、互异性、无序性

易错点和易忽略点导航:元素只有具备了确定性、互异性、无序性这三个特征才能组成一个集合.尤其是互异性,最易被忽视.同学们必须在学习中充分注意这一特性(集合中没有相同的元素).我们在判断两个集合是否相同时,首先是要分清集合中的元素,这样才会辨清集合是否相同.

【例6】已知 $x^2\in\{1,0,x\}$,求实数 x 的值.

错解:若 $x^2=0$,则 $x=0$,此时集合为 $\{1,0,0\}$.

若 $x^2=1$,则 $x=\pm 1$,当 $x=1$ 时,集合为 $\{1,0,1\}$;当 $x=-1$ 时,集合为 $\{1,0,-1\}$.

若 $x^2=x$,则 $x=0$ 或 $x=1$,集合同上.

综上所述实数 x 为 $\pm 1,0$.

错解分析:元素只有同时具备确定性、互异性、无序性这三个特征才能组成一个集合,而 $\{1,0,0\}$, $\{1,0,1\}$ 不符合集合中元素的互异性,故不能构成集合,所以 $x\neq 0$ 且 $x\neq 1$.

正确解法:若 $x^2=0$,则 $x=0$,此时集合为 $\{1,0,0\}$,舍去;若 $x^2=1$,则 $x=\pm 1$,当 $x=1$ 时,集合为 $\{1,0,1\}$,舍去;当 $x=-1$ 时,集合为 $\{1,0,-1\}$;若 $x^2=x$,则 $x=0$ 或 $x=1$.由上可知, $x=0$ 和 $x=1$ 都舍去.

综上所述 $x=-1$.

针对性练习

10.若 $\{1,2\}$ 与 $\{a,b\}$ 的元素相同,即()

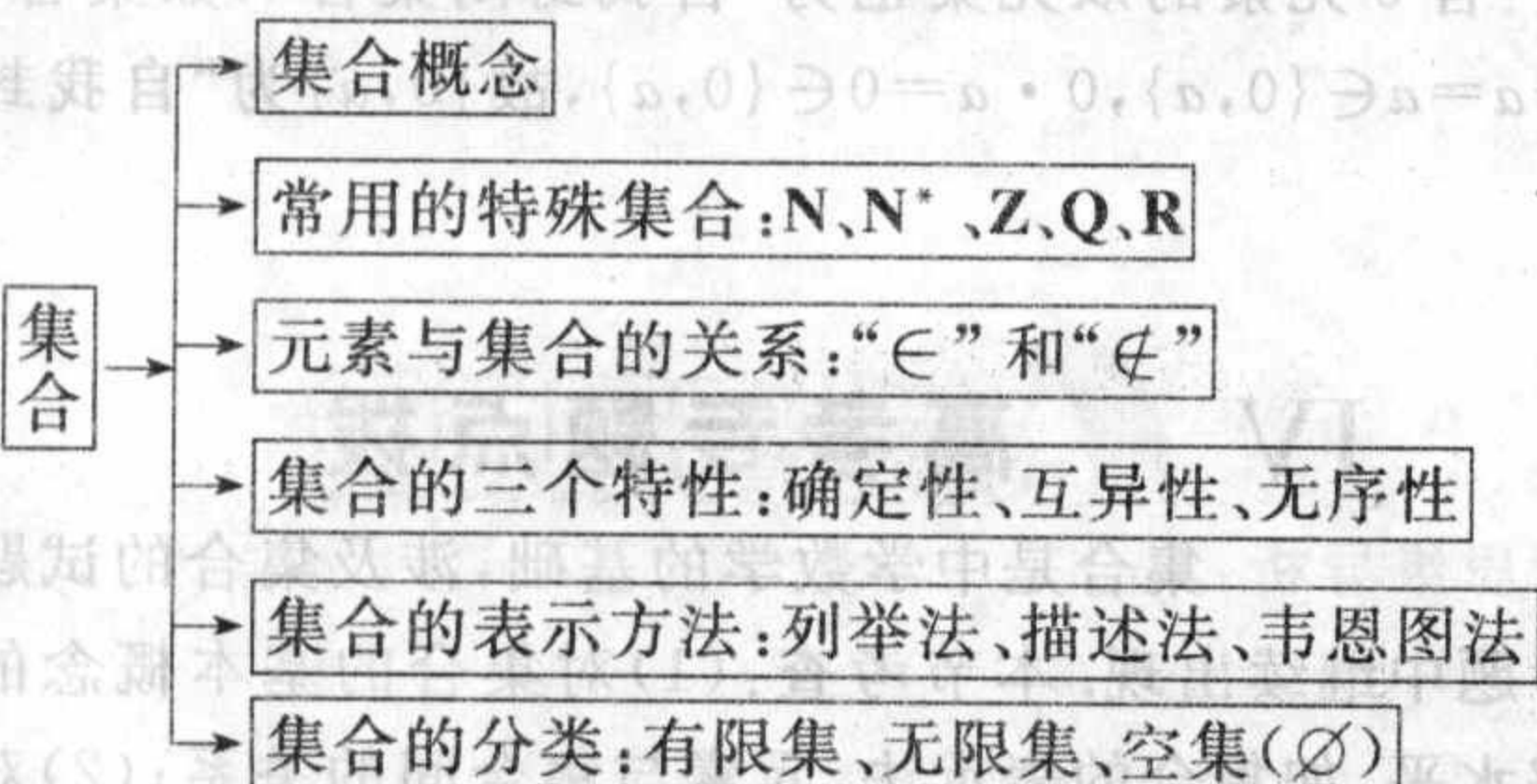
A. $\begin{cases} a=1 \\ b=2 \end{cases}$

B. $\begin{cases} a=2 \\ b=1 \end{cases}$

C. $\begin{cases} a=1 \\ b=2 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a=2 \\ b=1 \end{cases}$

D. 以上都不对

三、构建知识网络



四、针对性练习答案及点拨

1. ②

2. B 点拨:判断一些对象是否可以组成一个集合,关键抓住其元素是否“确定”.

3. $x\neq 3$,且 $x\neq 0$ 且 $x\neq -1$ 点拨:由集合中元素的互异性,可

知 $\begin{cases} x\neq 3, \\ x^2-2x\neq 3, \text{解得 } x\neq 3, \text{且 } x\neq 0, \text{且 } x\neq -1. \\ x^2-2x\neq x. \end{cases}$

4. 解:因为 $1\in A$,所以 $a+2, (a+1)^2, a^2+3a+3$ 都可能为1,所以需分类讨论.若 $a+2=1$,则 $a=-1$,此时 $A=\{1,0,1\}$ 与集合中元素的互异性矛盾,舍去.若 $(a+1)^2=1$,则 $a=0$ 或 $a=-2$.当 $a=0$ 时, $A=\{2,1,3\}$ 满足题意.当 $a=-2$ 时, $A=\{0,1,1\}$ 与集合中元素的互异性矛盾,舍去.若 $a^2+3a+3=1$,则 $a=-1$ (舍去)或 $a=-2$ (舍去).综上所述 $a=0$. 点拨:在解决有关集合中元素的问题时,互异性很重要,应引起重视.

