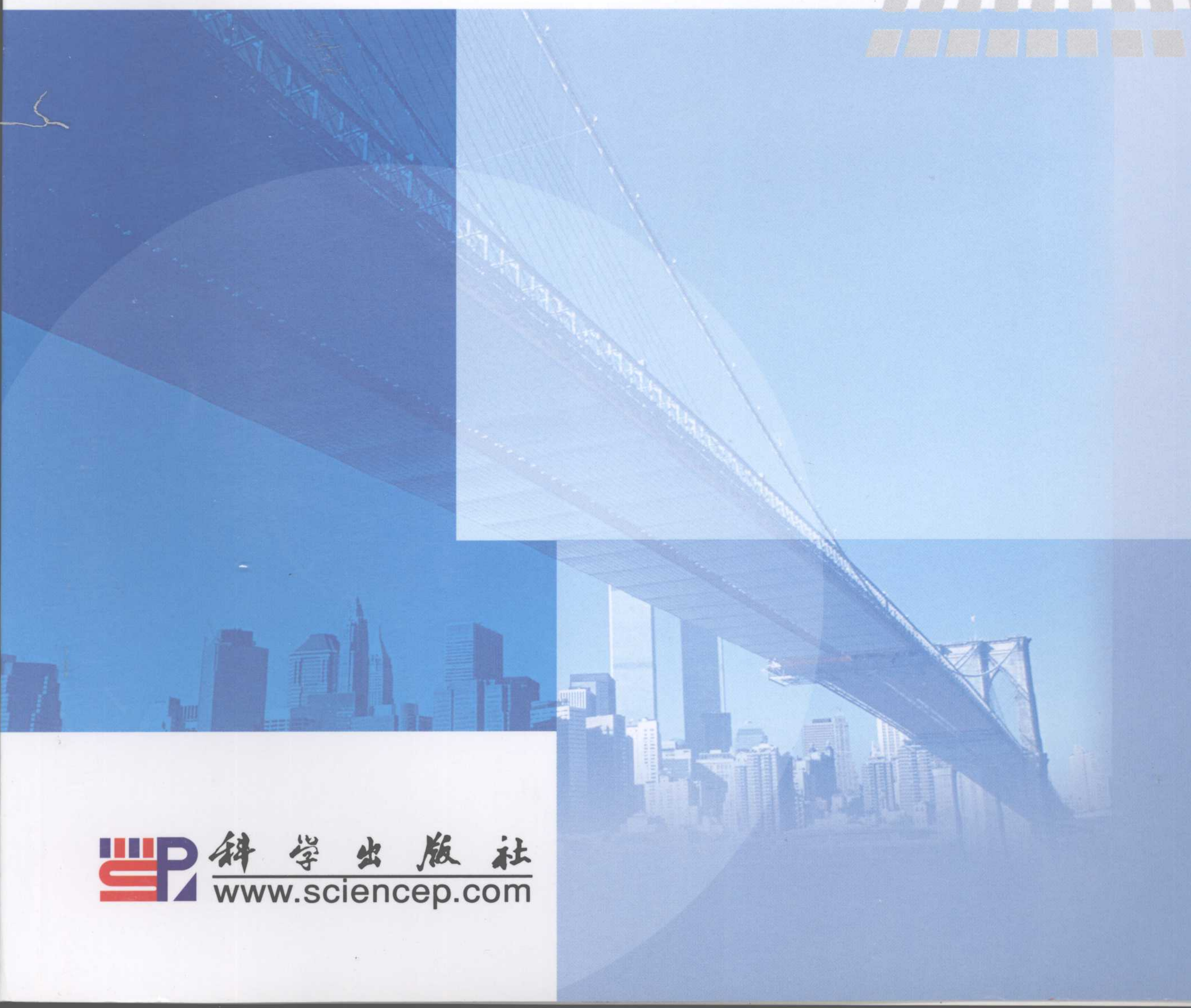
结构动力学

徐赵东 马乐为 编著



科学出版社
www.sciencep.com

结构动力学

徐赵东　马乐为　编著

科学出版社

北　京

内 容 简 介

本书是在作者多年从事结构动力学的教学及研究工作的基础上撰写而成。书中在介绍基本概念和基础理论的同时，也介绍了结构动力学领域的若干前沿研究课题。本书既注重读者对基本知识的掌握，也注重读者对结构振动领域研究发展方向的掌握。

本书的主要内容包括运动方程的建立、单自由度体系、多自由度体系、无限自由度体系的动力学问题、随机振动、结构动力学的前沿研究课题。书中侧重介绍单自由度体系和多自由度体系，重点突出。

本书可作为土木工程、机械工程、力学、航空等相关学科的本科生和研究生的教学用书，也可以作为从事结构振动、模态分析与测试等方面工作的研究人员和工程技术人员的参考用书。

