全国奥数领队担纲　奥赛金牌教练主笔

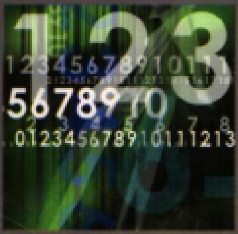
AOSHU JIANGYI

奥数讲义

高三年级上

◆ 主编 朱华伟

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社



全国奥数领队担纲　奥赛金牌教练主笔

★ 奥数讲义　（高一年级上、下）

★ 奥数讲义　（高二年级上、下）

★ 奥数讲义　（高三年级上、下）

ISBN 978-7-308-05324-2

9 787308 053242 >

定价：18.00元

奥数讲义

高三年级上

主编 朱华伟

编著 朱华伟 张 雷 范端喜

符开广 蒋太煌

浙江大學出版社

图书在版编目(CIP)数据

奥数讲义. 高三年级. 上/朱华伟主编. 一杭州：浙江大学出版社，2007.5

ISBN 978-7-308-05324-2

Ⅰ. 奥...　Ⅱ. 朱...　Ⅲ. 数学课—高中—教学参考资料　Ⅳ. G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 057495 号

责任编辑　冯慈璜　杨晓鸣
出版发行　浙江大学出版社
（杭州浙大路 38 号　邮政编码 310027）
（E-mail：zupress@mail.hz.zj.cn）
（网址：http://www.zjupress.com）
经　　销　浙江省新华书店
排　　版　杭州大漠照排印刷有限公司
印　　刷　杭州印校印务有限公司
开　　本　787mm×1092mm　1/16
印　　张　14.25
字　　数　400 千
版 印 次　2007 年 5 月第 1 版　2007 年 5 月第 1 次印刷
印　　数　00001—10000
书　　号　ISBN 978-7-308-05324-2
定　　价　18.00 元

前　　言

数学被誉为科学的皇后。在人类文明的历史进程中，中华民族对数学的发展曾作出过卓越的贡献。勾股定理、祖冲之圆周率、九章算术等丰硕成果无不闪烁耀眼的光芒。新中国成立以后，中国的现代数学有了长足的发展，先后涌现出华罗庚、陈景润等一批著名数学家。数学大师陈省身教授曾预言："21世纪，中国必将成为数学大国。"从1985年我国第一次派队参加国际数学奥林匹克以来，中国代表队共122人参赛，取得92块金牌、23块银牌、5块铜牌，13次团体总分第一的好成绩。中学生在国际数学奥林匹克中的出色表现，使人们相信陈省身教授的这一"猜想"将在本世纪得到证明。

由于计算机的出现，数学已不仅是一门科学，还是一种普适性的技术。从航空到家庭，从宇宙到原子，从大型工程到工商管理，无一不受惠于数学技术。高科学技术本质上是一种数学技术。美国科学学院院士格里姆(J. Glimm)说："数学对经济竞争力至为重要，数学是一种关键的普遍使用的，并授予人能力的技术。"时至今日，数学已兼有科学与技术两种品质，这是其他学科少有的。数学对国家的贡献不仅在于富国，而且还在于强民。数学给予人们的不仅是知识，更重要的是能力，这种能力包括观察实验、收集信息、归纳类比、直觉判断、逻辑推理、建立模型和精确计算。这些能力的培养，将使人终身受益。这些能力的培养，必须从小抓起，从青少年抓起。而数学奥林匹克活动，则是培养这些能力的良好载体。

基于这样的想法，我们以国内外高中数学奥林匹克为背景，以《全日制高中数学课程标准》的新理念、新要求为准绳，兼顾"大纲"与"新课标"的过渡，根据多年培训数学奥林匹克选手的经验和体会，编写这套《奥数讲义》。通过这套讲义的学习，使学生发现数学的美丽和魅力，体会数学的思想和方法，感受数学的智慧和创造力，体验经过不懈的探索而获得成功的兴奋和快乐，进而激发学习数学的兴趣。她既为学有余力且对数学感兴趣的高中生提供一个施展才华和提高数学解题能力的有效指导，也为参加数学奥林匹克的高中生提供一套科学实用的培训教程。