5. 解:(1) x 是15的约数,且 x 是自然数,故集合为 $\{1,3,5,15\}$;(2)关键是根据绝对值的意义化简 $x=\frac{|a|}{a}+\frac{|b|}{b}$.当 $a>0, b>0$ 时, $x=2$;当 $a<0, b<0$ 时, $x=-2$;当 a, b 异号时, $x=0$.故用列举法表示为 $\{-2,0,2\}$;(3)集合的代表元素为 (x,y) ,是一对有序数对,故集合为 $\left\{\left(\frac{8}{3}, -\frac{2}{3}\right)\right\}$;(4)集合为 $\{-1,1\}$;

(5)集合为 $\{(0,8), (2,5), (4,2)\}$.

6. 解:要使 $y=\frac{x}{\sqrt{2-3x}}$ 有意义,需满足 $2-3x>0$,即 $x<\frac{2}{3}$.用描述法表示为 $\left\{x\left|x<\frac{2}{3}\right.\right\}$. 点拨:要使 $\sqrt{2-3x}$ 有意义,

则 $2-3x\geq 0$,要使 $\frac{x}{\sqrt{2-3x}}$ 有意义,则 $\sqrt{2-3x}\neq 0$,则使原式有意义的条件为 $2-3x>0$.

7. B 点拨:解法一:令 $a=3n, b=3m+1, c=3s+2, n, m, s\in\mathbf{Z}$, $ab=3n(3m+1)=3(3mn+n)\in A$,

$bc=(3m+1)(3s+2)=9ms+6m+3s+2=3(3ms+2m+s)+2\in C$, $ca=(3s+2)3n=3(3ns+2n)\in A$,故选 B.

解法二:取 $a=0, b=1, c=2$.

有 $ab=0\in A, bc=2\in C, ca=0\in A$,故选 B. ①判断元素与集合的关系,应根据集合中元素的特征看该元素是否可以表示成该集合的形式;②解法二中的特殊值法是解选择题的一个重要方法.

8. $\{1,5\}$ 或 $\{2,4\}$ 或 $\{0,6\}$ 点拨:注意“双元素”集合,由题知集合 S 中元素和为6.

9. 解:(1) $\{x|x^2-3x+3=0\}$,集合是空集;(2) $\{x|x=2k, k\in\mathbf{N}^*\}$,集合是无限集. 点拨:判断集合是有限集、无限集还是空集的标准是依据定义.注意方程 $x^2-3x+3=0$ 无解,所以(1)题中的集合是空集.

10. C 点拨:集合 $\{1,2\}$ 与 $\{2,1\}$ 是同一集合,若对集合中元素的无序性理解不透彻,忽视这一点就会出现漏解情况;因此 a 的可能值为1或2, b 的可能值为2或1.

III 创新讲解

一、学科综合思维专题点拨

学科综合思维导航:本节综合题常与求一元二次方程的根之类的问题综合起来进行考查.解此类问题,首先要正确理解集合语言,认清集合中含有怎样的元素,其次将集合语言转化成相应的数学语言来求解.

【例1】已知集合 $A=\{x|ax^2+2x+1=0, a\in\mathbf{R}\}$,若 A 中至多有一个元素,求满足条件的 a 的所有可能取值组成的集合.

解: A 中至多有一个元素包括两种情形,即 A 中只有一个元素和 A 是空集.

(1)若 A 中只有一个元素时,当 $a=0$ 时,方程 $2x+1=0$ 只有一个根;当 $a\neq 0$ 时, $\Delta=0$,即 $4-4a=0$,所以 $a=1$;

(2)若 A 为空集,则有 $\begin{cases} a\neq 0, \\ \Delta=4-4a<0 \end{cases}$ 解得: $a>1$.

无论就字面来说,还是就实际情况来说,幸福都是神圣的起源和基础.

名言警句

综上所述满足条件的 a 的所有可能取值组成的集合为 $\{a \mid a=0 \text{ 或 } a \geq 1\}$.

点拨: 集合 A 中至多有一个元素包括 A 中只有一个元素和 A 是空集两种情况, 很多同学容易忽视 A 是空集这一特殊情况, 这也说明同学们没有牢固掌握和理解空集这一概念. 关于集合的分类, 尤其对于空集的考查历年来都是高考热点, 必须加以重视.

二、实际应用思维专题点拨

实际应用思维导析: 集合理论有着非常丰富和引人入胜的内容, 运用集合的观点分析、处理实际问题, 培养由具体到抽象, 由抽象到具体的思维方式. 实际应用中常涉及集合的概念问题, 解决这类问题要正确理解集合中元素的特性: 确定性、互异性和无序性.

【例 2】 考查以下各对象能否构成一个集合:

- (1) 某校高一年级头发长的人;
- (2) 世界上最高的山峰;
- (3) 某次数学测验后各位同学的考分;
- (4) π 值的近似数.

解: (1) “头发长”无明确判断标准, 对于某人头发是否“长”无法客观地断定, 因此(1)不能构成集合;

(2) 世界上最高的山峰是珠穆朗玛峰, 已经确定, 故(2)能构成集合;

(3) 某次数学测验后各位同学的考分, 是可以确定的, 故(3)能构成集合;

(4) 近似程度没有指定, 故仍无法说明一个数是否为 π 值的近似数, 如 π 值精确到 0.01 时, 近似数是 3.14 而不是 3.1 或 3.142, 因此(4)不能构成集合.

点拨: 元素的确定性是指任给一个对象, 总能说明它是在这个集合中, 还是不在这个集合中, 二者必具其一, 且只具其一. 因此明确判定是否构成数学意义上的集合的标志是: 能否找到用以判定每一具体对象是否属于集合的明确标准.

三、创新思维专题点拨

创新思维导析: 创新思维以理解和掌握集合的基本概念及应用为基础目的, 培养学生的创新意识, 如对新信息要有敏锐的捕捉能力和很好的理解能力, 或能够找出各题间的联系, 达到举一反三的目的.

【例 3】 (新信息题) 定义集合 A, B 的一种运算: $A * B = \{x \mid x = x_1 + x_2, \text{ 其中 } x_1 \in A, x_2 \in B\}$, 若 $A = \{1, 2, 3\}, B = \{1, 2\}$, 则 $A * B$ 中所有元素的和为()

- A. 9 B. 14 C. 18 D. 21

解: B **点拨:** 由题意可知 $A * B = \{2, 3, 4, 5\}$. 所以 $A * B$ 中所有元素的和为 $2+3+4+5=14$, 故应选 B.

根据信息求出集合中的元素, 注意元素要满足确定性、互异性、无序性.