图书在版编目(CIP)数据

结构动力学/徐赵东，马乐为编著. —北京：科学出版社，2007
ISBN 978-7-03-020457-8

Ⅰ. 结…　Ⅱ. ①徐…②马…　Ⅲ. 结构动力学　Ⅳ. 0342

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 157956 号

责任编辑：童安齐　庞海龙/责任校对：刘彦妮
责任印制：吕春珉/封面设计：耕者设计工作室

科学出版社出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

铭浩彩色印装有限公司印刷
科学出版社发行　各地新华书店经销
*
2007 年 11 月第 一 版　开本：787×1092 1/16
2007 年 11 月第一次印刷　印张：15 3/4
印数：1—3 000　字数：350 000

定价：28.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换〈环伟〉）
销售部电话 010-62136131　编辑部电话 010-62137026(BA08)

前　言

众所周知，在土木工程、桥梁工程、机械工程、航空工程等领域存在着大量的振动问题，因而，在高等工科院校的土木、机械和航空类专业的专业基础课中，结构动力学是一门非常重要的课程。特别是对于地震多发区和自然灾害频发的我国，工程抗振（震）是一个突出的问题，而现代抗振（震）设计的理论基础正是结构动力学。系统地掌握结构动力学的基本概念、计算原理和计算方法对上述专业课程的学习至关重要。

本书作者长期从事土木专业的本科与研究生教学工作，深深理解学生在专业课学习中往往由于结构动力学的知识欠缺导致对专业课的困惑或研究工作的停滞不前。因此，本书在选材上注重基础理论和基本概念，同时着重于理论与概念的工程应用和背景。作者力求避免教材内容、论述和思路跳跃过大，在语言表述上尽量与高等数学、线性代数、材料力学、结构力学等本科基础课程相衔接。由于结构动力学的应用范围很广，为了避免泛泛而谈，本书将以土木工程的动力问题为依托讲述结构动力学。当然，由于动力学的基本原理和方法仍是针对各种工程领域的动力问题，所以本书也适用于其他专业的本科生与研究生的学习。为了增加学生对结构动力学的兴趣，了解结构方面的动力学最新发展，本书还讲述了结构动力学领域的若干前沿研究专题，并加入了作者最新的研究成果，从而增加了本书的新颖性与实用性。

本书的主要内容包括：结构动力学研究体系的分类与研究方法的概述、结构动力学基础与运动方程的建立、单自由度体系动力问题、多自由度体系动力问题、无限自由度体系动力问题、随机振动与结构动力学的若干前沿研究课题。

本书的第 1 章，第 2 章的 2.1 节、2.2 节，第 3 章，第 6 章，第 7 章的 7.2 节、7.3 节、7.4 节、7.6 节由东南大学徐赵东教授编写；第 4 章，第 5 章，第 2 章的 2.3 节、2.4 节，第 7 章的 7.1 节、7.5 节由西安建筑科技大学马乐为副教授编写。全书在撰写过程中参考了大量相关的专著及教材，同时得到了美国著名动力学专家 J. Penzien 教授、Fuh-Gwo Yuan 教授和东南大学李爱群教授的鼎力支持与帮助，东南大学研究生刘蜜、涂青、张江彬及西安建筑科技大学研究生钟骁骏、张明文、车文鹏、胡小勇为本书的出版做了很多工作，在此向他们表示诚挚的感谢。

由于作者水平有限，时间较为仓促，书中存在不妥之处，敬请广大读者批评指正。

主要符号表

$\boldsymbol{M}$	质量矩阵
$\boldsymbol{K}$	刚度矩阵
$\boldsymbol{C}$	阻尼矩阵
$\boldsymbol{\Phi}$	振型矩阵
M,m	质量系数,弯矩
K,k	刚度系数
C,c	阻尼系数
M_n	振型质量
K_n	振型刚度
C_n	振型阻尼
c_{cr}	临界阻尼系数
m_{ij}	质量矩阵中的元素
k_{ij}	刚度矩阵中的元素
c_{ij}	阻尼矩阵中的元素
ζ	阻尼比
ζ_{cr}	临界阻尼比
ζ_j	第 j 阶振型阻尼比
$P(t)$	动荷载
P_0	简谐荷载幅值
$F_{\mathrm{S}}(t)$	弹性恢复力
$F_{\mathrm{I}}(t)$	惯性力
$F_{\mathrm{D}}(t)$	阻尼力
c^*	广义阻尼
k^*	广义刚度
$P^*(t)$	广义荷载
f	工程频率
f_{D}	阻尼体系工程频率
ω	圆频率
ω_n	自振圆频率
ω_{D}	阻尼体系圆频率
ω/ω_n	频率比
T	周期
ϕ	相位角
t	时间
t_d	脉冲作用时间
δt	单位脉冲
Δt	时间步长
N	轴力,自由度数
V	剪力
u	位移
$\dot{u}$	速度
$\ddot{u}$	加速度
u_g	地面运动位移
$\ddot{u}_g$	地震加速度
$u(0)$	初始位移
$\dot{u}(0)$	初始速度
u_{st}	等效静力位移
u_0	位移幅值
q	广义坐标
W	功
δW	虚功
δu	虚位移
$R_d(\omega)$	动力放大系数
TR	传递系数
x	水平坐标
y	竖向坐标
E	弹性模量
G	剪切模量
ρ	密度

