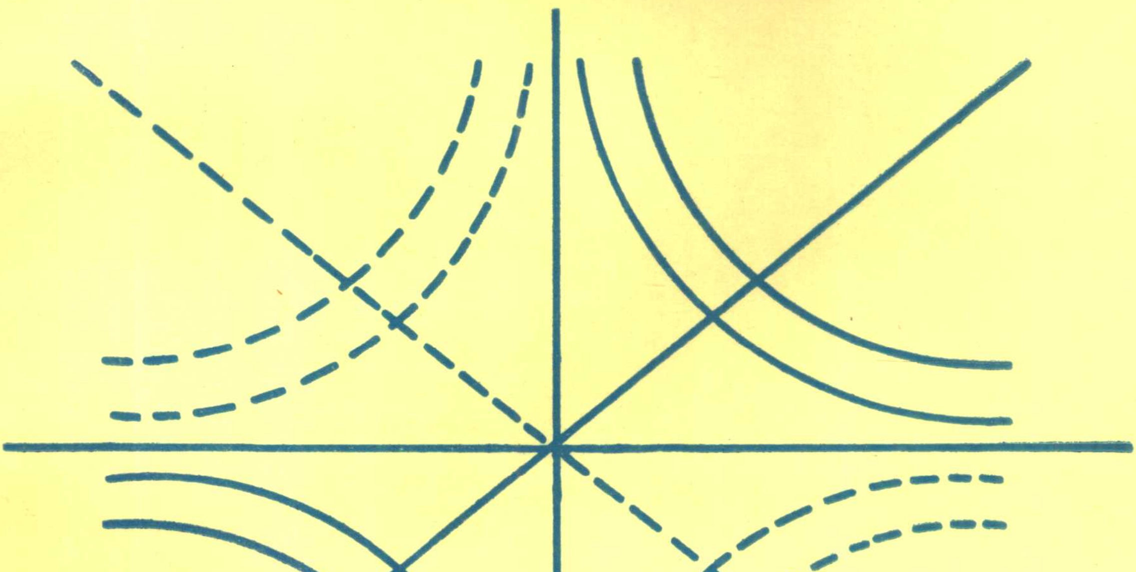
数学物理方法

王一平　陈逢时　傅德民　编



電子工業出版社

数 学 物 理 方 法

王一平　陈逢时　傅德民　编

电 子 工 业 出 版 社

(京)新登字 055 号

内 容 提 要

本书是为电磁场与微波技术和无线电物理学科撰写的研究生教学用书，是使用过十年的教材之正式印本．全书共分六章：微分几何（含张量简述）、线性空间、变分法、渐近方法、格林函数和积分方程．可供六个学分的教学内容选用，也可供广大的理工科教师和科技工作者参考．

数学物理方法

王一平　陈逵时　傅德民　编

责任编辑　平　凡

电子工业出版社出版(北京市万寿路)

电子工业出版社发行　各地新华书店经售

西北工业大学印刷厂印刷

开本：787×1092 毫米　1/16　印张：19.25　字数：469 千字

1993 年 11 月第 1 版　1993 年 11 月第 1 次印刷

印数：500 册　　定价：11.50 元

ISBN 7-5053-2504-3/G·170

前　言

本书是研究生应用数学课程的数学用书．数学物理方法是从一九八二年起单独设课的．最初只编写了一个提纲，后来撰写了讲义．一九八五年五月又做过一次修订再版．现已成为“电磁场与微波技术”和“无线电物理”这两个学科的硕士研究生必修课的基本教材之一．本书主要讲述线性泛函的基本方法和应用，但增加了对这两个学科来说必要的“微分几何”和“渐近方法”的内容．

在此次出版之前又对内容做了修改。其中前三章的修改由傅德民负责，后三章由陈逢时负责．最后由王一平对全书做了文字修订工作．

我们学识有限，错误或不当之处在所难免，望读者不吝指正。

作　者

一九九三年十二月于西安电子科技大学

目　　录

第一章　微分几何

第二章　线性空间

第三章　变分法

第四章 渐近方法

第五章 格林函数

第六章 积分方程

第一章 微分几何

微分几何是应用微积分方法研究几何图形的学科．在波的辐射、传播、散射和反散射中必然会遇到对物体的几何性状的近似的或准确的分析，而微分几何所阐明的概念和方法，在这一方面是一个有力的工具．本章重点讨论曲面理论的基本原理，在最后简述张量的概念．

1.1 三维空间中的曲线

一、曲线的表示

一条空间曲线可直观地想像为一个质点的运动轨迹。在三维空间中，一个质点的位置可以用由该点所在的笛卡儿坐标(x, y, z)所表示的位置矢 $\boldsymbol{r}$ 来描述:

$$\boldsymbol{r}=x\hat{\mathbf{x}}+y\hat{\mathbf{y}}+z\hat{\mathbf{z}} \tag{1.1}$$

式中$\hat{\mathbf{x}}$，$\hat{\mathbf{y}}$，$\hat{\mathbf{z}}$ 分别表示在 x，y，z 增加方向的单位矢。当点运动时，x，y，z 是时间 t 的函数，矢量 $\boldsymbol{r}$ 端点描绘出的轨迹就是曲线．从数学上讲，空间曲线可定义为：区间 (a, b) 上的点 t 在映射：$t\rightarrow(x(t), y(t), z(t))$ 下的象的集合（见图 1.1)。因此，一条曲线可以看作是定义在 (a, b) 上的一个实矢量函数 $\boldsymbol{r}(t)$，这里自变量 t 不一定表示时间．今后，我们把曲线表示为如下形式:

$$\boldsymbol{r}(t)=x(t)\hat{\mathbf{x}}+y(t)\hat{\mathbf{y}}+z(t)\hat{\mathbf{z}}=(x(t), y(t), z(t)) \tag{1.2}$$