本丛书设计新颖，方便老师、学生和家长使用，分高一、二、三年级上册，和高一、二、三年级下册，共六册。

每册内容包括专题讲座篇、同步测试篇、全真测试篇。专题讲座篇的专题以讲义的形式编写，每讲的主要栏目有：

数学名言欣赏：以名人名言开宗名义，开始每讲的奥数学习之旅。

知识方法扫描：补充竞赛方面的相关知识、方法与技巧，突出重点、难点和赛点。

典型例题解析：在保留部分经典好题、经典解法的同时，尽可能选用一些国际国内竞赛的新题(不一定是难题)，如近3—5年高考、高中数学联赛、女子竞赛、西部竞赛、美国数学邀请赛、美国数学奥林匹克试题等，每道赛题注明竞赛年份，给出一些新颖的解答方法，减少跟其他同类书籍的雷同率，增强读者的阅读欲望。例题总个数控制在8道，由基础题(2道高考难度的试题)、提高题(4道一试难度的试题)、综合题(2道二试难度的试题)组成；

原版赛题传真：含英文试题与英文解答，针对试题与解答中的生词给出“英汉小词典”。

同步训练：含3道选择题、4道填空题、3道解答题(不便于采用客观题形式的专题，安排6道解答题作为同步训练题)，均给出详细解答过程。

在“同步测试篇”中，与“专题讲座篇”中的专题对应设置测试卷。在“全真测试篇”中，精选了国内外最新高中数学奥林匹克试卷若干套。全书后附有“同步训练题、同步测试题、全真测试题”题目的详解。

问题是数学的心脏，数学奥林匹克是解题的竞赛。要提高解题能力，必须进行一定量的训练。本丛书精选了具有代表性的经典例题，配备了足够的训练题和测试题。在这些题目中既有传统的名题，又有国内外近几年涌现的佳题，还有作者根据自己的教学实践编撰的新题。设置这些题目时，作者专门针对学生学习的实际，突出知识的重点、难点，以期达到提高的目的。

本丛书注重数学基础知识的巩固提高和数学思想的渗透，凸现科学精神和人文精神的融合，加强对学生学生兴趣、创新精神、实践能力、应用意识和分析、解决问题能力的培养。

数学大师陈省身教授为2002年8月在北京举行的第24届国际数学家大会题词：“数学好玩”。我们深信本丛书让你品味到数学的无穷乐趣。著名数学家陈景润说得好：“数学的世界是变换无穷的世界，其中的乐趣只有那些坚持不懈的人才能体会得到！”

广州大学　朱华伟
2007—5—10

目录 contents

专题讲座篇

同步测试篇

全真测试篇

专题讲座篇

第1讲　导数与最值

只有微分学才能使自然科学有可能用数学来不仅表明状态，并且也表明过程：运动.

——恩格斯

知识方法扫描

一般地，设函数 $f(x)$ 在点 x_0 附近有定义，如果对 x_0 附近的所有的点，都有 $f(x) < f(x_0)$，我们就说 $f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 的一个极大值，记作 $y_{极大值} = f(x_0)$；如果对 x_0 附近的所有的点，都有 $f(x) > f(x_0)$，我们就说 $f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 的一个极小值，记作 $y_{极小值} = f(x_0)$. 极大值与极小值统称为极值. 当函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续，且在 x_0 两侧可导时，判别 $f(x_0)$ 是极大(小)值的方法是：

(1) 如果在 x_0 附近的左侧 $f'(x) > 0$，右侧 $f'(x) < 0$，那么，$f(x_0)$ 是极大值；

(2) 如果在 x_0 附近的左侧 $f'(x) < 0$，右侧 $f'(x) > 0$，那么，$f(x_0)$ 是极小值.

但注意，导数为0的点不一定是极值点.

我们知道，在闭区间 $[a, b]$ 上连续的函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上必有最大值与最小值.

设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，在 (a, b) 内可导，求 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最大值与最小值的步骤如下：

(1) 求 $f(x)$ 在 (a, b) 内的所有极值；

(2) 将 $f(x)$ 的各极值与 $f(a)$，$f(b)$ 比较，其中最大的一个是最大值，最小的一个是最小值.

中学阶段，几种常见的函数的导数有：

(1) $C' = 0$（C 为常数）　(2) $(x^n)' = nx^{n-1}$ $(n \in \mathbf{Q})$　(3) $(\sin x)' = \cos x$

(4) $(\cos x)' = -\sin x$　(5) $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$　(6) $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x}\log_a e$

(7) $(e^x)' = e^x$　(8) $(a^x)' = a^x \ln a$.

经典例题解析

例1　求证函数 $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$ 在区间 $(-2, 1)$ 内是减函数.

