21世纪高等院校优秀教材

工程矩阵方法（第2版）

姚 俊 张玉春 编著

国防工业出版社
National Defense Industry Press

工程矩阵方法

（第2版）

姚　俊　张玉春　编著

国防工业出版社

·北京·

内 容 简 介

本书根据控制理论及控制工程专业教学大纲，兼顾非控制专业研究生教学的需要而编写。内容包括线性空间与线性变换、矩阵的标准形、矩阵分析、矩阵在工程中的应用和广义逆矩阵等。各章附有一定数量的例题和习题，书末附有习题答案。

本书简明扼要，突出应用，可作为控制理论及控制工程本科生的教材，也可供其他专业研究生教学使用。

图书在版编目(CIP)数据

工程矩阵方法/姚俊，张玉春编著. —2 版. —北京：国防工业出版社，2007.7

ISBN 978-7-118-05120-9

Ⅰ.工… Ⅱ.①姚…②张… Ⅲ.矩阵—计算方法 Ⅳ.O151.21

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 050200 号

※

国防工業出版社出版发行

（北京市海淀区紫竹院南路 23 号 邮政编码 100044）

天利华印刷装订有限公司印刷

新华书店经售

*

开本 710×960 1/16 印张 12 字数 215 千字

2007 年 7 月第 2 版第 1 次印刷 印数 1—4000 册 定价 18.00 元

国防书店：(010)68428422 发行邮购：(010)68414474

发行传真：(010)68411535 发行业务：(010)68472764

前　言

矩阵作为自动控制理论的基础工具之一,越来越受到人们的重视。由于它形式凝炼,运算简洁,在工程上得到广泛的应用。为适应工科院校自动控制专业学生学习专业课及其他专业研究生教学的需要,特编写本教材。本书出版前曾编印成讲义,在沈阳理工大学本科生、研究生教学中使用多年。此次再版,根据有关方面的意见和教学的实际需要又进行了修改。

全书共分五章,第一章线性空间和线性变换,由此引出欧氏空间和酉空间,第二章矩阵的标准形,第三章矩阵分析,第四章方阵函数在工程中的应用,第五章广义逆矩阵。全书突出矩阵的使用方法,避免或减小冗长和繁琐的证明,努力使矩阵理论、方法与实例相结合。各章均有例题和习题,书末附有习题答案。本书使用48学时左右。

沈阳理工大学张连成教授自始至终参与本书编写工作,并对本书原稿作了认真、仔细的审阅,提出许多修改建议,从而保证了本书编写质量。

对各位支持、关心本书出版的同仁谨在此表示衷心的感谢。

由于作者水平有限,不妥之处实属难免,敬请读者批评指出。

编　者

2007年6月于沈阳

目　录

第一章　线性空间与线性变换

线性空间与线性变换是线性代数最基本的概念，它们是工程矩阵方法的重要基础。在这一章，将介绍线性空间与线性变换一般的概念和性质。在此基础上引入常用的特殊的线性空间——欧氏空间和酉空间。

1.1　线性空间

1.1.1　线性空间

在这一节，将研究与 n 维向量空间 R^n 有相同算术性质的代数系统，这种系统叫线性空间。

定义 1.1　设 V 是一个非空集合，F 是一个数域，称 V 为按所定义的运算构成 F 上的线性空间（或向量空间），如果在 V 中定义了两种运算。

加法　对于 V 中任意元素 $\boldsymbol{\alpha}$、$\boldsymbol{\beta} \in V$，在 V 中都有唯一的元素 $\boldsymbol{\gamma}$ 与之对应，称为 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的和，记为

$$\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}$$

数乘　对于 V 中任一元素 $\boldsymbol{\alpha}$ 和数域 F 中任一数 k，在 V 中都有唯一元素 $\boldsymbol{\delta}$ 与之对应，称为 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 k 的数乘，记为

$$\boldsymbol{\delta} = k\boldsymbol{\alpha}$$

这两种运算满足以下八条规则：

(1) 加法交换律　　$\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\alpha}$；

(2) 加法结合律　　$(\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}) + \boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\alpha} + (\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\gamma})$；

(3) 存在零向量 $\mathbf{0}$　　对任意 $\boldsymbol{\alpha} \in V$，$\boldsymbol{\alpha} + \mathbf{0} = \boldsymbol{\alpha}$；