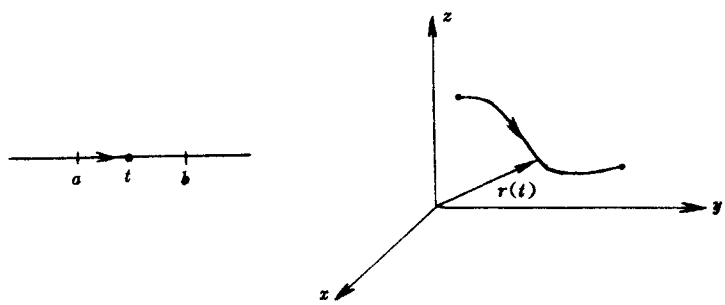


图 1.1 空间曲线

t 称为曲线 $\boldsymbol{r}(t)$的参数。按参数 t 增加的方向规定曲线的正向(见图 1.1)。定义了方向的曲线称为有向曲线．以后我们假定所研究的曲线 $\boldsymbol{r}(t)$至少是 t 的一阶连续可微函数．这与 $x(t)$，$y(t)$，$z(t)$至少是 t 的一阶连续可微函数是等价的．

如果 $\left.\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right|_{t_0}=\left(\dfrac{dx}{dt}, \dfrac{dy}{dt}, \dfrac{dz}{dt}\right)_{t_0}\neq\boldsymbol{o}$，则称 t_0 是 $\boldsymbol{r}(t)$的正则点，否则称奇点。

如 t_0 是曲线$\boldsymbol{r}(t)$的正则点，由其定义知，$\frac{dx}{dt}$，$\frac{dy}{dt}$，$\frac{dz}{dt}$在 t_0 点不全为零．不失一般性可设 $\left.\frac{dz}{dt}\right|_{t_0} \neq 0$．由于假定了$\frac{dz}{dt}$的连续性，故在 t_0 附近一段$\frac{dz}{dt}\neq 0$，即$\frac{dz}{dt}$在 t_0 邻近一段恒正或恒负。也就是说在 t_0 附近 z 是 t 的单调函数，因而有单调反函数 $t=t(z)$．这表明在正则点 t_0 附近 t 与$\boldsymbol{r}(t)$是一一对应的．

如果一段曲线上所有点都是正则点，则此曲线被称为正则曲线．

奇点一般是孤立的．如果在一‘段’曲线上$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$恒等于零，则$\boldsymbol{r}(t)$为常矢，此‘段’曲线收缩为一点。反之若$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$在某点不为零，则在此点附近一段上不为零(由于假定了$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$的连续性)。这说明一段曲线上$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$为零的点一般是孤立的，即$\boldsymbol{r}(t)$一般是分段正则的。

例如，半径为 a、螺距为 $2\pi b$ 的圆柱螺线(图 1.2)

$$\boldsymbol{r}(t)=(a\cos t,\ a\sin t,\ bt),\ (a>0,\ b\neq 0,\ -\infty<t<\infty)$$

由于
$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=(-a\sin t,\ a\cos t,\ b)\neq \boldsymbol{o}$$

故该曲线是$(-\infty,\ \infty)$上的正则曲线。又如，曲线(图1.3)

$$\boldsymbol{r}(t)=(t^3,\ t^2,\ 0),\qquad (-\infty<t<\infty)$$

由于
$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=(3t^2,\ 2t,\ 0)$$

当且仅当 $t=0$ 时为零，即 $t=0$ 是唯一的奇点。故该曲线是 $(-\infty,\ 0)$ 和 $(0,\ \infty)$ 上的正则曲线．

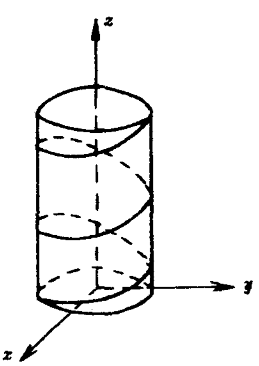


图 1.2　圆柱螺线

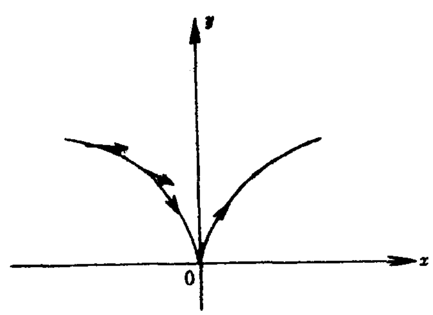


图 1.3　曲线的奇点

同一条曲线可有不同的参数表示式。事实上如曲线 C 为$\boldsymbol{r}(t)$，用 $t=t(t_1)$引入新的参数 t_1，则$\boldsymbol{r}(t)=\boldsymbol{r}(t(t_1))=\boldsymbol{r}_1(t_1)$。这意味着$\boldsymbol{r}_1(t_1)$也是 C 的一个参数表示式．为了保证 t 和 t_1 一一对应，参数变换式 $t=t(t_1)$必须满足

$$\frac{dt}{dt_1}\neq 0$$

为了使 t 和 t_1 增加的方向均相应于曲线的正向，则要求

$$\frac{dt}{dt_1} > 0 \tag{1.3}$$

上式说明 t 是 t_1 的单调增函数，从而 t_1 也是 t 的单调增函数，故 $\dfrac{dt_1}{dt} > 0$。它可作为对参数变换式的一个等价要求。

曲线 C 上一点如取参数 t 时为正则点，则在取参数 t_1 表示时也必是正则点。事实上，因为

$$\frac{d\boldsymbol{r}(t_1)}{dt_1} = \frac{d\boldsymbol{r}(t(t_1))}{dt_1} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\frac{dt}{dt_1}$$

且 $\dfrac{dt}{dt_1} > 0$，故 $\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt_1}$ 是否为零与 $\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}$ 是否为零相等价。

对正则曲线 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$，由微积分的知识，可以得到曲线从参数 t_0 到 t 处的弧长为

$$s = \int_{t_0}^{t} \left|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right| dt \tag{1.4}$$

其中
$$\left|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right| = \sqrt{\left(\frac{dx(t)}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy(t)}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz(t)}{dt}\right)^2} \tag{1.5}$$