证明　先求出函数 y 的导数：$y' = 6x^2 + 6x - 12 = 6(x^2 + x - 2) = 6(x+2)(x-1)$. 显然，当 $x \in (-2, 1)$ 时，$y' < 0$. 从而它在区间 $(-2, 1)$ 内是减函数.

例2　如果函数 $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{1}{2}ax^2 + (a-1)x + 1$ 在区间 $(1, 4)$ 内为减函数，在

$(6, +\infty)$ 上为增函数，求实数 a 的范围.

解 先求出 $f(x)$ 的导函数：$f'(x) = x^2 - ax + (a-1) = [x-(a-1)]\cdot(x-1)$

依题意可知，当 $x \in (1, 4)$ 时，$f'(x) < 0$；当 $x \in (6, +\infty)$ 时，$f'(x) > 0$. 从而有

$$\begin{cases} 4-(a-1) < 0 \\ 6-(a-1) > 0 \end{cases}, a \in (5, 7).$$

例3 设某物体一天中的温度 T 是时间 t 的函数：$T(t) = at^3 + bt^2 + ct + d (a \neq 0)$，其中温度的单位是 ℃，时间的单位是小时，$t = 0$ 表示 12:00，t 取正值表示 12:00 以后. 若测得该物体在 8:00 的温度为 8℃，12:00 的温度为 60℃，13:00 的温度为 58℃，且已知该物体的温度在 8:00 和 16:00 有相同的变化率.

(1) 写出该物体的温度 T 关于时间 t 的函数关系式；

(2) 该物体在 10:00 到 14:00 这段时间中(包括 10:00 和 14:00)，何时温度最高？并求出最高温度.

解 (1) 根据条件可得 $T(0) = 60$, $T(-4) = 8$, $T(1) = 58$, $T'(-4) = T'(4)$，则 $d = 60$, $b = 0$, $a = 1$, $c = -3$，因此，温度函数 $T(t) = t^3 - 3t + 60$.

(2) $T'(t) = 3t^2 - 3 = 3(t-1)(t+1)$，当 $t \in (-2, -1) \cup (1, 2)$ 时，$T'(t) > 0$；当 $t \in (-1, 1)$ 时，$T'(t) < 0$. 因此，函数 $T(t)$ 在 $(-2, -1)$ 上单调递增，在 $(-1, 1)$ 上单调递减，在 $(1, 2)$ 上单调递增，即 $t = -1$ 是极大值点. 由于 $T(-1) = T(2) = 62$，所以在 10:00 到14:00 这段时间中，该物体在 11:00 和 14:00 时的温度最高，最高温度为 62℃.

例4 当 $|x| \leqslant 2$ 时，求证：$|3x - x^3| \leqslant 2$.

解 令 $f(x) = 3x - x^3$，则 $f'(x) = 3 - 3x^2$，由 $f'(x) = 0$，有 $x = \pm 1$.

在 $|x| \leqslant 2$ 上，其极小值、极大值分别为 $f(-1) = -2$, $f(1) = 2$.

而边界函数值为 $f(-2) = 2$, $f(2) = -2$. 于是，$|3x - x^3| \leqslant 2$.

例5 求 $y = e^x \sin x$ 的极值.

解 $y' = e^x(\sin x + \cos x)$，令 $y' = 0$ 得 $x = 2k\pi - \dfrac{\pi}{4}$ 或 $2k\pi + \dfrac{3}{4}\pi$, $k = 0, \pm 1, \cdots$

因为 $y'' = 2e^x \cos x$, $y''|_{x=-\frac{\pi}{4}+2k\pi} > 0$, $y''|_{x=\frac{3}{4}\pi+2k\pi} < 0$,

所以，当 $x = -\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$ 时有极小值 $y = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4}+2k\pi}$；当 $x = \dfrac{3}{4}\pi + 2k\pi$ 时有极大值 $y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3}{4}\pi+2k\pi}$，这里 $k \in \mathbf{Z}$.

例6 圆柱形金属饮料罐的容积一定时，它的高与底半径应怎样选取，才能使所用材料最省？

解 设圆柱的高、底半径分别为 h、R，则表面积：$S = 2\pi Rh + 2\pi R^2$,

由 $V = \pi R^2 h$，得 $h = \dfrac{V}{\pi R^2}$，则 $S(R) = 2\pi R \cdot \dfrac{V}{\pi R^2} + 2\pi R^2 = \dfrac{2V}{R} + 2\pi R^2$.