目　录

前言

主要符号表

第 1 章　绪论 …… 1

1.1　结构动力学概述 …… 1

1.2　动力荷载 …… 1

1.2.1　简谐荷载 …… 2

1.2.2　非简谐周期荷载 …… 2

1.2.3　冲击荷载 …… 2

1.2.4　任意动荷载 …… 3

1.3　结构动力问题的特点 …… 4

1.4　结构离散化方法 …… 4

1.4.1　集中质量法 …… 5

1.4.2　广义坐标法 …… 6

1.4.3　有限单元法 …… 6

习题 …… 8

第 2 章　动力学基础及运动方程的建立 …… 9

2.1　动力学基础 …… 9

2.1.1　动力自由度 …… 9

2.1.2　基本动力系统元件 …… 10

2.1.3　动力系统类型 …… 13

2.2　运动微分方程的建立 …… 13

2.2.1　动力平衡法 …… 13

2.2.2　虚位移原理 …… 15

2.2.3　Hamilton 原理 …… 18

2.2.4　Lagrange 方程 …… 19

2.3　重力的影响 …… 22

2.4　地基运动的影响 …… 23

习题 …… 24

第 3 章　单自由度体系 …… 26

3.1　自由振动反应 …… 27

3.1.1　无阻尼自由振动 …… 27

3.1.2　有阻尼自由振动 …… 29

3.1.3　阻尼及其测量 …… 32

3.2　简谐荷载反应 …… 35
3.2.1　无阻尼体系的简谐荷载反应 …… 35
3.2.2　有阻尼体系的简谐荷载反应 …… 38
3.2.3　动力放大系数 …… 39
3.2.4　共振反应 …… 42
3.2.5　阻尼比的求解 …… 42
3.3　周期荷载反应 …… 44
3.4　冲击荷载反应 …… 48
3.4.1　正弦波脉冲 …… 48
3.4.2　矩形脉冲 …… 49
3.4.3　三角形脉冲 …… 50
3.5　任意荷载的反应 …… 53
3.5.1　Duhamel 积分(时域分析) …… 53
3.5.2　Fourier 变换(频域分析) …… 59
3.6　振动的能量 …… 61
3.6.1　自由振动过程中的能量 …… 61
3.6.2　粘性阻尼体系的能量耗散 …… 62
3.6.3　等效粘性阻尼 …… 63
3.6.4　复阻尼 …… 65
3.6.5　摩擦阻尼 …… 66
3.7　结构振动试验 …… 66
3.7.1　振动试验简介 …… 66
3.7.2　激振设备 …… 67
3.7.3　测振仪器 …… 68
3.7.4　数据采集分析系统 …… 71
3.8　隔振原理 …… 71
3.8.1　积极隔振 …… 72
3.8.2　消极隔振 …… 73
习题 …… 75
第 4 章　多自由度体系 …… 77
4.1　两个自由度体系 …… 78
4.1.1　运动方程的建立 …… 78
4.1.2　无阻尼自由振动 …… 79
4.1.3　振型 …… 80
4.1.4　运动方程的一般解 …… 81
4.2　无阻尼自由振动 …… 81
4.2.1　运动方程的建立 …… 81
4.2.2　振型 …… 82