是曲线切向量的长度。弧长是一个代数量，$t > t_0$ 时，$s(t) > 0$；$t < t_0$ 时，$s(t) < 0$，弧长只依赖于曲线上所选取的点 P_0 和 P，而与参数的选择无关。事实上，设曲线 C 上的 P_0 在不同参数 t、t_1 选取下相应的参数值分别为 t_0 和 t_{10}，与曲线上点 P 相应的参数分别为 t 和 t_1。用 $s(t)$ 表示曲线从 t_0 到 t 的弧长，而用 $s_1(t_1)$ 表示曲线从 t_{10} 到 t_1 的弧长，在条件

$$\frac{dt}{dt_1} > 0$$

下，有
$$s_1(t_1) = \int_{t_{10}}^{t_1} \left|\frac{d\boldsymbol{r}(t(t_1))}{dt_1}\right| dt_1 = \int_{t_{10}}^{t_1} \left|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\frac{dt}{dt_1}\right| dt_1 = \int_{t_0}^{t} \left|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right| dt = s(t)$$

弧长 s 是 t 的可微函数，且

$$\frac{ds}{dt} = \left|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right|$$

对正则曲线，$\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt} \neq \boldsymbol{o}$，故 $\dfrac{ds}{dt} > 0$。于是可取弧长 s 作为表示曲线的新参数。由

$$1 = \frac{ds}{ds} = \left|\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}\right|$$

知，用弧长为参数时，切向量 $\dfrac{d\boldsymbol{r}}{ds}$ 为一单位矢量。反之，当曲线 $\boldsymbol{r}(t)$ 的切向量 $\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}$ 为单位向量时，由 (1.4) 式知

$$s = \int_{t_0}^{t} \left|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right| dt = \int_{t_0}^{t} dt = t - t_0$$

可见，此时 t 就是曲线从 t_0 起算的弧长。

由于空间曲线是点在空间运动的轨迹，所以常把参数 t 理解为时间变量。于是我们得到$\frac{dr}{dt}$ 代表点的运动速度。(1.4) 式表示点运动经历的弧长．如选用弧长为参数，则$\left|\frac{dr}{dt}\right| = \left|\frac{dr}{ds}\right| = 1$．所以把以弧长为参数表示的曲线常称为单位速率曲线．

选取弧长作为曲线的参数的好处是曲线上每一点的切向量都是单位向量．这会给分析和讨论一些理论问题带来方便。不过从参数 t 变换到 s 不是简单的变数直接变换，而必须找出函数关系 $s = s(t)$及 $t = t(s)$．这一点不总是容易做到的．大多数实际情况下，难以写出变换的解析式。

二、空间曲线的重要几何量

以下的讨论假定曲线具有三阶连续导数．

1. 曲线的曲率

设曲线 C 的表示式为$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s)$，这里 s 为弧长参数．由前节的讨论知，$\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}$是曲线的单位切向量，记为$\hat{\mathbf{t}}$，即

$$\hat{\mathbf{t}} = \frac{d\boldsymbol{r}}{ds} = \boldsymbol{r}'(s)$$

下面考查$\hat{\mathbf{t}}(s)$ 随 s 的变化。如图 1.4，曲线在 s 处的切向量$\hat{\mathbf{t}}(s)$ 与 $s + \Delta s$ 处的切向量$\hat{\mathbf{t}}(s + \Delta s)$ 间的夹角为 $\Delta\theta$，显然

$$\begin{aligned} |\hat{\mathbf{t}}'(s)| &= \left|\lim_{\Delta s \to 0}\frac{\hat{\mathbf{t}}(s + \Delta s) - \hat{\mathbf{t}}(s)}{\Delta s}\right| = \lim_{\Delta s \to 0}\left|\hat{\mathbf{t}}(s + \Delta s) - \hat{\mathbf{t}}(s)\right| / |\Delta s| \\ &= \lim_{\Delta s \to 0}\left|2\sin\frac{\Delta\theta}{2} / \Delta s\right| = \lim_{\Delta s \to 0}\left|\frac{\Delta\theta}{\Delta s}\right| \end{aligned}$$

上式说明$|\hat{\mathbf{t}}'(s)|$ 表征了曲线的切向量相对于弧长的转动速度，此值的大小也代表了曲线的弯曲程度．因此我们把$|\hat{\mathbf{t}}'(s)|$ 定义为曲线在 s 处的曲率，用 $k(s)$ 表示，即

$$k(s) = |\hat{\mathbf{t}}'(s)| = |\boldsymbol{r}''(s)| \tag{1.6}$$

如果$k(s) \neq 0$，则将其倒数 $\rho(s) = 1/k(s)$称为曲线在 s 处的曲率半径．

我们把$\hat{\mathbf{t}}'(s)$(假定它为非零向量)方向的单位矢量记为$\hat{\mathbf{n}}(s)$，显然$\hat{\mathbf{n}}$与$\hat{\mathbf{t}}$是正交的(单位向量与它的导向量必正交)，又由图 1.4 看出$\hat{\mathbf{n}}$总是指向曲线的凹向。$\hat{\mathbf{n}}(s)$被称为曲线在 s 处的主法向单位矢．于是有

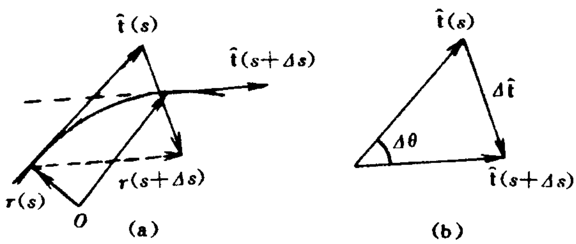


图 1.4　曲线的曲率

$$\hat{\mathbf{t}}'(s) = \boldsymbol{r}''(s) = k(s)\hat{\mathbf{n}}(s) \tag{1.7}$$

有时也记为$\boldsymbol{k}(s) = k(s)\hat{\mathbf{n}}(s)$，称为曲线的曲率向量。

曲线$\boldsymbol{r}(s)$在 s 点的$\hat{\mathbf{t}}$与$\hat{\mathbf{n}}$所构成的平面称为曲线在该点处的密切平面(如图 1.5)．如果密切面上的点用$\boldsymbol{\rho} = (x_1, y_1, z_1)$来表示，则$\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{r}$ 位于密切面内，即$\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{r}$，$\hat{\mathbf{t}}$ 和$\hat{\mathbf{n}}$三向量共面，

故
$$(\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{r},\ \hat{\mathbf{t}},\ \hat{\mathbf{n}})=0$$
即
$$\begin{vmatrix} x_1-x & y_1-y & z_1-z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix}=0$$
这就是密切面的方程.