令 $S'(R) = -\dfrac{2V}{R^2} + 4\pi R = 0$，得 $R = \sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$，从而 $h = \dfrac{V}{\pi R^2} = 2\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$，即 $h = 2R$.

因为 $S(R)$ 有最小无最大且只有一个极值，所以它是最小值.

答 当罐的高与底直径相等时，所用材料最省.

例7 已知 α,β 是方程 $4x^2-4tx-1=0(t\in\mathbf{R})$ 的两个不等实根，函数 $f(x)=\dfrac{2x-t}{x^2+1}$ 的定义域为 $[\alpha,\beta]$，求 $g(t)=\max f(x)-\min f(x)$.　　（2004 年全国高中联赛试题）

解　先考虑 $f(x)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上的单调性.

$$f'(x)=\frac{2(x^2+1)-2x(2x-t)}{(x^2+1)^2}=\frac{2(-x^2+tx+1)}{(x^2+1)^2}$$

由已知条件：α,β 是方程 $4x^2-4tx-1=0(t\in\mathbf{R})$ 的两个不等实根，则当 $x\in[\alpha,\beta]$ 时，必有 $4x^2-4tx-1\leqslant 0$，$x^2-tx-\dfrac{1}{4}\leqslant 0$，从而 $-x^2+tx+1=-\left(x^2-tx-\dfrac{1}{4}\right)+\dfrac{3}{4}\geqslant\dfrac{3}{4}>0$，$f(x)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上是单调递增的. 故

$$g(t)=f(\beta)-f(\alpha)=\frac{2\beta-t}{\beta^2+1}-\frac{2\alpha-t}{\alpha^2+1}=\frac{(\beta-\alpha)[t(\alpha+\beta)-2\alpha\beta+2]}{\alpha^2\beta^2+\alpha^2+\beta^2+1}=\frac{8\sqrt{t^2+1}(2t^2+5)}{16t^2+25}.$$

例8 求最小的实数 A，使对每个满足条件 $|f(x)|\leqslant 1(0\leqslant x\leqslant 1)$ 的二次三项式 $f(x)$，适合不等式 $f'(0)\leqslant A$.

解　设二次三项式 $f(x)=ax^2+bx+c$，当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时满足不等式 $|f(x)|\leqslant 1$. 则

$$|f(0)|\leqslant 1,\ \left|f\left(\frac{1}{2}\right)\right|\leqslant 1,\ |f(1)|\leqslant 1.$$

因为 $f(0)=c$，$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{a}{4}+\dfrac{b}{2}+c$，$f(1)=a+b+c$，$f'(0)=b=4\left(\dfrac{a}{4}+\dfrac{b}{2}+c\right)-(a+b+c)-3c$.

所以，$|f'(0)|\leqslant 4\left|f\left(\dfrac{1}{2}\right)\right|+|f(1)|+3|f(0)|\leqslant 4+1+3=8$. $A\leqslant 8$.

另一方面，二次三项式 $f(x)=-8x^2+8x-1$，适合 $|f(x)|\leqslant 1$（当 $x\in[0,1]$），且 $f'(x)=-16x+8$，$f'(0)=8$，故 $A\geqslant 8$.

综上，$A=8$.

原版赛题传真

Problem

If x and y are positive real numbers, show that $x^y+y^x>1$.

Solution

If $x\geqslant 1$, then $x^y\geqslant 1$ for $y>0$, so we may assume $0<x,\ y<1$. Without loss of generality, assume $x\leqslant y$; now note that the function $f(x)=x^y+y^x$ has derivative $f'(x)=yx^{y-1}+y^x\ln y$. Since $y^x\geqslant x^x\geqslant x^y$ for $x\leqslant y$ and $\dfrac{1}{x}\geqslant-\ln x$, we see that $f'(x)>0$ for $0<x\leqslant y<1$ and so the minimum of f occurs with $x=0$, in which case $f(x)=1$; since $x>0$, we have strict inequality.