4.2.3 振型的正交性 …… 83
4.2.4 广义质量和广义刚度 …… 85
4.3 有阻尼体系的受迫振动 …… 87
4.3.1 坐标的耦联与正则坐标 …… 88
4.3.2 阻尼假设 …… 89
4.3.3 振型叠加法 …… 91
4.4 动力特性的实用计算方法 …… 94
4.4.1 Dunkerley 公式 …… 94
4.4.2 Reyleigh 能量法 …… 96
4.4.3 Ritz 法 …… 99
4.4.4 矩阵迭代法 …… 101
4.4.5 子空间迭代法 …… 105
4.5 动力反应数值分析方法 …… 107
4.5.1 中心差分法 …… 108
4.5.2 平均常加速度法 …… 109
4.5.3 线性加速度法 …… 111
4.5.4 Newmark-β 法 …… 113
4.5.5 Wilson-θ 法 …… 114
4.6 动力分析中的有限元法 …… 117
4.6.1 有限单元法的一般过程 …… 117
4.6.2 动力分析中的有限元法 …… 119
4.6.3 梁的位移模式和形函数 …… 120
4.6.4 单元刚度矩阵 …… 121
4.6.5 质量矩阵 …… 123
4.6.6 阻尼矩阵 …… 125
4.6.7 等效结点荷载 …… 125
习题 …… 129
第5章 无限自由度体系 …… 131
5.1 无阻尼直梁的轴向振动 …… 131
5.2 无阻尼梁的横向自由振动 …… 135
5.3 有阻尼梁在一般荷载作用下的偏微分运动方程 …… 138
5.4 振型的正交性 …… 141
5.5 振型叠加法 …… 143
5.5.1 广义质量 …… 144
5.5.2 广义荷载 …… 144
5.6 轴向力、剪切变形和转动惯量对振动方程的影响 …… 147
5.6.1 考虑轴向力影响的梁的振动方程 …… 148
5.6.2 转动惯量对振动方程的影响 …… 149

5.6.3　考虑转动惯量与剪切变形的梁振动方程 ………………………… 150

5.7　简支梁在移动荷载作用下的振动 ………………………… 152

5.8　板的横向自由振动 ………………………… 154

习题 ………………………… 156

第 6 章　结构随机振动 ………………………… 158

6.1　概述 ………………………… 158

6.2　随机过程 ………………………… 160

6.2.1　随机过程的概念 ………………………… 160

6.2.2　随机过程的概率描述 ………………………… 161

6.2.3　随机过程的数字特征 ………………………… 162

6.2.4　平稳随机过程 ………………………… 169

6.2.5　几种重要的随机过程 ………………………… 171

6.2.6　地震地面运动的随机模型 ………………………… 172

6.3　线性单自由度体系随机反应 ………………………… 176

6.3.1　时域分析方法 ………………………… 176

6.3.2　频域分析方法 ………………………… 178

6.3.3　激励和反应的互相关函数和互谱密度 ………………………… 180

6.4　线性多自由度体系随机反应 ………………………… 182

6.4.1　直接方法 ………………………… 182

6.4.2　振型叠加法 ………………………… 186

6.5　非线性结构随机反应分析 ………………………… 191

6.5.1　摄动法 ………………………… 192

6.5.2　等效线性化方法 ………………………… 194

6.6　结构随机反应分析的状态空间法 ………………………… 195

6.6.1　状态空间的基本概念 ………………………… 196

6.6.2　单自由度体系 ………………………… 196

6.6.3　多自由度体系 ………………………… 198

习题 ………………………… 199

第 7 章　结构动力学若干研究课题 ………………………… 200

7.1　结构地震反应分析 ………………………… 200

7.1.1　建筑结构地震作用计算方法简介 ………………………… 201

7.1.2　单自由度弹性体系的水平地震作用 ………………………… 202

7.1.3　地震反应谱 ………………………… 203

7.1.4　振型分解反应谱法 ………………………… 205

7.1.5　底部剪力法 ………………………… 207

7.2　结构振动控制 ………………………… 210

7.2.1　概念及分类 ………………………… 210

7.2.2　粘弹性阻尼器减振技术 ………………………… 212

7.2.3　橡胶基础隔震技术 …… 215
7.2.4　磁流变阻尼器减振技术 …… 218
7.3　模态分析与理论 …… 221
7.3.1　模态参数 …… 221
7.3.2　实模态分析 …… 222
7.3.3　复模态分析 …… 223
7.4　结构动力损伤识别 …… 225
7.4.1　频率基损伤识别方法 …… 226
7.4.2　模态基损伤识别方法 …… 226
7.4.3　基于刚度变化的损伤识别方法 …… 228
7.4.4　基于柔度变化的损伤识别方法 …… 228
7.4.5　基于能量的损伤识别方法 …… 229
7.4.6　动力损伤识别研究展望 …… 229
7.5　动力分析非线性问题 …… 230
7.5.1　动力分析中的物理非线性问题 …… 230
7.5.2　动力分析中的几何非线性问题 …… 232
7.6　子结构法 …… 234
7.6.1　子结构法有限元分析 …… 234
7.6.2　子结构法损伤识别 …… 235
习题 …… 236
参考文献 …… 237

第1章 绪 论

1.1 结构动力学概述

每当我们为神州飞船自豪骄悦时,你可曾想过其空间变轨技术蕴含着什么样的高科技?每当我们观赏飞行表演的战机穿云破雾、直插蓝天时,你可曾想过是什么力量让几吨重的战机身轻如燕、姿态自如?为何美国的塔可马大桥在19m/s的风速下崩然倒下?为何隔震或减震建筑具有更高的抗震安全性?所有这些问题都是广泛存在于自然界中的动力问题,是动力学研究领域的前沿课题。