【例 4】 (巧题妙解) 含有三个实数的集合可表示为 $\left\{a, \frac{b}{a}, 1\right\}$, 也可表示成 $\{a^2, a+b, 0\}$, 求 $a^{2004} + b^{2004}$ 的值.

解: 依题意有 $\left\{a, \frac{b}{a}, 1\right\} = \{a^2, a+b, 0\}$. 因为 $a \neq 0, 1 \neq 0$, 所以 $\frac{b}{a} = 0$, 所以 $b = 0$, 故 $\{a, 0, 1\} = \{a^2, a, 0\}$, 所以 $a^2 = 1$,

即 $a = \pm 1$. 因为 $a = 1$ 时, 不满足集合元素的互异性, 故舍去.

所以 $a = -1$, 故所给集合为 $\{-1, 0, 1\}$.

$a^{2004} + b^{2004} = (-1)^{2004} + 0 = 1$.

点拨: 由于 $\left\{a, \frac{b}{a}, 1\right\}$ 可表示为 $\{a^2, a+b, 0\}$. 根据集合相等, 可得“对应”元素相等, 并运用集合元素的互异性巧妙解决问题.

四、研究性学习思维专题点拨

(一) 科学探究思维专题点拨

科学探究思维导析: 本节探究性思维专题考查“等价转化”思想在集合中的应用. 通过体验探究过程, 培养学生分析问题、解决问题的能力.

【例 5】 集合 $A = \{x \mid x = 3n + 1, n \in \mathbb{Z}\}, B = \{x \mid x = 3n + 2, n \in \mathbb{Z}\}, C = \{x \mid x = 6n + 3, n \in \mathbb{Z}\}$.

(1) 若 $c \in C$, 问是否有 $a \in A, b \in B$, 使 $c = a + b$.

(2) 对于任意 $a \in A, b \in B$, 是否一定有 $a + b \in C$? 并证明你的结论.

解: (1) 令 $c = 6m + 3 (m \in \mathbb{Z})$, 则 $c = 3m + 1 + 3m + 2$. 令 $a = 3m + 1, b = 3m + 2$, 则 $c = a + b$. 故若 $c \in C$, 一定有 $a \in A, b \in B$, 使 $c = a + b$ 成立. (2) 不一定有 $a + b \in C$. 证明如下: 设 $a = 3m + 1, b = 3n + 2, m, n \in \mathbb{Z}$, 则 $a + b = 3(m + n) + 3$, 因此当 $m + n = 2k (k \in \mathbb{Z})$ 时, $a + b = 6k + 3 \in C$. 当 $m + n = 2k + 1 (k \in \mathbb{Z})$ 时, $a + b = 6k + 6 \notin C$.

点拨: (1) 中由 $c \in C$ 可写出 c 的表达形式, 再根据 A, B 中元素特征构造 a, b ; (2) 中可表示 a, b , 然后寻找 $a + b$, 在探索过程中, 要紧抓各元素的特征, 利用构造法去寻找, 同时注意分类讨论的思想运用.

(二) 开放性思维专题点拨

开放性思维导析: 给定一个集合, 则集合中元素的属性便知道了; 给定集合中元素的属性, 那么满足这一属性的集合不一定唯一. 一般地, 只要写出满足条件的其中一个集合即可.

【例 6】 如果对于一个集合中的任意两个元素, 它们相加和相乘后的结果仍在这个集合中, 定义该集合为“自我封闭集合”, 请写出一个“自我封闭集合”并解释.

解: 可考虑所学的几个特殊集合: $\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{N}, \mathbb{Z}$ 等无限集.

设任意 $x, y \in \mathbb{R}$, 则 $x + y \in \mathbb{R}, xy \in \mathbb{R}$. 因此 $\mathbb{R}$ 为“自我封闭集合”.

设任意 $x, y \in \mathbb{N}$, 则 $x + y \in \mathbb{N}, xy \in \mathbb{N}$, 因此 $\mathbb{N}$ 为“自我封闭集合”.

设任意 $x, y \in \mathbb{Q}$, 则 $x + y \in \mathbb{Q}, xy \in \mathbb{Q}$, 因此 $\mathbb{Q}$ 为“自我封闭集合”.

同理可得 $\mathbb{Z}, \mathbb{N}^*$ 等无限集均为“自我封闭集合”.

点拨: 含 0 元素的双元集也为“自我封闭集合”, 如集合 $\{0, a\}$ 中, $0 + a = a \in \{0, a\}, 0 \cdot a = 0 \in \{0, a\}$, 故 $\{0, a\}$ 为“自我封闭集合”.

IV 高考专题点拨

高考思维导析: 集合是中学数学的基础, 涉及集合的试题将会在高考题中继续出现. 本节考查: (1) 对集合的基本概念的认识和理解水平. 如集合的表示法, 元素与集合间的关系; (2) 对集合知识的应用水平, 如求不等式的解集等. 常以选择题、填空题的形式出现. 在考查集合知识的同时重点考查准确使用数学语言的能力及用数形结合, 分类讨论的思想方法解决问题的能力.

【例】 (2006, 山东, 5 分) 定义集合运算: $A \odot B = \{z \mid z = xy(x + y), x \in A, y \in B\}$. 设集合 $A = \{0, 1\}, B = \{2, 3\}$, 则集合 $A \odot B$ 的所有元素之和为()

- A. 0 B. 6 C. 12 D. 18

解: D **点拨:** 当 $x = 0$ 时, 不管 y 取何值, $A \odot B = 0$, 当 $x =$

1,且 $y=2$ 时, $A \odot B = 1 \times 2 \times (1+2) = 6$; 当 $x=1$, 且 $y=3$ 时, $A \odot B = 1 \times 3 \times (1+3) = 12$. 综上, 集合 $A \odot B$ 的所有元素之和为 $0+6+12=18$. 本题是一道新信息题, 主要考查了集合的基本概念与分析问题、解决问题的能力.

V 趣味阅读

集合论的创始人

德国疯人数学家康托(1845~1918), 是集合论的创始人, 他引入了基数的概念, 定义了聚点、闭集、开集等概念, 他是维数理论的开拓者, 维数理论是点集理论的起源, 康托的老师克隆尼克、康托的好友数学家施瓦兹等都强烈反对集合论并且攻击他、阻止他, 他在患 34 年的精神病之后去世.