英汉小词典

derivative　导数，微商

同步训练

一、选择题

1. 对$-4<x<1$时，对于式子$\frac{x^2-2x+2}{2x-2}$　　　　（　　）

A. 没有极大或极小值　　B. 有极小值 1

C. 有极大值 1　　D. 有极小值-1

E. 有极大值-1

2. 关于函数$y=\frac{1}{3}x^3-4x+4$的极值，正确的是　　　　（　　）

A. 有极大值$\frac{28}{3}$　　B. 有极大值$-\frac{4}{3}$　　C. 无极大值　　D. 无极小值

3. 已知无穷数列$\{a_n\}$的前n项和$S_n=-2n^3+21n^2+23n$，则　　　　（　　）

A. S_n有最小值，且最小值为 42　　B. S_n有最小值，且最小值为 46

C. S_n有最大值，且最大值为 204　　D. S_n有最大值，且最大值为 504

二、填空题

4. 曲线$y=5\sqrt{x}$上与直线$y=2x-4$平行的切线方程是________.

5. 函数$y=e^{2x}\cos x$的导函数是________.

6. $y=(x^2-1)^3+1$的极值是________.

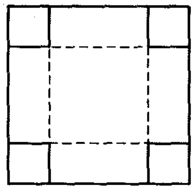
7. $y=\sin 2x-x$在$x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$上的最大值是________.

三、解答题

8. 设$x\in\mathbf{R}^+$，求$f(x)=x^x$的最小值.

9. 求$y=x^3+x^2-x$，$x\in[-2,1]$的最大值与最小值.

10. 如图，在边长为 60 cm 的正方形铁皮的四角切去相等的正方形，再把它的边沿虚线折起，做成一个无盖的方底箱子，箱底边长为多少时，箱子容积最大？最大容积是多少？



第2讲 含参数的不等式

数学的基本结果往往是一些不等式而不是等式.

——E.贝肯巴赫

知识方法扫描

1. 参数不等式是在给定条件下，寻求其恒成立的条件，或求使其恒成立的参数的取值范围.

2. 通常求解的基本步骤可分两步：首先寻求一个必要条件或求出参数的上(下)界，其次证明其是充分的或参数的上(下)界能够达到.

3. 解此类问题的论证过程仍是证明不等式的常用方法，但需解题者有较高的探索能力和变换不等式的技巧.

4. 解含参数的不等式，一般要对参数进行分类讨论.

经典例题解析

例1 对于满足 $0\leqslant p\leqslant 4$ 的一切实数 p，不等式 $x^2+px>4x+p-3$ 恒成立. 试求 x 的取值范围.

分析 我们这里以 p 为主元，转化为一次函数问题，进而简化运算.

解 原不等式等价于 $p(x-1)+(x^2-4x+3)>0$ 设 $f(p)=(x-1)p+(x^2-4x+3)$，则 $f(p)$ 是关于 p 的一次函数，易知原不等式等价于 $\begin{cases}f(0)>0\\ f(4)>0\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x^2-4x+3>0\\ x^2-1>0\end{cases}$.

解得 $x>3$ 或 $x<-1$.

评注 多角度考虑问题，可以更全面、深刻认识问题.

例2 已知不等式 $\sqrt{x+a}\geqslant x$ 的解集区间长度为 $4|a|$，求 a 的值.

分析 我们利用数形结合化简解答过程.

解 当 $a\geqslant 0$ 时，曲线 $y=\sqrt{x+a}$ 顶点为 $(-a,0)$. 如图 2-1，设曲线顶点为 N，直线 $y=x$ 和曲线交点在 x 轴上投影为 M，则 $|MN|=4|a|$. 由 $\sqrt{x+a}=x\Rightarrow x=\dfrac{1\pm\sqrt{1+4a}}{2}$，由题知：$x=\dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$，所以 $\dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2}-(-a)=4|a|=4a\Rightarrow a=0$(舍)，或 $a=\dfrac{4}{9}$.

当 $a<0$ 时，如图 2-2：易知区间长度为 $\left|\dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2}-\dfrac{1-\sqrt{1+4a}}{2}\right|=4|a|$ 得：$a=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{8}$，又 $a<0$，所以 $a=\dfrac{1-\sqrt{5}}{8}$.

综上：$a=\frac{4}{9}$ 或 $a=\frac{1-\sqrt{5}}{8}$.

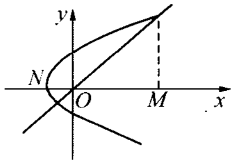


图 2－1

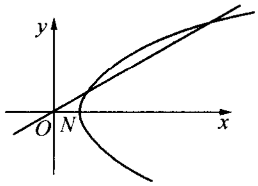


图 2－2

评注 数形结合常使讨论明了、简洁、直观.