对动力学的理论研究始于17世纪,Joseph Louis Lagrange(1736～1813)于1788年出版的《分析力学》奠定了线性系统动力分析的基础。随着科学技术的不断创新,各种动力装置开始应用于不同的工程结构,促进了结构动力学理论和方法的不断进步。时至今日,人们可以成功地进行具有成千上万个自由度的大型复杂结构体系的动力分析。

对于结构设计和结构分析,静力问题是首先要面对的,而且是问题的主要方面,但常常动力荷载却是导致结构破坏的关键因素,因此结构的动力分析往往对结构设计起着控制作用,例如地震引起的结构倒塌破坏、风振引起的大桥和柔性大跨结构破坏、冲击荷载作用下桩身的变形与地基土的挠动等,它们造成的破坏和损失程度远胜于静荷载。因此,在工程结构的研究、设计和安全性评价时,进行结构的动力反应分析是必要的。虽然在某些结构设计规范或结构动力反应分析中,为简化起见,采用了一些拟静力计算方法,例如结构抗震规范中的反应谱法,抗风设计中用等效静力形式的风压代替实际的风压,但这些方法的理论基础仍源于结构动力学,因此,求解的过程中还是必须进行动力分析,例如需要确定结构的自振周期,而在多自由度体系反应谱法分析时还需要确定结构的振型等。

结构动力学是研究结构体系的动力特性(主要指体系的周期、频率、振型及阻尼特性),确定结构在动力荷载作用下动力反应(包括内力、应变、位移、速度、加速度等)的分析原理和方法的一门理论和技术的学科。该学科的根本目的在于为改善工程结构体系在动力环境下的安全性和可靠性提供坚实的理论基础。

1.2 动力荷载

根据荷载是否随时间变化可以把荷载分为静荷载和动荷载两大类。静荷载的特性是荷载的大小、方向和作用点不随时间变化或缓慢变化的荷载,如结构的自重、雪荷载、积灰荷载等。与之相反,动荷载则是荷载的大小、方向或作用点均随或某一项随着时间的改变而改变。另外,动荷载作用下,结构体系将产生惯性力,这个力的大小与外荷载相比不可忽略的,因此必须考虑。典型的动荷载包括机械设备产生的简谐振动、风荷载、地震作

用等。

根据荷载是否具有预先确定性，即是否知道下一时刻的荷载大小、方向和作用点，动荷载可以分为两类：确定性（非随机）荷载和非确定性（随机）荷载。确定性荷载是荷载随时间的变化规律已预先确定，是完全已知的时间过程；非确定性荷载是荷载随时间的变化规律预先不可以确定，是一种随机过程。根据这两类动荷载的不同，结构动力分析方法可划分为两类：确定性分析和随机振动分析。当不考虑结构体系的不确定性时，选用哪种分析方法将依据荷载的类型而定。根据荷载随时间的变化规律，动力确定性荷载一般可以划分为两类，即周期荷载和非周期荷载。对于周期性荷载可分为简谐周期荷载和非简谐周期荷载，非周期性荷载又分为冲击荷载和其他规律性荷载。对土木结构而言，不确定性荷载可分为风荷载、地震作用和其他非确定变化规律的荷载。为清晰起见，将上述荷载分类绘成图 1.1 所示。

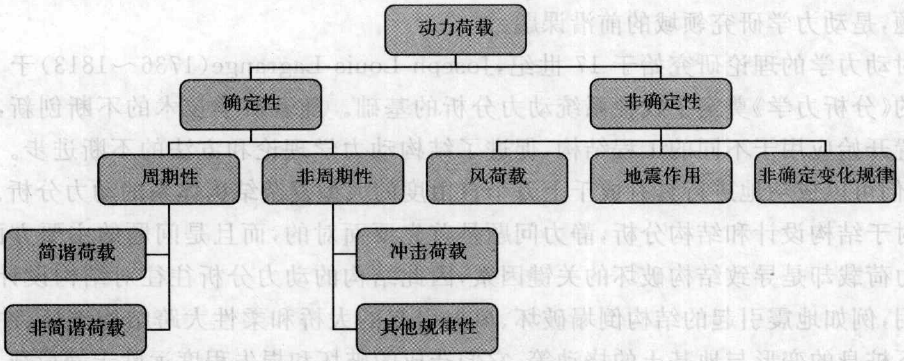


图 1.1　动力荷载的分类

1.2.1　简谐荷载

简谐荷载是荷载随时间做简谐周期性变化的荷载，它可以用简谐函数来表示，例如 $P(t)=P_0\sin\theta t$ 或 $P(t)=P_0\cos\theta t$。简谐荷载作用下结构的动力反应分析是非常重要的，因为不仅实际工程中存在这类荷载（例如圆形凸轮绕定轴转动产生的离心荷载），而且由于非简谐的周期性荷载可以用一系列简谐荷载的和来表示。这样，一般周期性荷载作用下结构的动力反应问题可以转化为一系列简谐荷载作用下的反应问题。另一方面，由于结构对简谐荷载的反应规律可以方便地反映出结构的动力特性，因此，简谐荷载对动力分析具有重要意义。