VI 强化练习题

A卷: 基础训练题 (60分 45分钟) (143)

一、选择题(每题5分, 共20分)

- (测试知识点1) 下列表述: ①充分接近 $\sqrt{2}$ 的实数的全体 ②方程 $x^2+x-1=0$ 的实数根 ③全国著名的高等院校 ④个子很高的学生, 能够构成集合的是()
A. ①② B. ①③ C. ② D. ①②③④
- (测试知识点2) 已知集合 $A = \{a, b, c\}$ 中的三个元素, 可成为 $\triangle ABC$ 的边长, 则 $\triangle ABC$ 一定不是()
A. 等腰三角形 B. 直角三角形
C. 锐角三角形 D. 钝角三角形
- (测试知识点3) 若集合 $A = \{x | -3 < x < 2, x \in \mathbf{N}\}$, 则集合 A 为()
A. $\{1\}$ B. $\{0, 1\}$ C. $\{-2, -1, 0, 1\}$ D. 以上均不对
- (测试知识点4) 已知集合 $A = \{\text{平行四边形}\}$, a 为菱形, b 为梯形, c 为矩形, d 为正方形, 则下列不正确的是()
A. $a \in A$ B. $b \in A$ C. $c \in A$ D. $d \in A$

二、填空题(每题4分, 共16分)

- (测试知识点3) 方程组 $\begin{cases} x+y=1, \\ x-y=3 \end{cases}$ 的解集用列举法表示为 _____, 用描述法表示为 _____.
- (测试知识点3) 已知集合 $\left\{m \mid \frac{6}{5-m} \in \mathbf{N}^* \text{ 且 } m \in \mathbf{Z}\right\}$, 用列举法表示该集合为 _____.
- (测试易错点和易忽略点) 把下列集合用另一种方法表示出来.
(1) $\{x | y = x^2 + 1\} =$ _____.
(2) $\{(x, y) | y = x^2 + 1\} =$ _____.
- (测试知识点4) 若 $2 \in \{x | x^2 + px - 2 = 0\}$, 则 $p =$ _____.

三、解答题(10分)

- (测试知识点1, 2) 已知: $1 \in \{x | x^2 - 2x + a = 0\}$, 求集合 $A = \{x | x^2 - ax - 2 = 0\}$ 中所有元素的和.

四、一题多解题(14分)

- (测试知识点1, 3, 4) 已知集合 $A = \{x | x^2 + px + q = x\}$, 集合 $B = \{x | (x-1)^2 + p(x-1) + q = x+1\}$. 当集合 $A = \{2\}$ 时, 求集合 B .

B卷: 新课标新题型练习 (50分 30分钟) (143)

一、学科内综合题(每题5分, 共10分)

- 集合 $M = \{(x, y) | xy \geq 0, x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}\}$ 的意义是()
A. 第一象限的点 B. 第三象限的点
C. 第一象限和第三象限的点
D. 既不在第二象限也不在第四象限的点
- 方程组 $\begin{cases} x-y+1=0, \\ 2x+y-4=0 \end{cases}$ 的解集可以表示为 ① $(1, 2)$, ② $\{(1, 2)\}$, ③ $\{x, y | x=1, y=2\}$, ④ $\begin{cases} x=1, \\ y=2 \end{cases}$, ⑤ $\left\{(x, y) \mid \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}\right\}$, 以上正确的个数有()
A. 5个 B. 4个 C. 3个 D. 2个

二、实际应用题(5分)

- 某电脑用户计划使用不超过 500 元的资金购买单价分别为 60 元、70 元的单片软件和盒装磁盘, 根据需要, 软件至少买 3 片, 磁盘至少买 2 盒, 则不同的选购方式有()
A. 5种 B. 6种 C. 7种 D. 8种

三、创新题(4题10分, 5题5分, 共15分)

- (巧题妙解) 设 $A = \{a | a^2 - 2a - 3 = 0, a \in \mathbf{N}\}$, 求集合 $B = \{x | (x-a)[x-(a+1)][x-(a+2)] \cdots [x-(a+10)] = 0 \text{ 且 } a \in A\}$ 中元素的和.

- (新信息题) 定义 $A - B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \notin B\}$, 若 $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, $B = \{1, 4, 8\}$, 则 $A - B$ 等于()
A. $\{4, 8\}$ B. $\{1, 2, 6, 10\}$ C. $\{1\}$ D. $\{2, 6, 10\}$

四、研究性学习练习题(10分)

- (开放题) 已知数集 A 满足条件: $a \neq 1$, 若 $a \in A$, 则 $\frac{1}{1-a} \in A$.
(1) 已知 $2 \in A$, 求证: 在 A 中必定还有两个元素;

点滴的进展是缓慢而艰巨的, 一个人一次只能着手解决一项具体的问题.

名言警句

(2)请你自己设计一个数属于 A ,再求出 A 中一定含有的其他元素.

五、推理论述题(10分)

7. 当 m, n 满足什么条件时,集合 $A = \{x | m^2 x^2 + n = 0\}$ 是有限集、无限集、空集?

第2节 子集、全集、补集

I 课前准备

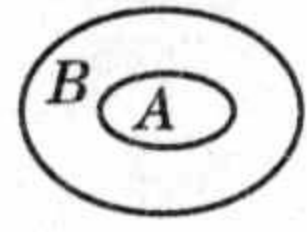
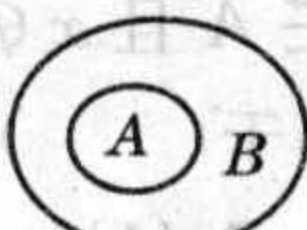
一、关键概念、原理和符号提示

关键概念:子集、真子集、集合相等、全集与补集.

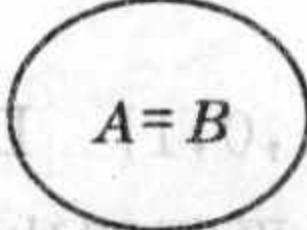
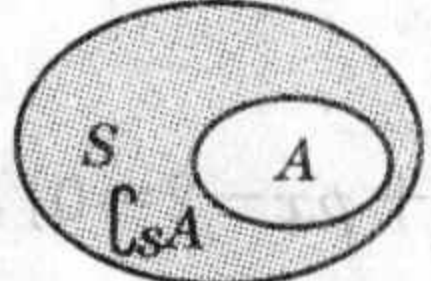
关键原理:集合与集合间的“包含”、“相等”关系.

关键符号:属于“ $\in$ ”、不属于“ $\notin$ ”、包含于“ $\subseteq$ ”、包含“ $\supseteq$ ”、不包含于“ $\not\subseteq$ ”、不包含“ $\not\supseteq$ ”、等于“ $=$ ”、补集“ $\complement_s A$ ”、真包含于“ $\subsetneq$ ”、真包含“ $\supsetneq$ ”.

二、必记知识背牢

序号	必记知识	必记内容	巧记方法
1	子集	(1)定义:一般地,对于两个集合 A 与 B ,如果集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素,我们就说集合 A 包含于集合 B ,或集合 B 包含集合 A ,这时我们也说集合 A 是集合 B 的子集,记作 $A \subseteq B$ (或 $B \supseteq A$); (2)用韦恩图表示. 	如果对任意 $x \in A$ 必有 $x \in B$,则 $A \subseteq B$.
2	真子集	(1)定义:对于两个集合 A 与 B ,如果 $A \subseteq B$,并且 $A \neq B$,我们就说集合 A 是集合 B 的真子集,记作 $A \subsetneq B$ (或 $B \supsetneq A$); (2)用韦恩图表示. 	若 $A \subseteq B$,至少有一个 $y \in B$,但 $y \notin A$,则 $A \subsetneq B$.