例3 设 $0<a\neq 1$ 且 $f(x)=\log_a(6ax^2-2x+3)$ 在 $\left[\frac{3}{2},2\right]$ 上单调增加，求 a 的取值范围.

分析 这里应分为 $a>1$ 和 $0<a<1$ 两种情况.

解 由真数 $6ax^2-2x+3>0$ 知：$a>-\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{3x}=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{1}{18}$ 恒成立. 因为 $\frac{3}{2}\leqslant x\leqslant 2$，即 $\frac{1}{2}\leqslant\frac{1}{x}\leqslant\frac{2}{3}$ 得：$a>\frac{1}{24}$.

(1) 当 $\frac{1}{24}<a<1$ 时，$f(x)$ 在 $\left[\frac{3}{2},2\right]$ 上单调增加，等价于 $g(x)=6ax^2-2x+3$ 在 $\left[\frac{3}{2},2\right]$ 上单调减少，从而对称轴 $x_0=\frac{1}{6a}\geqslant 2\Rightarrow\frac{1}{24}<a\leqslant\frac{1}{12}$；

(2) 当 $a>1$ 时，$f(x)$ 在 $\left[\frac{3}{2},2\right]$ 上单调增加，等价于 $g(x)=6ax^2-2x+3$ 在 $\left[\frac{3}{2},2\right]$ 上单调增加，则 $x_0=\frac{1}{6a}\leqslant\frac{3}{2}\Rightarrow a\geqslant\frac{1}{9}$，故 $a>1$.

综上所述，$a\in\left(\frac{1}{24},\frac{1}{12}\right]\cup(1,+\infty)$.

评注 其中真数大于 0 即 $a>\frac{1}{24}$ 是容易被忽略的，要注意.

例4 $a,b,c,d,k\in\mathbf{R}$ 并且 $|k|<2$，$a^2+b^2-kab=1$，$c^2+d^2-kcd=1$. 求证：$|ac-bd|\leqslant\frac{2}{\sqrt{4-k^2}}$.

分析 其中 $|k|<2$，我们联想 $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$ 发现可以用三角换元处理参数.

证明 由 $a^2+b^2-kab=1$， 得：$\left(a-\frac{k}{2}b\right)^2+\left(1-\frac{k^2}{4}\right)b^2=1$

设 $\begin{cases}a-\frac{k}{2}b=\cos\alpha\\ \sqrt{1-\frac{k^2}{4}}b=\sin\alpha\end{cases}$ 即 $\begin{cases}b=\sqrt{\frac{4}{4-k^2}}\sin\alpha\\ a=\cos\alpha+\frac{k}{\sqrt{4-k^2}}\sin\alpha\end{cases}$

同理设 $\begin{cases}c=\sqrt{\frac{4}{4-k^2}}\sin\beta\\ d=\cos\beta+\frac{k}{\sqrt{4-k^2}}\sin\beta\end{cases}$

所以 $ac-bd=\frac{2}{\sqrt{4-k^2}}\cos\alpha\sin\beta+\frac{2k}{4-k^2}\sin\alpha\sin\beta-\frac{2}{\sqrt{4-k^2}}\sin\alpha\cos\beta-\frac{2k}{4-k^2}\sin\alpha\sin\beta$

$=\frac{2}{\sqrt{4-k^2}}\sin(\beta-\alpha)$,

所以 $|ac-bd|\leqslant\frac{2}{\sqrt{4-k^2}}$.

所以不等式成立.

评注 注意 c,d 换元时要考虑到以后运算简化,并且本题在探索过程中先令 $k=1$ 来探索思路.

例5 已知:a, b, c 都是正数,求 $y=\frac{ab+2bc}{a^2+b^2+c^2}$ 的最大值.

分析 此题在使用均值不等式过程中要注意到 ab 和 bc 的系数比应为 $1:2$,所以我们利用参数来确定 b^2 的拆分方法.

解 设 $\lambda\in(0,1)$ 则 $a^2+\lambda b^2\geqslant 2\sqrt{\lambda}ab$,$(1-\lambda)b^2+c^2\geqslant 2\sqrt{1-\lambda}bc$.

令 $2\sqrt{\lambda}:2\sqrt{1-\lambda}=1:2$,得:$\lambda=\frac{1}{5}$,

所以 $a^2+\frac{1}{5}b^2\geqslant 2\sqrt{\frac{1}{5}}ab$, $\frac{4}{5}b^2+c^2\geqslant 4\sqrt{\frac{1}{5}}bc$.