命
$$\hat{\mathbf{b}}(s)=\hat{\mathbf{t}}(s)\times\hat{\mathbf{n}}(s) \tag{1.8}$$
并且称它为曲线在 s 处的从法向单位矢. 它是密切面的法线. 通过$\boldsymbol{r}(s)$点, 由$\hat{\mathbf{t}}(s)$和$\hat{\mathbf{b}}(s)$构成的平面叫从切面, 由$\hat{\mathbf{n}}(s)$和$\hat{\mathbf{b}}(s)$构成的平面叫法平面. 这样, 在曲线上一点就获得了三个互相垂直的基本矢, 它们两两决定三个互相垂直的平面(图 1.5). 它们所构成的三棱形称为曲线在该点的基本三棱形. 当点沿曲线移动时, 基本三棱形作为一个刚体来运动, 因此又称为动标三棱形.

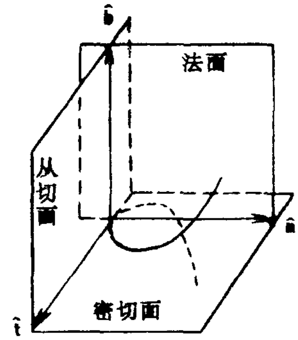


图 1.5 密切平面

2. 曲线的挠率

对空间曲线$\boldsymbol{r}(s)$, 一般来说, 当 s 变化时, $\hat{\mathbf{b}}(s)$也变化, 即密切面的方向在变化. 为了描述曲线的密切面的方向随 s 的变化情况, 引入挠率的概念. 现在来研究$\hat{\mathbf{b}}'(s)$. 因为
$$\hat{\mathbf{b}}'(s)\cdot\hat{\mathbf{b}}(s)=0\quad(\text{单位向量和它的导向量正交})$$
对$\hat{\mathbf{b}}(s)\cdot\hat{\mathbf{t}}(s)=0$两边求导, 可得$\hat{\mathbf{b}}'(s)\cdot\hat{\mathbf{t}}(s)=-\hat{\mathbf{b}}(s)\cdot\hat{\mathbf{t}}'(s)=-k(s)\hat{\mathbf{b}}(s)\cdot\hat{\mathbf{n}}(s)$. 计及$\hat{\mathbf{b}}(s)\cdot\hat{\mathbf{n}}(s)=0$, 得
$$\hat{\mathbf{b}}'(s)\cdot\hat{\mathbf{t}}(s)=0$$
因此$\hat{\mathbf{b}}'(s)$必平行于$\hat{\mathbf{n}}(s)$. 命
$$\hat{\mathbf{b}}'(s)=-\tau(s)\hat{\mathbf{n}}(s) \tag{1.9}$$
把由上式所确定的函数 $\tau(s)$ 称为曲线在 s 点的挠率. 显然, $|\tau(s)|=|\hat{\mathbf{b}}'(s)|$. 由图 1.6 看出
$$|\hat{\mathbf{b}}'(s)|=\left|\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\hat{\mathbf{b}}(s+\Delta s)-\hat{\mathbf{b}}(s)}{\Delta s}\right|=\lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}\right|=\left|\frac{d\varphi}{ds}\right|$$
所以挠率的绝对值表示了曲线的密切面(或从法向量)随 s 的旋转速率. 当$\hat{\mathbf{b}}'$与$\hat{\mathbf{n}}$反向时, $\tau(s)\geqslant 0$, 且等于$\left|\dfrac{d\varphi}{ds}\right|$, 当$\hat{\mathbf{b}}'$与$\hat{\mathbf{n}}$同向时, $\tau(s)\leqslant 0$, 且等于$-\left|\dfrac{d\varphi}{ds}\right|$. 关于挠率正负的几何意义的进一步说明将在本节末叙述.

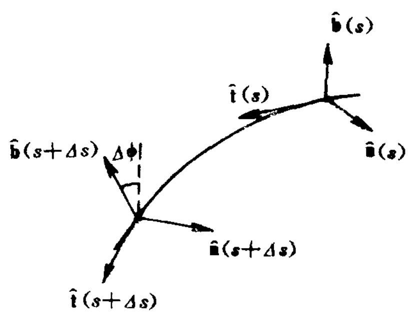


图 1.6 挠率的表示

下面讨论曲线曲率与挠率的计算公式.

当曲线以弧长为参数表示时, 即
$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)=(x(s),y(s),z(s))$$
则曲率为

$$k(s)=|r''(s)|=\sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2} \tag{1.10}$$

挠率为
$$\begin{aligned}\tau(s)&=-\hat{\mathbf{b}}'\cdot\hat{\mathbf{n}}=\hat{\mathbf{b}}\cdot\hat{\mathbf{n}}'=(\hat{\mathbf{t}}\times\hat{\mathbf{n}})\cdot(r''/k)'\\&=(r'\times r''/k)\cdot(r'''/k+r''(1/k)')\\&=(r',\ r'',\ r''')/k^2\\&=(r',\ r'',\ r''')/|r''(s)|^2\end{aligned} \tag{1.11}$$

当曲线用一般参数t表示时，因为

$$r'(s)=\frac{dr}{dt}\frac{dt}{ds}$$

$$r''(s)=\frac{d^2r}{dt^2}\left(\frac{dt}{ds}\right)^2+\frac{dr}{dt}\frac{d^2t}{ds^2}$$

所以
$$|r'(s)\times r''(s)|=\left|\frac{dr}{dt}\times\frac{d^2r}{dt^2}\right|\left(\frac{dt}{ds}\right)^3=\left|\frac{dr}{dt}\times\frac{d^2r}{dt^2}\right|\Big/\left|\frac{dr}{dt}\right|^3$$