(4) 存在负向量　　对任意 $\boldsymbol{\alpha} \in V$，都有 $\boldsymbol{\beta} \in V$，使 $\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}$，称 $\boldsymbol{\beta}$ 是 $\boldsymbol{\alpha}$ 的负向量，记为 $-\boldsymbol{\alpha}$；

(5) 存在单位数 $1 \in F$，使得 $1\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}$；

(6) 数乘结合律　　$k(l\boldsymbol{\alpha}) = (kl)\boldsymbol{\alpha}$；

(7) 数乘关于向量加法分配律 $k(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=k\boldsymbol{\alpha}+k\boldsymbol{\beta}$;

(8) 数乘关于数量加法分配律 $(k+l)\boldsymbol{\alpha}=k\boldsymbol{\alpha}+l\boldsymbol{\alpha}$。

式中 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}\in V;k,l\in F$。

线性空间的加法和数乘合称为线性运算。线性空间是定义了线性运算,并且满足(1)~(8)规则的向量集合,这里的向量不单指 n 维向量,即不单指 n 个有序数组。

例 1 实数域 R 上次数不超过 n 的所有多项式的全体,记作 $R[x]_n$,即

$$R[x]_n=\{P_n \mid$$

$$P_n=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0,a_n,a_{n-1},\cdots,a_1,a_0\in R\}$$

则 $R[x]_n$ 按照通常的多项式加法及数与多项式乘法构成数域 R 上一个线性空间。这是因为 $R[x]_n$ 对于上述两种运算显然是封闭的,且满足八条规则。

例 2 元素属于实数域 R 的 $m\times n$ 矩阵全体,记为 $R^{m\times n}$,对于矩阵的加法和数乘矩阵的运算,构成数域 R 上一个线性空间。

例 3 设由所有在闭区间 $[a,b]$ 上的连续实函数组成的集合为 $C[a,b]$,对于通常意义的函数和及数乘函数运算构成数域 R 上一个线性空间。

例 4 n 个有序实数组成的集合

$$S^n=\{\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid x_1,x_2,\cdots,x_n\in R\}$$

对于通常有序实数组的加法及如下定义的数乘:

$$k\cdot\boldsymbol{x}=k\cdot(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\mathbf{0}=(0,0,\cdots,0)$$

这两种运算不满足规则(5),因 $1\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$,所以,$S^n$ 不构成线性空间。

例 5 按通常的向量加法和数乘,R^n 是实数域上的线性空间,C^n 是复数域上的线性空间。

线性空间有如下性质:

(1) 零元素是唯一的;

(2) 任一元素的负元素是唯一的;

(3) $k\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}\Leftrightarrow k=0$ 或 $\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$;

(4) $(-k)\boldsymbol{\alpha}=-(k\boldsymbol{\alpha})$。

定义 1.2 设 V 是数域 F 上的一个线性空间,W 是 V 的一个非空子集,如果 W 对于 V 的加法及数乘两种运算也构成一个线性空间,则称 W 为 V 的一个线性子空间。

定理 1.1 W 构成 V 的线性子空间的充分必要条件是 W 对于 V 中的线性运

算是封闭的。即 W 非空，如果 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta} \in W$，则 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta} \in W$；如果 $k \in F,\boldsymbol{\alpha} \in W$，则 $k\boldsymbol{\alpha} \in W$。

1.1.2 基、维数与坐标

在线性代数中讨论 n 维向量空间时，介绍了向量的线性组合、线性相关、线性无关、极大线性无关向量组、向量组的秩等概念，这些概念以及有关的定理、性质及运算，完全可以平行地适用于线性空间中的向量，以后我们将直接引用这些概念和性质。

定义 1.3 线性空间 V 中的向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 称为 V 的基是指

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关；

(2) V 中任一元素均可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示。

线性空间 V 的基中所含向量的个数 n 称为 V 的维数，记为 $\dim V=n$，并称 V 为 n 维线性空间，记为 V_n。

定义 1.4 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 为 V_n 的基，则对 $\boldsymbol{\alpha} \in V_n$，其表达式

$$\boldsymbol{\alpha} = \sum_{i=1}^{n} x_i\boldsymbol{\alpha}_i,\ (x_i \in F)$$

中的 $x_i(i=1,2,\cdots,n)$ 称为向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 下的坐标，并记作 $\boldsymbol{\alpha}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$。