所以 $a^2+b^2+c^2\geqslant 2\sqrt{\frac{1}{5}}(ab+2bc)$.

所以 $\frac{ab+2bc}{a^2+b^2+c^2}\leqslant\frac{ab+2bc}{2\sqrt{\frac{1}{5}}(ab+2bc)}=\frac{\sqrt{5}}{2}$.

所以最大值为 $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

评注 利用参数处理较复杂拆分问题不失为一种有效方法.

例6 已知:a, $b\in\mathbf{R}^+$,证明:$\sqrt{\frac{a}{a+3b}}+\sqrt{\frac{b}{b+3a}}\geqslant 1$.

分析 由对称性,我们只要证明 $\sqrt{\frac{a}{a+3b}}\geqslant\frac{a^x}{a^x+b^x}$ 即可.

证明 设 $\sqrt{\frac{a}{a+3b}}\geqslant\frac{a^x}{a^x+b^x}$,

即 $\frac{a}{a+3b}\geqslant\frac{a^{2x}}{(a^x+b^x)^2}\Leftrightarrow a^{2x+1}+ab^{2x}+2a^{x+1}b^x\geqslant a^{2x+1}+3a^{2x}b\Leftrightarrow ab^{2x}+2a^{x+1}b^x\geqslant 3a^{2x}b$.

而 $ab^{2x}+2a^{x+1}b^x=ab^{2x}+a^{x+1}b^x+a^{x+1}b^x\geqslant 3a^{\frac{2x+3}{3}}b^{\frac{4x}{3}}$ 对比右边 $3a^{2x}b$.

令 $\frac{4x}{3}=1$,所以 $x=\frac{3}{4}$ 可知:$3a^{\frac{2x+3}{3}}b^{\frac{4x}{3}}=3a^{\frac{3}{2}}b$,而 $3a^{2x}b=3a^{\frac{3}{2}}b$,所以,所设不等式成立,

即 $\sqrt{\frac{a}{a+3b}}\geqslant\frac{a^{\frac{3}{4}}}{a^{\frac{3}{4}}+b^{\frac{3}{4}}}$,所以原不等式左边 $\geqslant\frac{a^{\frac{3}{4}}}{a^{\frac{3}{4}}+b^{\frac{3}{4}}}+\frac{b^{\frac{3}{4}}}{a^{\frac{3}{4}}+b^{\frac{3}{4}}}=1$.

评注 建构局部不等式是一种常用的技巧.这里利用均值不等式取等号条件确定了参数的值.

例7 （2001 年巴尔干数学竞赛）$a, b, c \in \mathbf{R}^+$ 且 $abc \leqslant a+b+c$，证明：$a^2+b^2+c^2 \geqslant \sqrt{3}abc$.

分析 若 $abc = a+b+c$ 则不等式易证成立. 这里我们利用参数将不等式转化为等式问题.

证明 若 $abc = a+b+c$，易知：$a+b+c \geqslant 3\sqrt{3}$.

所以左边 $= a^2+b^2+c^2 \geqslant \frac{1}{3}(a+b+c)^2 \geqslant \frac{1}{3}\cdot 3\sqrt{3}(a+b+c) = \sqrt{3}(a+b+c) = \sqrt{3}abc$.

若 $abc \leqslant a+b+c$ 不妨设 $(ka)(kb)(kc) = ka+kb+kc$，即 $k^2abc = a+b+c$，则 $k \geqslant 1$.

由上面证明可知：$(ka)^2+(kb)^2+(kc)^2 \geqslant \sqrt{3}k^2abc \geqslant \sqrt{3}abc$ 所以原不等式成立.

评注 我们这里利用参数将不等式转化为等式问题，值得借鉴.

例8 求所有的正实数 a, b 使得对任意 $n > 2$ 和任意非负实数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 均有

$$x_1x_2+x_2x_3+\cdots+x_{n-1}x_n+x_nx_1 \geqslant x_1^a x_2^b x_3^a + x_2^a x_3^b x_4^a + \cdots + x_n^a x_1^b x_2^a.$$

分析 我们先用特殊值法探问出 a 和 b 的值，再证明原不等式成立.

解 当 $n=4$ 时，不等式为：

$$x_1x_2+x_2x_3+x_3x_4+x_4x_1 \geqslant x_1^a x_2^b x_3^a + x_2^a x_3^b x_4^a + x_3^a x_4^b x_1^a + x_4^a x_1^b x_2^a.$$

令 $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x \neq 0$，得 $x^2 \geqslant x^{2a+b}$.