注意到 $r'(s)$ 为单位向量，且 $r''(s)$ 与 $r'(s)$ 正交，则上式左端等于$|r''(s)|$，即曲率，故有

$$k(t)=\left|\frac{dr}{dt}\times\frac{d^2r}{dt^2}\right|\Big/\left|\frac{dr}{dt}\right|^3 \tag{1.12}$$

用类似的推导可得

$$\tau(t)=\left(\frac{dr}{dt},\ \frac{d^2r}{dt^2},\ \frac{d^3r}{dt^3}\right)\Big/\left|\frac{dr}{dt}\times\frac{d^2r}{dt^2}\right|^2 \tag{1.13}$$

应该指出曲线的曲率与挠率的计算结果与参数的选择无关。

例 1 求圆柱螺线

$$r(s)=(a\cos\omega s,\ a\sin\omega s,\ b\omega s)$$

的曲率和挠率，其中 $a>0$，$b\neq0$，$\omega=(a^2+b^2)^{-1/2}$ 均为常数。

从所给的表达式，容易验证$\left|\frac{dr}{ds}\right|=1$。所以 s 为弧长参数，故

$$\hat{\mathbf{t}}(s)=\omega(-a\sin\omega s,\ a\cos\omega s,\ b)$$

$$\hat{\mathbf{t}}'(s)=\omega^2a(-\cos\omega s,\ -\sin\omega s,\ 0)$$

由此得 $k(s)=\omega^2a$，且$\hat{\mathbf{n}}(s)=(-\cos\omega s,\ -\sin\omega s,\ 0)$

$$\hat{\mathbf{b}}(s)=\hat{\mathbf{t}}(s)\times\hat{\mathbf{n}}(s)=\omega(b\sin\omega s,\ -b\cos\omega s,\ a)$$

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{b}}'(s)&=\omega^2b(\cos\omega s,\ \sin\omega s,\ 0)\\&=-\omega^2b\hat{\mathbf{n}}(s)\end{aligned}$$

故挠率 $\tau(s)=\omega^2b$。计算表明，圆柱螺线的曲率和挠率均为常数。

例2 求椭圆

$$r(t)=(a\cos t,\ b\sin t,\ 0)\qquad(a>0,\ b>0,\ \text{均为常数})$$

的曲率和挠率。

由于 $$\frac{dr}{dt}=(-a\sin t,\ b\cos t,\ 0)$$

$$\left|\frac{dr}{dt}\right|=\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}\neq 1\ (\text{除非} a=b=1)$$

因此，t不是弧长参数，且

$$\frac{d^2 r}{dt^2}=(-a\cos t,\ -b\sin t,\ 0)$$

$$\frac{d^3 r}{dt^3}=(a\sin t,\ -b\cos t,\ 0)$$

$$\frac{dr}{dt}\times\frac{d^2 r}{dt^2}=(0,\ 0,\ ab)$$

于是由(1.12)式和(1.13)式得

$$k(t)=ab\,/\,(a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t)^{3/2}$$

$$\tau(t)=0$$

例 3　曲率恒等于零的曲线为直线，挠率恒为零的曲线为平面曲线.

若曲线 $\boldsymbol{r}(s)$ 的曲率恒等于零，则 $\boldsymbol{r}''(s)=0$，即 $\boldsymbol{r}'(s)=$ 常向量 $\boldsymbol{C}$。由此得 $\boldsymbol{r}(s)=\boldsymbol{C}s+\boldsymbol{C}_1$($\boldsymbol{C}_1$ 为常向量)，这是一个过 $\boldsymbol{C}_1$ 点且平行于 $\boldsymbol{C}$ 的直线.

若曲线 $\boldsymbol{r}(s)$ 的挠率恒为零，则$\hat{\mathbf{b}}(s)=$ 常向量。于是

$$0=\hat{\mathbf{b}}\cdot\boldsymbol{r}'(s)=(\hat{\mathbf{b}}\cdot\boldsymbol{r}(s))'$$

由此得 $$\boldsymbol{r}(s)\cdot\hat{\mathbf{b}}=\text{const.}$$

设s_0是曲线上任一点，则由上式可得

$$(\boldsymbol{r}(s)-\boldsymbol{r}(s_0))\cdot\hat{\mathbf{b}}=0$$

可见 $\boldsymbol{r}(s)$ 位于通过 s_0、法线为$\hat{\mathbf{b}}$ 的平面上，即 $\boldsymbol{r}(s)$ 是一个平面曲线.

例 4　若某曲线的所有法面通过定点，则该曲线为球面曲线(即曲线位于球面上).

不失一般性，可设曲线 $\boldsymbol{r}(s)$ 的法面通过原点，则由假定条件知 $\boldsymbol{r}(s)$ 位于它的法平面上. 于是有$\hat{\mathbf{t}}(s)\cdot\boldsymbol{r}(s)=0$，即 $\boldsymbol{r}'(s)\cdot\boldsymbol{r}(s)=0$. 从而 $(\boldsymbol{r}(s)\cdot\boldsymbol{r}(s))'=2\boldsymbol{r}'(s)\cdot\boldsymbol{r}(s)=0$. 可见，$|\boldsymbol{r}(s)|^2=$ 常数。故曲线$\boldsymbol{r}(s)$落在一个球面上。

如果两条曲线$\boldsymbol{r}(t)$及$\boldsymbol{R}(t)$的值及其直到 n 阶导数的值在 $t=t_0$ 处相等，则称这两条曲线在 $t=t_0$ 处是 n 阶接触的. 从(1.12)式和(1.13)式看出，如果两条曲线在 t_0 处是三阶接触的，则这两条曲线在这一点的曲率相等，挠率相等.