例 6 在 n 维线性空间 R^n 中，显然 $\boldsymbol{\varepsilon}_1=(1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\varepsilon}_2=(0,1,\cdots,0)^{\mathrm{T}},\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n=(0,0,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$ 是一组基，对于这组基，向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}}$ 的坐标就是它的分量 $a_1,a_2,\cdots,a_n$。

例 7 在 $R^{m\times n}$ 中，$\boldsymbol{E}_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 是 (i,j) 元为 1，其余元素都是 0 的矩阵，$\boldsymbol{E}_{ij}$ 是 $R^{m\times n}$ 的一组基。对于这组基，矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 的坐标就是它的元素 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$。

例 8 线性空间 $R[x]_n$ 中，易证

$$x^n,x^{n-1},\cdots,x^2,x,1$$

是 $R[x]_n$ 的一个基。若 $P(x) \in R[x]_n$，且

$$P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$$

则 $a_n,a_{n-1},\cdots,a_1,a_0$ 是 $P(x)$ 关于基 $x^n,x^{n-1},\cdots,x,1$ 的坐标。若又取

$$1,(x-a),\cdots,(x-a)^{n-1},(x-a)^n$$

为 $R[x]_n$ 的基，其中 a 为实数域 R 中的常数，则由泰勒公式知

$$P(x)=P(a)+P'(a)(x-a)+\frac{P''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{P^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

故 $P(x)$ 在基 $1,(x-a),\cdots,(x-a)^{n-1},(x-a)^n$ 下的坐标为 $P(a),P'(a),\frac{1}{2!}P''(a),\cdots,\frac{1}{n!}P^{(n)}(a)$。

由此可见，在线性空间中，元素的坐标由基唯一确定，当基改变时，坐标将随之改变。

在 n 维线性空间 V_n 中取定一组基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 后，则 V_n 中的向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 n 维数组向量空间 R^n 中向量 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 之间就有一个一一对应的关系，这种关系称为同构关系。

1.1.3 基变换与坐标变换

对于 n 维线性空间 V_n，如果取不同的基，对于同一向量其坐标之间的关系可推导如下：

设 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 及 $\boldsymbol{\varepsilon}'_1,\boldsymbol{\varepsilon}'_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}'_n$ 是线性空间 V_n 的两组基，它们之间有下述关系：

$$\begin{cases}\boldsymbol{\varepsilon}'_1=a_{11}\boldsymbol{\varepsilon}_1+a_{21}\boldsymbol{\varepsilon}_2+\cdots+a_{n1}\boldsymbol{\varepsilon}_n\\ \boldsymbol{\varepsilon}'_2=a_{12}\boldsymbol{\varepsilon}_1+a_{22}\boldsymbol{\varepsilon}_2+\cdots+a_{n2}\boldsymbol{\varepsilon}_n\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \boldsymbol{\varepsilon}'_n=a_{1n}\boldsymbol{\varepsilon}_1+a_{2n}\boldsymbol{\varepsilon}_2+\cdots+a_{nn}\boldsymbol{\varepsilon}_n\end{cases}\tag{1.1}$$

记
$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}$$

则式(1.1)可表示为

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{\varepsilon}'_1\\\boldsymbol{\varepsilon}'_2\\\vdots\\\boldsymbol{\varepsilon}'_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{21}&\cdots&a_{n1}\\a_{12}&a_{22}&\cdots&a_{n2}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{1n}&a_{2n}&\cdots&a_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\varepsilon}_1\\\boldsymbol{\varepsilon}_2\\\vdots\\\boldsymbol{\varepsilon}_n\end{bmatrix}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\varepsilon}_1\\\boldsymbol{\varepsilon}_2\\\vdots\\\boldsymbol{\varepsilon}_n\end{bmatrix}$$

或

$$(\boldsymbol{\varepsilon}'_1,\boldsymbol{\varepsilon}'_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}'_n) = (\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)\boldsymbol{A} \tag{1.2}$$

式(1.1)和式(1.2)称为基变换公式,矩阵 $\boldsymbol{A}$ 称为由基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 到基 $\boldsymbol{\varepsilon}'_1,\boldsymbol{\varepsilon}'_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}'_n$ 的过渡矩阵(或基变换矩阵),过渡矩阵一定是可逆的。