1.2.2　非简谐周期荷载

非简谐周期荷载是指荷载随时间作周期性变化，是时间 t 的周期函数，但不是简单的简谐函数，例如平稳情况下波浪对堤坝的动水压力；轮船螺旋桨产生的推力等。

1.2.3　冲击荷载

冲击荷载的荷载幅值在很短时间内急剧增大或急剧减小，例如爆炸引起的冲击波、撞

击荷载等。

1.2.4　任意动荷载

任意动荷载是荷载的大小、方向和作用点变化复杂，随机性和随意性强，难以用解析函数表示的荷载，例如结构所受的地震作用、风荷载等。

图 1.2 给出了以上四种类型荷载的时程曲线。

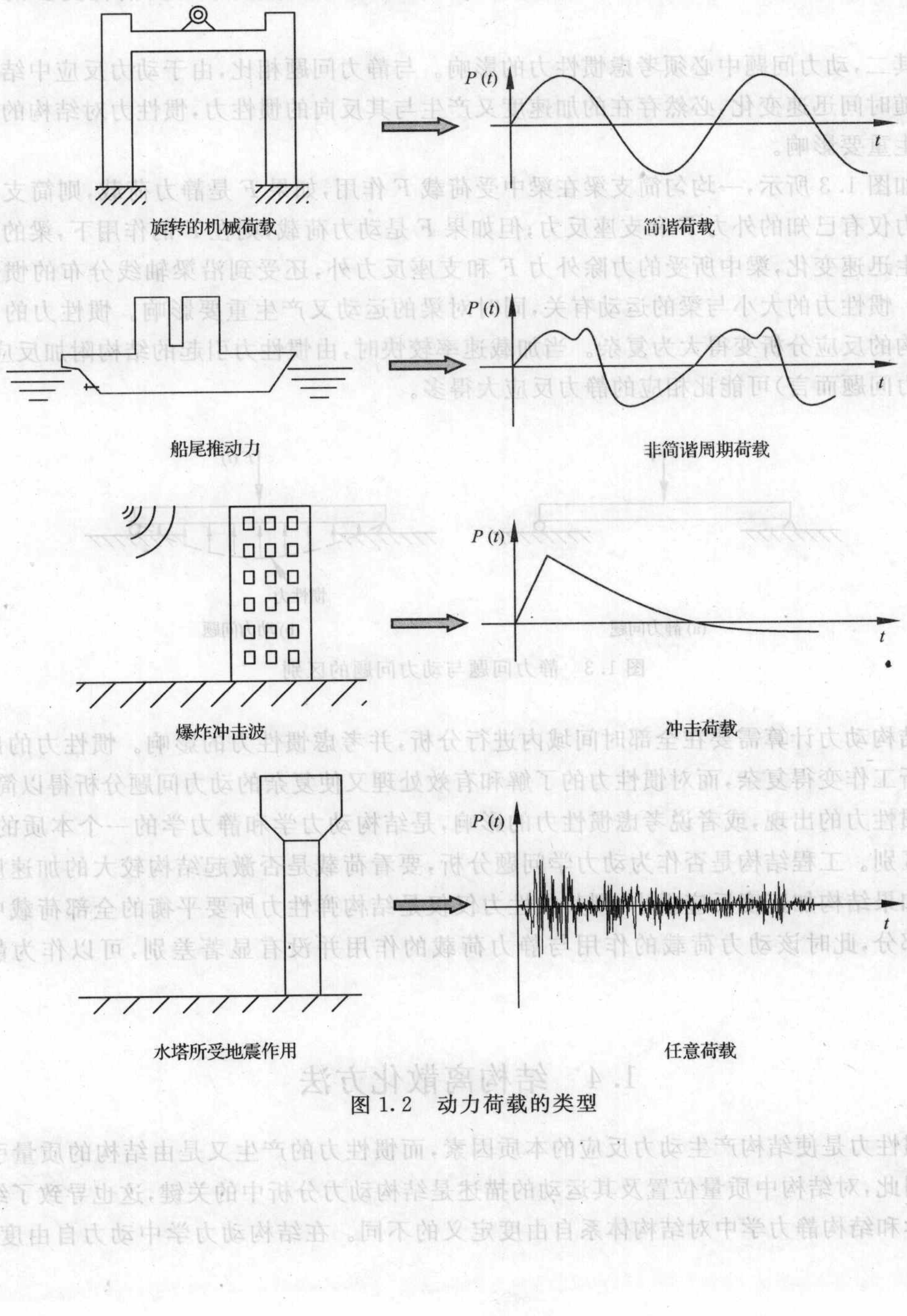


图 1.2　动力荷载的类型

1.3　结构动力问题的特点

结构动力问题是求解结构在动力荷载作用下的结构反应，与结构静力问题相比，结构动力问题的特点主要体现在以下两方面：

其一，动力问题具有随时间变化的特性。由于动力荷载是随时间变化的，计算结构的动力反应需要求解全部时间点上的一系列解，这比静力问题复杂且要消耗更多的计算时间。

其二，动力问题中必须考虑惯性力的影响。与静力问题相比，由于动力反应中结构的位移随时间迅速变化，必然存在的加速度又产生与其反向的惯性力，惯性力对结构的反应又产生重要影响。

如图 1.3 所示，一均匀简支梁在梁中受荷载 F 作用，如果 F 是静力荷载，则简支梁所受的力仅有已知的外力 F 和支座反力；但如果 F 是动力荷载，则在 F 的作用下，梁的位置会发生迅速变化，梁中所受的力除外力 F 和支座反力外，还受到沿梁轴线分布的惯性力作用。惯性力的大小与梁的运动有关，同时对梁的运动又产生重要影响。惯性力的出现使结构的反应分析变得大为复杂。当加载速率较快时，由惯性力引起的结构附加反应（相对静力问题而言）可能比相应的静力反应大得多。