三、曲线在一点邻近的性质

1. Frenet 标架

如前所述，空间曲线$\boldsymbol{r}(s)$的每一点都有三个互相正交的单位向量$\hat{\mathbf{t}}(s)$，$\hat{\mathbf{n}}(s)$，$\hat{\mathbf{b}}(s)$，且按$\hat{\mathbf{t}}$，$\hat{\mathbf{n}}$，$\hat{\mathbf{b}}$的顺序组成右手关系. 以点$\boldsymbol{r}(s)$为原点，以$\hat{\mathbf{t}}(s)$，$\hat{\mathbf{n}}(s)$ 和$\hat{\mathbf{b}}(s)$为坐标轴，构成一个标架，用来研究曲线$\boldsymbol{r}(s)$在一点邻近的性质是方便的. 这一标架：$\{\boldsymbol{r}(s);\ \hat{\mathbf{t}}(s),\ \hat{\mathbf{n}}(s),\ \hat{\mathbf{b}}(s)\}$被称为曲线在点$\boldsymbol{r}(s)$处的 Frenet 标架，标架随点的移动而变动其位置，故称活

动标架．它是研究空间曲线几何性质的重要工具．由于曲线上每一点都有标架，故有必要研究相邻两点$r(s)$、$r(s+\Delta s)$处两套标架之间差别．在$\Delta s\to 0$时，就相当于要研究$\hat{\mathbf{t}}'(s)$，$\hat{\mathbf{n}}'(s)$和$\hat{\mathbf{b}}'(s)$。

由(1.7)式和(1.9)式知$\hat{\mathbf{t}}'=k\hat{\mathbf{n}}$，$\hat{\mathbf{b}}'=-\tau\hat{\mathbf{n}}$。至于$\hat{\mathbf{n}}'$，我们可以预先把它表示为上述标架内三个向量的线性组合，即

$$\hat{\mathbf{n}}'=(\hat{\mathbf{n}}'\cdot\hat{\mathbf{t}})\hat{\mathbf{t}}+(\hat{\mathbf{n}}'\cdot\hat{\mathbf{n}})\hat{\mathbf{n}}+(\hat{\mathbf{n}}'\cdot\hat{\mathbf{b}})\hat{\mathbf{b}}$$

在其中很明显$\hat{\mathbf{n}}'\cdot\hat{\mathbf{n}}=0$。另外由$\hat{\mathbf{n}}\cdot\hat{\mathbf{b}}=0$得$\hat{\mathbf{n}}'\cdot\hat{\mathbf{b}}+\hat{\mathbf{n}}\cdot\hat{\mathbf{b}}'=0$，即$\hat{\mathbf{n}}'\cdot\hat{\mathbf{b}}=-\hat{\mathbf{n}}\cdot\hat{\mathbf{b}}'=\tau$；由$\hat{\mathbf{n}}\cdot\hat{\mathbf{t}}=0$得$\hat{\mathbf{n}}'\cdot\hat{\mathbf{t}}+\hat{\mathbf{n}}\cdot\hat{\mathbf{t}}'=0$，即$\hat{\mathbf{n}}'\cdot\hat{\mathbf{t}}=-\hat{\mathbf{n}}\cdot\hat{\mathbf{t}}'=-k$。把$\hat{\mathbf{t}}'$，$\hat{\mathbf{n}}'$，$\hat{\mathbf{b}}'$的表示式写在一起，则为

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{t}}'&=\qquad k\hat{\mathbf{n}}\\ \hat{\mathbf{n}}'&=-k\hat{\mathbf{t}}\qquad\quad+\tau\hat{\mathbf{b}}\\ \hat{\mathbf{b}}'&=\qquad -\tau\hat{\mathbf{n}}\end{aligned}\tag{1.14}$$

也可记为矩阵形式

$$\begin{bmatrix}\hat{\mathbf{t}}'\\ \hat{\mathbf{n}}'\\ \hat{\mathbf{b}}'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&k&0\\ -k&0&\tau\\ 0&-\tau&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{\mathbf{t}}\\ \hat{\mathbf{n}}\\ \hat{\mathbf{b}}\end{bmatrix}\tag{1.15}$$

这就是所谓 Frenet 公式．由公式看出，曲线的曲率k和挠率τ已知后，邻近点 Frenet 标架之间的变化情况就清楚了．

由例 1 知，对圆柱螺线$r(s)=(a\cos\omega s,\ a\sin\omega s,\ b\omega s)$，$(\omega=(a^2+b^2)^{-1/2})$而言，Frenet 公式具体为

$$\begin{bmatrix}\hat{\mathbf{t}}'\\ \hat{\mathbf{n}}'\\ \hat{\mathbf{b}}'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&a/(a^2+b^2)&0\\ -a/(a^2+b^2)&0&b/(a^2+b^2)\\ 0&-b/(a^2+b^2)&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{\mathbf{t}}\\ \hat{\mathbf{n}}\\ \hat{\mathbf{b}}\end{bmatrix}$$

2. 曲线在一点邻近的性质

将曲线$r(s)$在点s_0邻近展成 Taylor 级数:

$$r(s)=r(s_0)+r'(s_0)(s-s_0)+\frac{1}{2}r''(s_0)(s-s_0)^2+\frac{1}{6}r'''(s_0)(s-s_0)^3+\cdots$$

因为 $\quad r'(s_0)=\hat{\mathbf{t}}(s_0)$，$r''(s_0)=k(s_0)\hat{\mathbf{n}}(s_0)$，而

$$r'''=(k\hat{\mathbf{n}})'=k'\hat{\mathbf{n}}+k\hat{\mathbf{n}}'=k'\hat{\mathbf{n}}+k(-k\hat{\mathbf{t}}+\tau\hat{\mathbf{b}})=k'\hat{\mathbf{n}}-k^2\hat{\mathbf{t}}+k\tau\hat{\mathbf{b}}$$

故有

$$r(s)=r(s_0)+(s-s_0)\hat{\mathbf{t}}(s_0)+\frac{1}{2}(s-s_0)^2k(s_0)\hat{\mathbf{n}}(s_0)+\frac{1}{6}(s-s_0)^3$$

$$\cdot(k'(s_0)\hat{\mathbf{n}}(s_0)-k^2(s_0)\hat{\mathbf{t}}(s_0)+k(s_0)\tau(s_0)\hat{\mathbf{b}}(s_0))+\cdots$$

取s_0为0，即把弧长的起算点移动s_0，则有

$$r(s)=r_0+\left(s-\frac{1}{6}k_0s^3+\cdots\right)\hat{\mathbf{t}}_0+\left(\frac{1}{2}k_0s^2+\frac{1}{6}k_0's^3+\cdots\right)\hat{n}_0+\left(\frac{1}{6}k_0\tau_0s^3+\cdots\right)\hat{\mathbf{b}}_0$$

上式中，带有下脚0的各量表示在$s=0$点的取值。

作为线性近似，$\qquad r(s)\approx r_0+s\hat{\mathbf{t}}_0$

它是过r_0平行于$\hat{\mathbf{t}}_0$的直线。如图1.7(a)所示.