设 V_n 中的元素 $\boldsymbol{\alpha}$,在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 下的坐标为 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$,在基 $\boldsymbol{\varepsilon}'_1,\boldsymbol{\varepsilon}'_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}'_n$ 下的坐标为 $(x'_1,x'_2,\cdots,x'_n)^{\mathrm{T}}$。若两个基满足关系式(1.2),则有

$$\boldsymbol{\alpha} = (\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = (\boldsymbol{\varepsilon}'_1,\boldsymbol{\varepsilon}'_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}'_n)\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix} = (\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)\boldsymbol{A}\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix}$$

即有坐标变换公式

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \boldsymbol{A}\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix} \text{或} \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix} = \boldsymbol{A}^{-1}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \tag{1.3}$$

式(1.3)就是当基变换矩阵 $\boldsymbol{A}$ 已知时,向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 关于两个基的坐标之间的关系。

1.2 线性变换

1.2.1 线性变换

定义 1.5 设 M_1 与 M_2 是两个非空集合,如果按照某一规则 σ,使对于每个 $\boldsymbol{\alpha} \in M_1$,都有唯一确定的元素 $\boldsymbol{\beta} \in M_2$ 与之对应,则称 σ 为集合 M_1 到 M_2 的一个映射,记为

$$\sigma: M_1 \to M_2$$

$\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的对应记为

$$\sigma(\boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{\beta}$$

并称$\boldsymbol{\beta}$为$\boldsymbol{\alpha}$在映射σ下的像，而$\boldsymbol{\alpha}$称为$\boldsymbol{\beta}$在映射σ下的一个原像。像的全体所构成的集合称为像集，记为$\sigma(M_1)$。由集合M到M自身的映射称为M上的变换。

定义1.6 设V是数域F上的线性空间，σ是V的一个变换，如果对任意$\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}\in V$和$k\in F$，都有

(1) $\sigma(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=\sigma(\boldsymbol{\alpha})+\sigma(\boldsymbol{\beta})$;

(2) $\sigma(k\boldsymbol{\alpha})=k\sigma(\boldsymbol{\alpha})$。

则称σ是V的一个线性变换。

例1 线性空间V_n的恒等变换（或单位变换）I和零变换：

$$I(\boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{\alpha},\quad \boldsymbol{0}(\boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{0},\ (\boldsymbol{\alpha}\in V_n)$$

都是线性变换。

例2 设V_n是数域F上的线性空间，$k\in F$，$\boldsymbol{\alpha}\in V_n$，如$\boldsymbol{\alpha}\to k\boldsymbol{\alpha}$，即

$$\sigma(\boldsymbol{\alpha}) = k\boldsymbol{\alpha}\quad(\boldsymbol{\alpha}\in V_n)$$

不难验证，这是V_n的一个线性变换，称此变换为倍数变换（放大变换）。

例3 由关系式

$$\sigma\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}$$

确定的变换σ是坐标系xOy绕原点O沿逆时针方向旋转φ角的旋转变换。

例4 在线性空间$R[x]_n$中，用D表示求导数的变换：

$$\mathrm{D}(p(x)) = p'(x)$$

由于

$$\mathrm{D}(p(x)+q(x)) = \mathrm{D}(p(x))+\mathrm{D}(q(x))$$

$$\mathrm{D}(kp(x)) = k\mathrm{D}(p(x))$$

因此这是一个线性变换。

例5 取定矩阵$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}\in R^{n\times n}$，定义$R^{n\times n}$的变换，即

$$\sigma(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{AX}+\boldsymbol{XB}+\boldsymbol{C}\quad(\boldsymbol{X}\in R^{n\times n})$$

由于对任意$\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}\in R^{n\times n}$和$k\in R$，有

$$\sigma(\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y}) = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y})+(\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y})\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C} = (\boldsymbol{AX}+\boldsymbol{XB})+(\boldsymbol{AY}+\boldsymbol{YB})+\boldsymbol{C}$$

$$\sigma(kX) = A(kX) + (kX)B + C = k(AX + XB) + C$$

可见，当 $C \neq 0$ 时，σ 不是线性变换；当 $C = 0$ 时，σ 是线性变换。

线性变换具有下述性质：

(1) $\sigma(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$，$\sigma(-\boldsymbol{\alpha}) = -\sigma(\boldsymbol{\alpha})$；