续表

3	集合相等	(1)定义:一般地,对于两个集合 A 与 B ,如果集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素,同时集合 B 的任何一个元素都是集合 A 的元素,我们就说集合 A 等于集合 B ,记作 $A = B$; (2)用韦恩图表示如图. 	如果 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$,则 $A = B$,或两个集合中元素完全相同,那么这两个集合相等.
4	全集	如果集合 S 含有我们所要研究的各个集合的全部元素,这个集合就可以看作一个全集,全集通常用 U 表示.	全集包含各个集合的全部元素.
5	补集	(1)定义:一般地,设 S 是一个集合, A 是 S 的一个子集,由 S 中所有不属于 A 的元素组成的集合,叫做 S 中子集 A 的补集,记作 $\complement_s A$,即 $\complement_s A = \{x x \in S, \text{且 } x \notin A\}$. (2)图中阴影部分表示 A 在 S 中的补集,记作 $\complement_s A$. 	集合 $\complement_s A$ 是集合 S 除去集合 A 后余下的集合.

II 基础知识必备

一、精彩点拨教材知识

知识点1:子集(这是重点)

详解:两个集合之间存在着“包含”关系,对于 A, B 两个集合,如果集合 A 的任何一个元素,都是集合 B 的元素,则称集合 A 包含于集合 B (或称集合 B 包含集合 A). 记作:“ $A \subseteq B$ ” (“ $B \supseteq A$ ”),读作“ A 包含于 B ” (或“ B 包含 A ”).

亦称:集合 A 是集合 B 的子集.

但若集合 A 不包含于集合 B (或集合 B 不包含集合 A) 时 (此时两个集合中的元素有什么关系?), 则记作 $A \not\subseteq B$ (或 $B \not\subseteq A$), 读作 A 不包含于 B (或 B 不包含 A).

拓展: 理解子集概念应注意以下几点:

(1) 规定: 空集 ($\emptyset$) 是任何集合的子集, 即对于任意一个集合, 有 $\emptyset \subseteq A$;

(2) 任何一个集合是它本身的子集, 即对于任意一个集合 A , 有 $A \subseteq A$;

(3) 对于集合 A, B, C , 如果 $A \subseteq B, B \subseteq C$, 那么 $A \subseteq C$;

(4) 集合 A 不包含于集合 B ($A \not\subseteq B$), 包括如图 1-2-1 所示的几种情况:

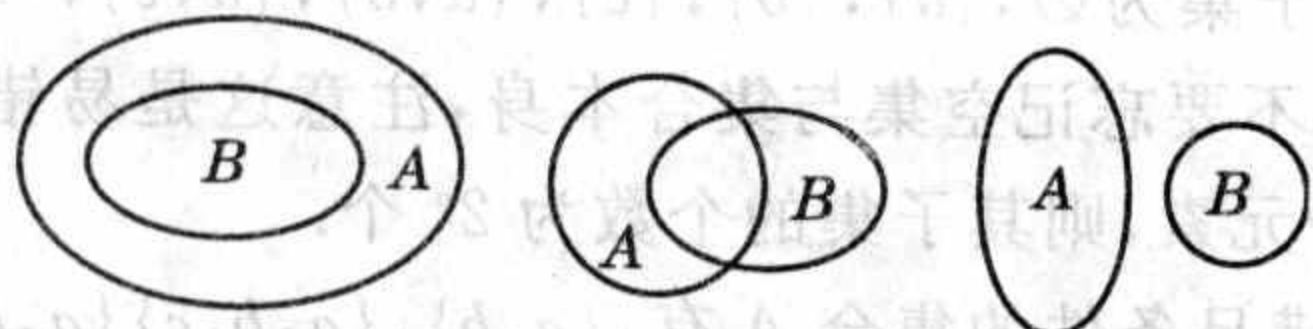


图 1-2-1

【例 1】 已知两个集合 A 与 $B, A = \{x | 1 < x < 3\}$ 与 $B = \{x | 0 < x < 2\}$, 那么 A (或 B) 是 B (或 A) 的子集吗? 用符号表示它们之间的关系.

解: A 不是 B 的子集且 B 也不是 A 的子集, 因为它们均有一些元素不在另一集合中, 其关系用符号表示为 $A \not\subseteq B$ (或 $B \not\subseteq A$).

点拨: 根据子集的定义作出判断.

知识点 1 针对性练习

1. 写出集合 $\{a, b, c\}$ 的所有子集.

知识点 2: 真子集和集合相等 (这是重难点)

详解: (1) 集合相等: 若集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素, 同时集合 B 的任何一个元素都是集合 A 的元素, 就说集合 A 等于集合 B , 记作 $A = B$.

值得注意的是: ① 若 $A \subseteq B$, 同时 $B \subseteq A$, 则 $A = B$; ② 欲证 $A = B$, 只需证 $A \subseteq B$, 且 $B \subseteq A$ 即可.

(2) 真子集: 如果集合 A 是集合 B 的子集, 且 A 与 B 不相等, 则称 A 是 B 的真子集 (即若 $A \subseteq B$, 且 $A \neq B$, 则 $A \subsetneq B$ 或 $B \supsetneq A$), 如图 1-2-2 所示.



图 1-2-2

真子集有以下性质:

① 若 $A \neq \emptyset$, 则 $\emptyset \subsetneq A$ (空集是任何非空集合的真子集).

② 若 $A \subsetneq B, B \subsetneq C$, 则 $A \subsetneq C$ (“真包含”关系也具有传递性).

警示: ① 集合 A 是集合 B 的真子集, 也可说成: A 是 B 的子集, 并且 B 中至少存在一个元素不是 A 中的元素; ② $A \subseteq B$ 的三

种情形 $\begin{cases} A = \emptyset, \\ A \subsetneq B, \\ A = B. \end{cases}$

【例 2】 用适当的符号表示以下各组对象之间的关系:

(1) 0 $\underline{\hspace{1cm}}$ $\{0\}$; (2) $\{0, 1\}$ $\underline{\hspace{1cm}}$ $\{(0, 1)\}$;

(3) $\left\{x \mid x = \frac{n}{2}, n \in \mathbb{Z}\right\}$ $\underline{\hspace{1cm}}$ $\mathbb{Z}$;

(4) $\left\{x \mid x = \frac{(-1)^n + 1}{2}, n \in \mathbb{Z}\right\}$ $\underline{\hspace{1cm}}$ $\{0, 1\}$.

解: (1) $\in$; (2) $\neq$; (3) $\supseteq$; (4) $=$

点拨: (1) 0 是集合 $\{0\}$ 中的元素, 所以 $0 \in \{0\}$;

(2) 集合 $\{0, 1\}$ 是含有两个元素 0 与 1 的集合, 而集合 $\{(0, 1)\}$ 是以有序实数对 $(0, 1)$ 为元素的单元素集合, 所以两集合互不包含, 即 $\{0, 1\} \not\subseteq \{(0, 1)\}, \{(0, 1)\} \not\subseteq \{0, 1\}$, 所以 $\{0, 1\} \neq \{(0, 1)\}$.