作为二阶近似，
$$r(s)=r_0+s\hat{\mathbf{t}}_0+\frac{1}{2}k_0s^2\hat{\mathbf{n}}_0$$
它位于$s=0$点处的密切面内，如图1.7(b)所示.

作为三阶近似(假定$k_0\tau_0\neq 0$)，
$$r(s)\approx r_0+s\hat{\mathbf{t}}_0+\frac{1}{2}k_0s^2\hat{\mathbf{n}}_0+\frac{1}{6}k_0\tau_0s^3\hat{\mathbf{b}}_0$$
它被称为 Frenet 近似，如图 1.7(c)所示. 上式最后一项的出现表明曲线偏离密切面. 挠率τ_0正或负的几何意义可以此看出来. 如果$\tau_0>0$，随着s的增加，曲线沿从法线$\hat{\mathbf{b}}$的正方向穿过密切面；如果$\tau_0<0$，则曲线沿从法线$\hat{\mathbf{b}}$的反方向穿过密切面.

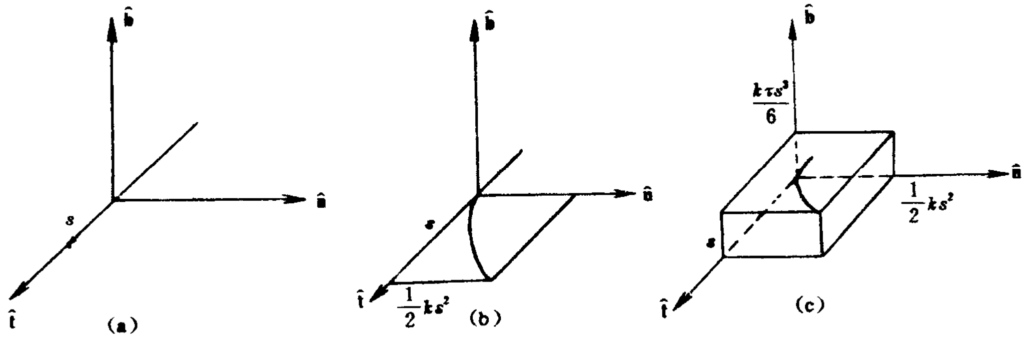


图 1.7 曲线在一点邻近的性质

1.2 三维空间中的曲面

空间曲线是参数t在区间(t_1, t_2)上取值时矢量$r(t)$端点的轨迹。类似地，当参数u，v在二维区域D内变化时，依赖于两个参数的矢量$r(u,v)$端点的轨迹是曲面.

设$\{o;\ xyz\}$是三维空间中的直角坐标系，而$x=x(u,v)$，$y=y(u,v)$，$z=z(u,v)$都是u,v的连续可微函数。这些函数的定义域是u–v平面中的一个区域D。则上面三个关系给出了从D到三维空间的一个映射(见图 1.8):
$$(u,v)\to(x(u,v),\ y(u,v),\ z(u,v))$$
在该映射下，D的象点的集合构成了三维空间的一个曲面S. 曲面S常表示为
$$r(u,v)=(x(u,v),\ y(u,v),\ z(u,v)) \tag{1.16}$$
u,v称为曲面的参数或曲线坐标.

设$(u_0,\ v_0)$是D中任一固定点，如果在参数平面上固定$v=v_0$，而让参数u在D中变动，则D中的直线$(u,\ v_0)$被映射到S上的一条曲线$r=r(u,\ v_0)$，称为曲面S上过点$r(u_0,\ v_0)$的u参数曲线，简称u曲线. 同理，命$u=u_0$，而让v变化，则得到S上过点$r(u_0,\ v_0)$的另一条曲线$r(u_0,\ v)$，被称为v参数曲线，简称v曲线. 这样经过曲面上

每个点，一般地有一条 u 曲线和一条 v 曲线．两族参数曲线构成所谓曲面上的参数曲线网，也称曲面上的坐标网．

曲面上任一点两条参数曲线的切线方向分别为$\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}$ 和$\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}$，以后分别简记为 $\boldsymbol{r}_u$ 和 $\boldsymbol{r}_v$．

如果

$$(\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v)_{(u_0,v_0)} \neq \boldsymbol{o}$$

即点 $(u_0,\ v_0)$ 处 u 曲线的切向量与 v 曲线的切向量不平行，则称 $(u_0,\ v_0)$ 为曲面上的正则点．反之，称为奇点．由正则点所构成的曲面称为正则曲面．今后，我们只限于讨论正则曲面．若点 $(u_0,\ v_0)$ 处 $\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v \neq \boldsymbol{o}$，根据 $\boldsymbol{r}_u$ 和 $\boldsymbol{r}_v$ 的连续性，则存在点 $(u_0,\ v_0)$ 的一个邻域，使得在此邻域内，$\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v \neq \boldsymbol{o}$．于是在这块曲面上每一点有唯一的一条 u 曲线和一条 v 曲线，而且这两条曲线不相切．这样的两族曲线构成所谓正则坐标网．