即 $1 \geqslant x^{2a+b-2}$ 对 $x \in (0, +\infty)$ 恒成立.

若 $x > 1$ 知：$2a+b-2 \leqslant 0$，

若 $0 < x < 1$ 知：$2a+b-2 \geqslant 0$，

由此可导出 $2a+b=2$.

再令 $x_4 = 0$，得 $x_1x_2+x_2x_3 \geqslant x_1^a x_2^b x_3^a$.

因为 $2a+b=2$，所以两边齐次. 故不妨设 $x_2 = 1$ 得 $x_1+x_3 \geqslant x_1^a x_3^a$.

令 $x_1 = x_3 = x \neq 0$，得 $2x \geqslant x^{2a}$，即 $2 \geqslant x^{2a-1}$.

若 $2a-1 > 0$，知 $x \to +\infty$ 时，$x^{2a-1} \to +\infty$；

若 $2a-1 < 0$，知 $x \to 0$ 时，$x^{2a-1} \to +\infty$.

故必有 $2a-1=0$，即 $a = \frac{1}{2}$，从而 $b=1$.

下面证明 $a = \frac{1}{2}$，$b=1$ 时不等式成立.

左边 $= \sum_{i=1}^{n} x_ix_{i+1} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_ix_{i+1}+x_{i+1}x_{i-2}) \geqslant \frac{1}{2}\sum 2x_i^{\frac{1}{2}}x_{i+1}x_{i+2}^{\frac{1}{2}} = \sum_{i=1}^{n} x_i^{\frac{1}{2}}x_{i+1}x_{i+2}^{\frac{1}{2}} =$ 右边，其中 $a_{n+i} = a_i$，并且当 n 为奇数时，当且仅当 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ 时取等号；n 为偶数时，当且仅当 $\begin{cases} x_1 = x_3 = \cdots = x_{n-1} \\ x_2 = x_4 = x_6 = \cdots = x_n \end{cases}$ 时取等号.

综上所述，(a, b) 值为 $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

评注 本题利用函数单调性及特殊值法确定 a, b. 这是常用方法，解法奇巧，值得借鉴.

原版赛题传真

Problem（18th Balkan 2001）

Let a, b, c are positive real whose product does not exceed their sum. Show that $a^2+b^2+c^2 \geqslant \sqrt{3}abc$.

Solution

$(a+b+c)^2-3(a^2+b^2+c^2)\leqslant 0$, and we are given that $abc \leqslant a+b+c$. Hence $\frac{(abc)^2}{3}\leqslant a^2+b^2+c^2$. So if $a^2+b^2+c^2<\sqrt{3}abc$, then $abc<3\sqrt{3}$. But, by the arithmetic geometric mean inequality, we have $a^2+b^2+c^2\geqslant 3(abc)^{\frac{2}{3}}$. Hence we would also have $3(abc)^{\frac{2}{3}}\leqslant a^2+b^2+c^2<\sqrt{3}abc$ and hence $abc>3\sqrt{3}$. Contradiction. So we must have $a^2+b^2+c^2\geqslant\sqrt{3}abc$.

英汉小词典

arithmetic geometric mean inequality　算术几何平均不等式

同步训练

1. 解关于 x 的不等式 $x^2-\left(m+\frac{1}{m}\right)x+m-\frac{1}{m}<0(m\neq 0)$.

2. 解不等式 $\sqrt{3\log_a x-2}<2\log_a x-1(a>0,\ a\neq 1)$.

3. 设 $f(x)=x^2+ax+b$,求证：对任意给定的 a, $b\in\mathbf{R}$ 都存在 $x_0\in[-1,1]$使 $|f(x_0)|+a\geqslant 0$ 恒成立.

4. 已知：a, b, c 都是正实数,求证：$\frac{1}{a(1+b)}+\frac{1}{b(1+c)}+\frac{1}{c(1+a)}\geqslant\frac{3}{\sqrt[3]{abc}(1+\sqrt[3]{abc})}$.

5. 已知 x, y, $z\in\mathbf{R}^+$,求证：$\frac{xy+2yz+2zx}{x^2+y^2+z^2}\leqslant\frac{1}{4}(\sqrt{33}+1)$.

6.（第 42 届 IMO）对所有正实数 a, b, c 证明：$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}\geqslant 1$.