(3) 当 $n = 2k$ 时 ($k \in \mathbb{Z}$), $x = \frac{n}{2} = k$; 当 $n = 2k + 1$ ($k \in \mathbb{Z}$) 时,

把希望建筑在意欲和心愿上面的人们, 十之八九都会失望.

$x = \frac{n}{2} = k + \frac{1}{2}$, 集合 $\left\{x \mid x = \frac{n}{2}, n \in \mathbb{Z}\right\} = \left\{x \mid x = k \text{ 或 } x = k + \frac{1}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$, 则 $\left\{x \mid x = \frac{n}{2}, n \in \mathbb{Z}\right\} \supsetneq \mathbb{Z}$.

(4) $\left\{x \mid x = \frac{(-1)^n + 1}{2}, n \in \mathbb{Z}\right\} = \{0, 1\}$.

本题考查各种符号的区别, 注意弄清是元素与集合的关系, 还是集合与集合的关系.

知识点 2 针对性练习

2. 写出满足 $\{a, b\} \subseteq A \subseteq \{a, b, c, d\}$ 的所有集合 A .

3. 设集合 $A = \{x | x^2 - 8x + 15 = 0\}, B = \{x | ax - 1 = 0\}$, 若 $B \subseteq A$, 求实数 a 的所有可能取值构成的集合.

知识点 3: 全集和补集 (这是重点)

详解: (1) 全集概念: 在研究集合与集合之间的关系时, 有时这些集合都是某一给定的集合的子集, 这个给定的集合可以看成是一个全集, 可用符号 S 表示, 也就是说: 全集含有我们所要研究的各个集合中的全部元素. 全集通常用 U 表示.

(2) 补集概念: 设 S 是一个集合, A 是 S 的一个子集 (即 $A \subseteq S$), 由 S 中所有不属于 A 的元素组成的集合, 叫做 S 中子集 A 的补集 (或余集), 记作 $\complement_S A$, 即 $\complement_S A = \{x | x \in S, \text{ 且 } x \notin A\}$. 补集性质: $\complement_S S = \emptyset, \complement_S \emptyset = S, \complement_S (\complement_S A) = A$. 用韦恩图表示, 如图 1-2-3 所示.

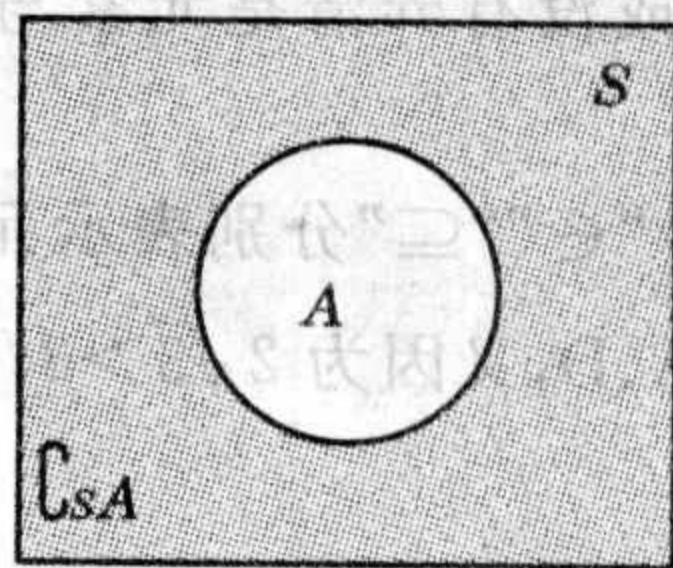


图 1-2-3

警示: (1) 补集是以“全集”为前提加以定义的, 而全集又是相对于所研究的问题而言的一个概念, 是与所研究的问题相关的所有集合;

(2) 所谓 $\complement_U A = \{x | x \in U, \text{ 且 } x \notin A\}$, 就是说从全集 U 中取出集合 A 的全部元素, 所有剩余的元素组成的集合就是 $\complement_U A$;

(3) 全集 U 与给定问题中的数集或点集有关, 具有相对性.

【例 3】 在下列各组集合中, U 为全集, A 为 U 的子集, 求 $\complement_U A$.

(1) $U = \mathbb{R}, A = \{x | -1 \leq x < 2\}$;

(2) $U = \{\text{至少有一组对边平行的四边形}\}, A = \{\text{梯形}\}$;

(3) $U = \mathbb{Z}, A = \{x | x = 3n, n \in \mathbb{Z}\}$.

解: (1) 如图 1-2-4, 因为实数与数轴上的点一一对应, 在数轴上分析 A 及 $\complement_U A$ 一目了然, 所以 $\complement_U A = \{x | x < -1 \text{ 或 } x \geq 2\}$;

(2) “至少有一组对边平行”包含两层意思: “有且只有一组对边平行” (梯形) 和 “两组对边都平行” (平行四

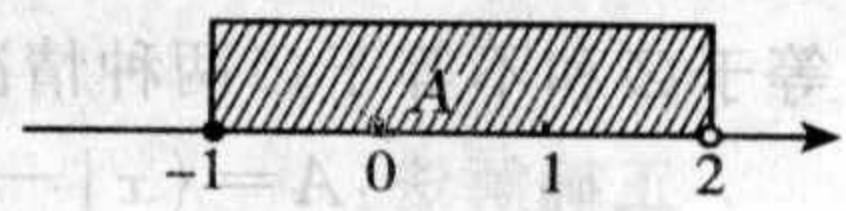


图 1-2-4

边形). 则 U 是梯形与平行四边形组成的集合, 所以 $\complement_U A = \{\text{平行四边形}\}$;

(3) 整数可分三类: 被 3 整除的数, $x = 3k$ ($k \in \mathbb{Z}$), 被 3 整除余 1 的数, $x = 3k + 1$ ($k \in \mathbb{Z}$) 和被 3 整除余 2 的数, $x = 3k - 1$ ($k \in \mathbb{Z}$). 所以 $\complement_U A = \{x | x = 3k \pm 1, k \in \mathbb{Z}\}$.

点拨: 根据补集的定义求解, 注意 (1) 中用图形直观、简便.

知识点 3 针对性练习

4. 设全集 $U = \{2, 4, -(a-3)^2\}, A = \{2, a^2 - a + 2\}$, 若 $\complement_U A = \{-1\}$, 则实数 $a = \underline{\hspace{1cm}}$.