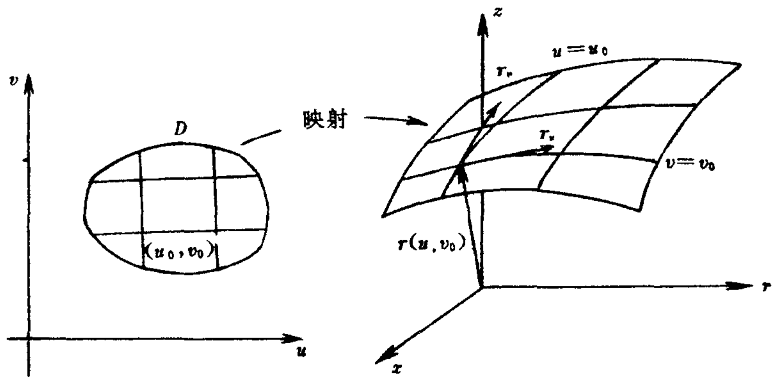


图 1.8 曲面的参数表示

例 1 设$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$是平面 S 上两个非平行的向量，$\boldsymbol{r}_0$ 是该平面上一给定点(如图 1.9)，则 S 可表示为

$$\boldsymbol{r}(u,v) = \boldsymbol{r}_0 + u\boldsymbol{a} + v\boldsymbol{b}$$

显然，参数曲线是分别平行于$\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$的两族直线．由于$\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{o}$，故该参数曲线网为正则坐标网．

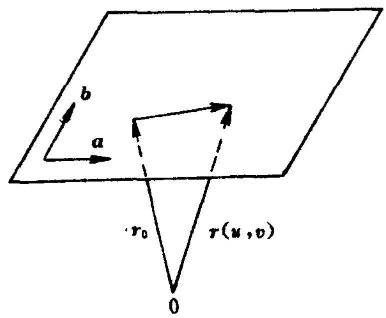


图 1.9 平面的一种参数表示

例 2 球面的方程可表示为

$$\boldsymbol{r}(\theta,\ \varphi) = (a\sin\theta\cos\varphi,\ a\sin\theta\sin\varphi,\ a\cos\theta)$$

$$(a > 0,\ 0 \leqslant \theta \leqslant \pi,\ 0 \leqslant \varphi < 2\pi)$$

因为

$$\boldsymbol{r}_\theta = (a\cos\theta\cos\varphi,\ a\cos\theta\sin\varphi, -a\sin\theta)$$

$$\boldsymbol{r}_\varphi = (-a\sin\theta\sin\varphi,\ a\sin\theta\cos\varphi,\ 0)$$

所以

$$\boldsymbol{r}_\theta \times \boldsymbol{r}_\varphi = (a^2\sin^2\theta\cos\varphi,\ a^2\sin^2\theta\sin\varphi,\ a^2\sin\theta\cos\theta)$$

$$= a^2\sin\theta(\sin\theta\cos\varphi,\ \sin\theta\sin\varphi,\ \cos\theta)$$

当且仅当 $\theta=0$ 和 π 时为零．即除了球面上的南、北极外，球面上的经线(φ 等于常数)与

纬线(θ 等于常数)构成正则曲线网。

一、曲面的切平面与法向量

在曲面 S: $\boldsymbol{r}(u,v)$上过点$P_0(u_0,v_0)$的任一条曲线 C(如图 1.10)可以用参数方程

$$\begin{cases} u = u(t) \\ v = v(t) \end{cases} \qquad (a \leqslant t \leqslant b) \tag{1.17}$$

来表示。其中 $u(t_0)=u_0$，$v(t_0)=v_0$，即 t_0 对应于 P_0 点。于是 C 的方程是

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u(t),v(t)) = \boldsymbol{r}_1(t)$$

C在点P_0处的切向量为

$$\left(\frac{d\boldsymbol{r}_1}{dt}\right)_{t=t_0} = \left(\boldsymbol{r}_u\frac{du}{dt} + \boldsymbol{r}_v\frac{dv}{dt}\right)_{t=t_0} = \left(\frac{du}{dt}\right)_{t=t_0}\boldsymbol{r}_u(u_0,v_0) + \left(\frac{dv}{dt}\right)_{t=t_0}\boldsymbol{r}_v(u_0,v_0) \tag{1.18}$$

因为假定了$\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v \neq 0$，即$\boldsymbol{r}_u$与$\boldsymbol{r}_v$线性无关。由上式看出 C 在P_0点的切向量是曲面在该点处$\boldsymbol{r}_u$和$\boldsymbol{r}_v$的线性组合。即 C 的切向量位于$\boldsymbol{r}_u$和$\boldsymbol{r}_v$构成的平面内。由于 C 是曲面 ' 过P_0点的任一曲线，故曲面上过P_0的所有曲线在该点的切向量均和$\boldsymbol{r}_u$与$\boldsymbol{r}_v$共平面。正是由于这个原因，我们把曲面在某点处的$\boldsymbol{r}_u$和$\boldsymbol{r}_v$所构成的平面称为曲面在该点的切平面。如果用 $\rho=(x_1,y_1,z_1)$表示曲面 $\boldsymbol{r}=(x(u,v),y(u,v),z(u,v))$的切平面上的点，则有

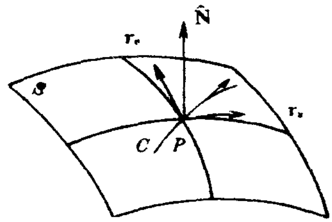


图 1.10　曲面片

$$(\rho-\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{r}_u,\ \boldsymbol{r}_v)=0$$

即

$$\begin{vmatrix} x_1-x & y_1-y & z_1-z \\ \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} = 0$$

这就是曲面的切平面方程。

设曲面 S 在 P 点的切平面为 S_1，则在 S_1 上过 P 点的所有直线都称为 S 在该点的切线。每一条这样的切线方向都称为曲面 S 在 P 点的一个方向。切线的方向完全取决于 du∶dv。

若 S 上有一条直线 g，则 S 在 g 上每一点的切平面都包括了 g。这是因为 g 是它自身在每一点的切线。

曲面的切平面的法线称为曲面在切点处的法线。显然，曲面上任一点处的法线方向与该点处的$\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v$平行。$\pm\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v$都可作为曲面法线的正向。曲面的单位法向量为

$$\hat{\mathrm{N}} = \pm\frac{\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v}{|\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v|} \tag{1.19}$$

正、负号取决于法线正方向的选择。在电磁理论与天线工程中当研究反射面或波面时，总取$\hat{\mathrm{N}}$的正向指向波源。

如由$u=u(\underline{u},\underline{v})$，$v=v(\underline{u},\underline{v})$引入新的参数，为了保证$(u,v)$与$(\underline{u},\underline{v})$一一对应且方向不变