(2) 若 $\boldsymbol{\beta} = k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_s\boldsymbol{\alpha}_s$，则 $\sigma(\boldsymbol{\beta}) = k_1\sigma(\boldsymbol{\alpha}_1) + k_2\sigma(\boldsymbol{\alpha}_2) + \cdots + k_s\sigma(\boldsymbol{\alpha}_s)$；

(3) 线性相关的向量经过线性变换后，仍保持线性相关；

(4) 线性变换 σ 的像集 $\sigma(V)$ 仍是一线性空间（V 的子空间），称为线性变换 σ 的像空间。

注意(3)的逆命题是不成立的，即若线性无关的向量经过线性变换不一定是线性无关的，例如，零变换。

性质(4)的例子可见齐次线性方程组 $AX = \mathbf{0}$ 的解空间。

1.2.2 线性变换的矩阵表示

设 σ 是数域 F 上线性空间 V 的一个线性变换，σ 它由 V 的一组基上的作用唯一确定，根据这一点引入线性变换的矩阵概念。

定义 1.7 设 $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n$ 是数域 F 上 n 维线性空间 V_n 的一组基，σ 是 V_n 的一个线性变换，$\sigma(\boldsymbol{\varepsilon}_1), \sigma(\boldsymbol{\varepsilon}_2), \cdots, \sigma(\boldsymbol{\varepsilon}_n)$ 可以唯一地由基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n$ 线性表示为

$$\begin{cases} \sigma(\boldsymbol{\varepsilon}_1) = a_{11}\boldsymbol{\varepsilon}_1 + a_{21}\boldsymbol{\varepsilon}_2 + \cdots + a_{n1}\boldsymbol{\varepsilon}_n \\ \sigma(\boldsymbol{\varepsilon}_2) = a_{12}\boldsymbol{\varepsilon}_1 + a_{22}\boldsymbol{\varepsilon}_2 + \cdots + a_{n2}\boldsymbol{\varepsilon}_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \sigma(\boldsymbol{\varepsilon}_n) = a_{1n}\boldsymbol{\varepsilon}_1 + a_{2n}\boldsymbol{\varepsilon}_2 + \cdots + a_{nn}\boldsymbol{\varepsilon}_n \end{cases} \tag{1.4}$$

称矩阵

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

为 σ 在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n$ 下的矩阵。形式上采用矩阵乘法表示式(1.4)为

$$\sigma(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n) = (\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)\boldsymbol{A} \tag{1.5}$$

例如,例 1 中线性空间 V_n 的恒等变换 I 和零变换在任一组基下的矩阵分别为 n 阶单位矩阵 $\boldsymbol{E}$ 和零矩阵 $\boldsymbol{O}$,即

$$I(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n) = (\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)\boldsymbol{E}$$

$$O(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n) = (\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)\boldsymbol{O}$$

例 2 中线性空间 V_n 的倍数变换 σ 在任一组基下的矩阵为纯量矩阵 $k\boldsymbol{E}$,即

$$\sigma(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n) = (\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)k\boldsymbol{E}$$

定理 1.2 设线性空间 V_n 的线性变换 σ 在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 下的矩阵为 $\boldsymbol{A}$。如果 V_n 中向量 $\boldsymbol{x}$ 对于基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 的坐标为 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$,$\sigma(\boldsymbol{x})$ 对于基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 的坐标为 $(y_1,y_2,\cdots,y_n)^{\mathrm{T}}$,则

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \boldsymbol{A}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \tag{1.6}$$

证明 由假设

$$\sigma(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n) = (\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)\boldsymbol{A}$$

$$\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

因此

$$\sigma(\boldsymbol{x}) = \sigma(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = (\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)\boldsymbol{A}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

因为 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 是线性无关的，所以

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \boldsymbol{A}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

证毕。

线性变换与矩阵是一一对应的，而线性变换的矩阵与所取的基有关。同一线性变换在不同基下的矩阵一般是不相等的。因此，如何选择一组基使得一个线性变换在这组基下的矩阵最简单，就成为一个重要的问题。

例 6 在 $R[x]_3$ 中，取基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1 = x^3,\boldsymbol{\varepsilon}_2 = x^2,\boldsymbol{\varepsilon}_3 = x,\boldsymbol{\varepsilon}_4 = 1$，求微分运算 D 的矩阵。