5. 已知全集 U, M, N 是 U 的非空子集, 若 $\complement_U M \supseteq N$, 则 ()

A. $M \subseteq \complement_U N$

B. $M \subsetneq \complement_U N$

C. $\complement_U M = \complement_U N$

D. $M = N$

二、易错点和易忽略点导析

易错点:注意区分一些易混淆的符号

易错点导析:要注意一些符号的区别:

(1) $\in$ 与 $\subseteq$ 的区别: $\in$ 表示集合与元素之间的关系,例如 $1 \in \mathbf{N}$, $-1 \notin \mathbf{N}$ 等; $\subseteq$ 表示集合与集合之间的关系,如 $\mathbf{N} \subseteq \mathbf{R}$, $\emptyset \subseteq \mathbf{R}$ 等.

(2) a 与 $\{a\}$ 的区别:一般地, a 表示一个元素,而 $\{a\}$ 表示只有一个元素的集合,例如 $1 \in \{1, 2, 3\}$, $0 \in \{0\}$, $\{1\} \subseteq \{1, 2, 3\}$ 等.不能写成 $0 = \{0\}$, $\{1\} \in \{1, 2, 3\}$, $1 \subseteq \{1, 2, 3\}$.

(3) $\{0\}$ 与 $\emptyset$ 的区别: $\{0\}$ 是含一个元素 0 的集合, $\emptyset$ 是不含任何元素的集合,因此 $\emptyset \subseteq \{0\}$. 不能写成 $\emptyset = \{0\}$, $\emptyset \in \{0\}$.

【例 4】在下列各式中,正确的是()

A. $2\sqrt{3} \subseteq \{x | x \leq 4\}$

B. $2\sqrt{3} \in \{x | x \leq 4\}$

C. $\{2\sqrt{3}\} \subseteq \{x | x \leq 3\}$

D. $\{2\sqrt{3}\} \in \{x | x \leq 4\}$

错解: A 或 D

错解分析:因符号“ $\in$ ”表示元素与集合之间的从属关系,“ $\subseteq$ ”(或 $\subsetneq$)表示集合与集合间的包含或真包含关系, $\{2\sqrt{3}\}$ 是元素 $2\sqrt{3}$ 构成的集合,所以错选 A、D 的原因可能是混淆了以上所讲的符号之间的区别或没有弄清是元素与集合的关系,还是集合与集合的关系.

正确解法:由符号“ $\in$ ”“ $\subseteq$ ”分别表示元素与集合,集合与集合之间的关系,排除 A、D,又因为 $2\sqrt{3} > 3$,排除 C,故选 B.

针对性练习

6. 下列关系错误的是()

A. $\emptyset \subsetneq \{0\}$

B. $0 \in \{0\}$

C. $0 \in \emptyset$

D. $\emptyset \in \{\emptyset\}$

易忽略点:解题中忽视空集

易忽略点导析:空集是一个特殊而重要的集合,因为它不含任何元素,所以在解题过程中极易被忽视,特别是在题设中隐含有空集参与的集合问题时,忽视空集的特殊性质往往导致错解.

【例 5】已知集合 $A = \{x | -x^2 + 3x + 10 \geq 0\}$, $B = \{x | m + 1 \leq x \leq 2m - 1\}$,若 $B \subseteq A$,求实数 m 的取值范围.

错解: $A = \{x | -2 \leq x \leq 5\}$,由 $m + 1 \leq 2m - 1$,得 $m \geq 2$.

又由 $B \subseteq A$,得 $\begin{cases} m + 1 \geq -2, \\ 2m - 1 \leq 5 \end{cases}$ 解得 $-3 \leq m \leq 3$,所以 $2 \leq m \leq 3$.

3. 所以实数 m 的取值范围是 $\{m | 2 \leq m \leq 3\}$.

错解分析: $B \subseteq A$ 可分三种情况:① $B = \emptyset$;② $B \subsetneq A$;③ $B = A$,错解中忽视了空集这种情况而出现错误.解此类已知集合间包含关系,求某集合中所含参数问题时,一般要考虑被包含集合等于 $\emptyset$ 和 不等于 $\emptyset$ 两种情况.

正确解法: $A = \{x | -2 \leq x \leq 5\}$,由 $B \subseteq A$,分两种情况:

(1) 当 $B \neq \emptyset$ 时,由 $m + 1 \leq 2m - 1$,得 $m \geq 2$,又由 $B \subseteq A$,得 $\begin{cases} m + 1 \geq -2, \\ 2m - 1 \leq 5 \end{cases}$ 得 $-3 \leq m \leq 3$,所以 $2 \leq m \leq 3$.

(2) 若 $B = \emptyset$,则 $m + 1 > 2m - 1$,得 $m < 2$,此时 $B \subseteq A$ 成立.

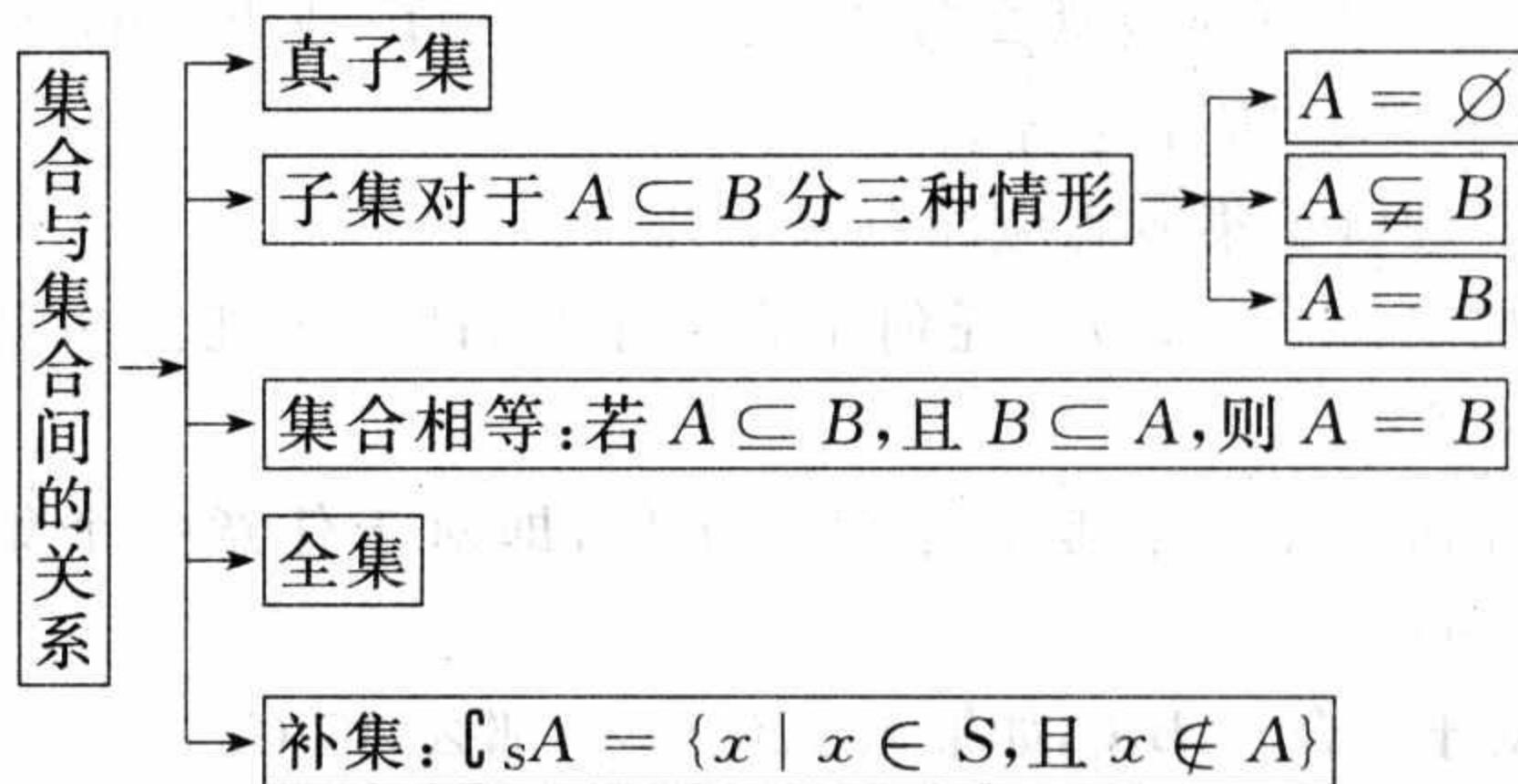
由(1)、(2)得 $m \leq 3$.