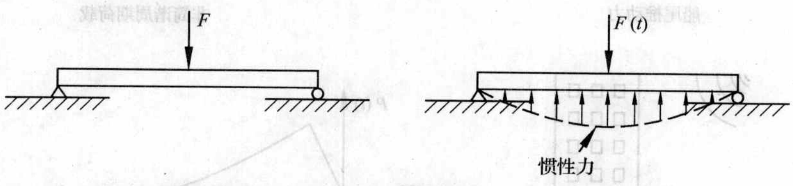


图 1.3　静力问题与动力问题的区别

结构动力计算需要在全部时间域内进行分析，并考虑惯性力的影响。惯性力的出现使分析工作变得复杂，而对惯性力的了解和有效处理又使复杂的动力问题分析得以简化。

惯性力的出现，或者说考虑惯性力的影响，是结构动力学和静力学的一个本质的、重要的区别。工程结构是否作为动力学问题分析，要看荷载是否激起结构较大的加速度反应。如果结构加速度反应很小，则其惯性力仅仅是结构弹性力所要平衡的全部荷载中的较小部分，此时该动力荷载的作用与静力荷载的作用并没有显著差别，可以作为静力处理。

1.4　结构离散化方法

惯性力是使结构产生动力反应的本质因素，而惯性力的产生又是由结构的质量引起的。因此，对结构中质量位置及其运动的描述是结构动力分析中的关键，这也导致了结构动力学和结构静力学中对结构体系自由度定义的不同。在结构动力学中动力自由度（数

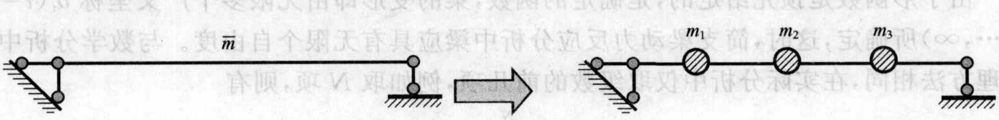
目)的定义为:动力分析中为确定体系任一时刻全部质量的几何位置所需要的独立参数的数目。这些独立参数也称为体系的广义坐标,可以是位移、转角或其他广义量。关于广义坐标与动力自由度的概念将在第2章详细介绍。

要准确地描述系统的惯性力,合理地选择动力自由度是十分重要的。一切结构系统都具有分布质量,因而都是无限自由度体系。但是除了某些简单的结构可以作为无限自由度处理以外,大多数的工程结构作为无限自由度计算将是极其困难的。在结构动力计算时,为了避免过于繁杂和数学上的困难,一般将结构处理为有限自由度体系,这一过程称为结构的离散化。动力分析中常用的结构离散化方法有集中质量法、广义坐标法和有限元法。综上所述,离散化方法也就是把无限自由度问题转化为有限自由度的过程。