解

$$\mathrm{D}(\boldsymbol{\varepsilon}_1) = 3x^2 = 0\boldsymbol{\varepsilon}_1 + 3\boldsymbol{\varepsilon}_2 + 0\boldsymbol{\varepsilon}_3 + 0\boldsymbol{\varepsilon}_4$$

$$\mathrm{D}(\boldsymbol{\varepsilon}_2) = 2x = 0\boldsymbol{\varepsilon}_1 + 0\boldsymbol{\varepsilon}_2 + 2\boldsymbol{\varepsilon}_3 + 0\boldsymbol{\varepsilon}_4$$

$$\mathrm{D}(\boldsymbol{\varepsilon}_3) = 1 = 0\boldsymbol{\varepsilon}_1 + 0\boldsymbol{\varepsilon}_2 + 0\boldsymbol{\varepsilon}_3 + 1\boldsymbol{\varepsilon}_4$$

$$\mathrm{D}(\boldsymbol{\varepsilon}_4) = 0 = 0\boldsymbol{\varepsilon}_1 + 0\boldsymbol{\varepsilon}_2 + 0\boldsymbol{\varepsilon}_3 + 0\boldsymbol{\varepsilon}_4$$

所以，D 在这组基下的矩阵为

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

定理 1.3 设 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 和 $\boldsymbol{\varepsilon}'_1,\boldsymbol{\varepsilon}'_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}'_n$ 为线性空间 V_n 的两组基，且由基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 到基 $\boldsymbol{\varepsilon}'_1,\boldsymbol{\varepsilon}'_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}'_n$ 的过渡矩阵为 $\boldsymbol{P}$，V_n 中的线性变换 σ 在这两组基下的矩阵依次为 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$，那么

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$$

即 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 相似，称两个基之间的过渡矩阵 $\boldsymbol{P}$ 为相似变换矩阵。

证明 由定理的假设，有

$$(\boldsymbol{\varepsilon}'_1,\boldsymbol{\varepsilon}'_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}'_n) = (\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)\boldsymbol{P}$$

$\boldsymbol{P}$ 可逆,及

$$\sigma(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n) = (\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)\boldsymbol{A}$$

$$\sigma(\boldsymbol{\varepsilon}'_1,\boldsymbol{\varepsilon}'_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}'_n) = (\boldsymbol{\varepsilon}'_1,\boldsymbol{\varepsilon}'_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}'_n)\boldsymbol{B}$$

于是

$$(\boldsymbol{\varepsilon}'_1,\boldsymbol{\varepsilon}'_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}'_n)\boldsymbol{B} = \sigma(\boldsymbol{\varepsilon}'_1,\boldsymbol{\varepsilon}'_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}'_n) =$$

$$\sigma[(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)\boldsymbol{P}] = [\sigma(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)]\boldsymbol{P} =$$

$$(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)\boldsymbol{AP} = (\boldsymbol{\varepsilon}'_1,\boldsymbol{\varepsilon}'_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}'_n)\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$$

因为 $\boldsymbol{\varepsilon}'_1,\boldsymbol{\varepsilon}'_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}'_n$ 线性无关,所以

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$$

证毕。

求 σ 的最简矩阵就是求与 $\boldsymbol{A}$ 相似的最简单矩阵即相似矩阵的标准形问题,这个问题将在第二章中解决。

1.3 欧几里德(Euclide)空间

1.3.1 欧氏空间

在线性代数中曾介绍过 n 维向量的内积,本节将在任意的线性空间中,定义内积,得到欧几里德空间,简称欧氏空间。

定义 1.8 设 V 是实数域 R 上的线性空间,如果 V 中任意两个向量 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 都有唯一实数与之对应,记为 $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$,且它满足以下条件($\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}\in V,k\in R$):

(1) $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha})$;

(2) $(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma})+(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})$;

(3) $(k\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=k(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$;

(4) $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})\geqslant 0$,当且仅当 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$ 时,$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})=0$。

则称 $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$ 为向量 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 的内积。定义了内积的实数域 R 上的线性空间 V 称为欧氏空间。

例 1 实数域 R 上的 n 维向量空间 R^n 中,定义向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$,$\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$ 的内积为