所以实数 m 的取值范围是 $\{m | m \leq 3\}$.

针对性练习

7. 已知 $A = \{x | kx = 1\}$, $B = \{x | x^2 = 1\}$,若 $A \subseteq B$,求实数 k 的值.

三、构建知识网络



四、针对性练习答案及点拨

1. 解:子集为 $\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}$. 点拨:不要忘记空集与集合本身,注意这是易错点,若集合中含有 n 个元素,则其子集的个数为 2^n 个.

2. 解:满足条件的集合 A 有: $\{a, b\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, b, c, d\}$. 点拨:一方面 A 是集合 $\{a, b, c, d\}$ 的子集,另一方面又包含元素 a, b ,注意正确理解题意.

3. 解:由 $x^2 - 8x + 15 = 0$,得 $x = 3$ 或 $x = 5$,所以 $A = \{3, 5\}$. 因为 $B \subseteq A$,所以 $B = \emptyset$ 或 $B = \{3\}$ 或 $B = \{5\}$. 当 $B = \emptyset$ 时, $a = 0$; 当 $B = \{3\}$ 时, $3a - 1 = 0$,所以 $a = \frac{1}{3}$; 当 $B = \{5\}$ 时, $5a - 1 = 0$,所以 $a = \frac{1}{5}$. 因此 a 的取值构成的集合为 $\{0, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}\}$.

点拨:一定不要忘记 B 为 $\emptyset$ 时,也是 A 的真子集,否则易漏解.

4. 2 点拨:因为 $A = \{2, a^2 - a + 2\}$, $\complement_U A = \{-1\}$,所以 $a^2 - a + 2 = 4$,解得 $a = 2$ 或 $a = -1$; $-(a - 3)^2 = -1$,解得 $a = 4$ 或 $a = 2$,所以 $a = 2$. 本题考查补集的定义和一元二次方程的求解.

5. A 点拨:由 $\complement_U M \supseteq N$,知集合 N 有两种情况如图 1-2-5、图 1-2-6 所示,选 A. 对补集问题利用韦恩图的方法解决,简单、直观,同时也体现了数形结合的思想.

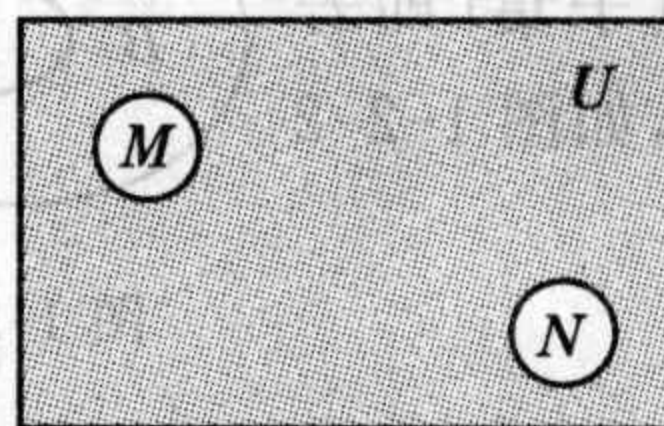


图 1-2-5

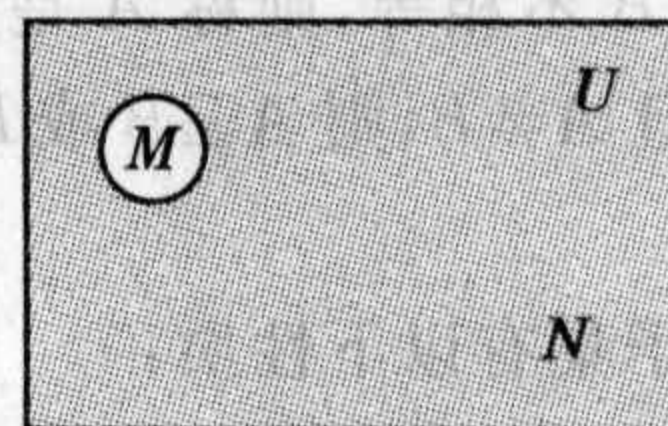


图 1-2-6

6. C 点拨:数 0 不是集合, $\{0\}$ 是只含一个元素 0 的集合, $\emptyset$ 是不含任何元素的集合, $\{\emptyset\}$ 是以 $\emptyset$ 为元素的集合.

7. 解: $B = \{-1, 1\}$,因为 $A \subseteq B$,所以 $A = \emptyset$ 或 $\{-1\}$ 或 $\{1\}$. 当 $A = \emptyset$ 时,方程 $kx = 1$ 无解,则 $k = 0$; 当 $A = \{-1\}$ 时,将 -1 代入方程 $kx = 1$ 中得 $k = -1$;

当 $A = \{1\}$ 时,将 1 代入方程 $kx = 1$ 中得 $k = 1$.

所以 k 为 ± 1 或 0 .

点拨: $A \subseteq B$ 含两种情况 $A = \emptyset$ 和 $A \neq \emptyset$,其中 $A = \emptyset$ 是易忽略点.

III 创新讲解

一、学科综合思维专题点拨

学科综合思维导析:本节综合思维考查元素与集合的关系、集合与集合的关系.元素与集合的关系是属于“ $\in$ ”或不属于“ $\notin$ ”关系,集合之间现阶段所学的是包含、相等关系.此类综合题,有时也常涉及方程和不等式等方面内容,解此类综合题关键在于理解并掌握知识点中所讲概念及其意义,同时还要掌握方程解法,特别是一元二次方程根与系数的关系.