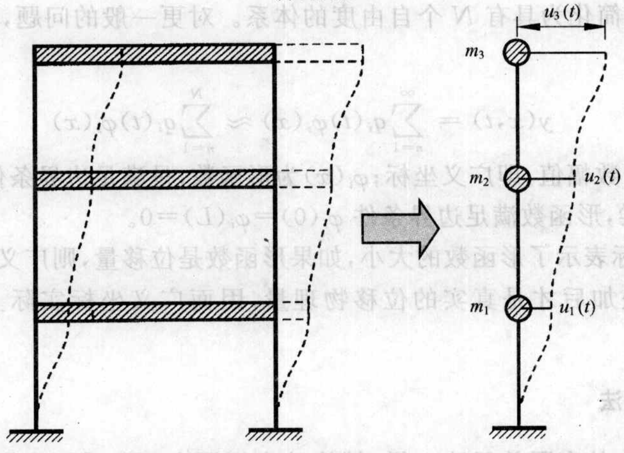
1.4.1　集中质量法

集中质量法是结构动力分析最常用的处理方法,**该方法将实际结构的质量按一定规则集中在某些几何点上,除这些点之外的结构杆件是无质量的。**这样就将无限自由度体系变成一有限自由度体系。

图1.4是两个连续分布质量的结构,通过集中质量法将无限自由度问题化为有限自由度的例子。其中图1.4(a)为一简支梁,通过把连续分布的质量 $\bar{m}$ 集中到梁的三个点上,即用集中质量 m_1, m_2, m_3 代替连续分布质量,将梁化为具有三个质点的有限自由度体系。如果仅考虑梁平面内的横向运动,则集中质量简支梁具有三个横向位移自由度。图1.4(b)为三层平面框架结构,如果把每一层楼板的上下各半层柱、墙的质量,以及该层楼板和梁的质量集中到该层楼板的顶面中心处,则该三层框架结构简化为具有三个集中质



(a) 简支梁



(b) 框架结构

图1.4　结构集中质量法离散化示意图

量的有限自由度体系。

1.4.2　广义坐标法

能决定体系几何位置的彼此独立的量，称为该体系的广义坐标。对于梁上仅有分布质量的系统，为了提高计算精度，可以采用广义坐标法。在数学中常采用级数展开法求微分方程的解，在结构动力分析中，可以采用相同的方法进行求解，例如对于一个具有分布质量的简支梁（如图 1.5 所示），其变形（挠）曲线可用三角级数来表示，即

$$y(x,t)=\sum_{i=1}^{\infty}b_i\sin\frac{i\pi x}{L}=\sum_{i=1}^{\infty}b_i(t)\sin\frac{i\pi x}{L}\tag{1.1}$$

式中，L 为梁长，$\sin i\pi x/L$ 为形状函数（简称为形函数），它是满足边界条件的给定函数；$b_i=b_i(t)$为广义坐标，是一组待定参数，对动力问题而言，它是时间的函数。

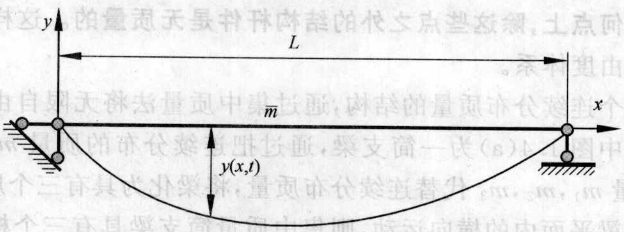


图 1.5　用广义坐标法离散化简支梁

由于形函数是预先给定的，是确定的函数，梁的变形即由无限多个广义坐标 $b_i(i=1,2,\cdots,\infty)$所确定，这时，简支梁动力反应分析中梁应具有无限个自由度。与数学分析中的处理方法相同，在实际分析中仅取级数的前几项，例如取 N 项，则有

$$y(x,t)=\sum_{i=1}^{N}b_i(t)\sin\frac{i\pi x}{L}\tag{1.2}$$

这样，简支梁就被简化为具有 N 个自由度的体系。对更一般的问题，结构的位移表达式可写为

$$y(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}q_i(t)\varphi_i(x)\approx\sum_{n=1}^{N}q_i(t)\varphi_i(x)\tag{1.3}$$

式中，$q_i(t)$为形函数幅值，即广义坐标；$\varphi_i(x)$为形函数，是满足边界条件的连续函数，如图 1.5 所示的简支梁，形函数满足边界条件 $\varphi_i(0)=\varphi_i(L)=0$。

虽然广义坐标表示了形函数的大小，如果形函数是位移量，则广义坐标具有位移的量纲，但只有 n 项叠加后才是真实的位移物理量，因而广义坐标实际上并不是真实的物理量。

1.4.3　有限单元法

与静力问题中的有限单元法一样，结构动力问题也可以采用有限单元法进行离散。有限单元法综合了集中质量法和广义坐标法的特点。用有限单元法分析动力问题，是以结构结点的位移表达结构上各个点的位移状态。首先将结构体系划分为一系列的单元，

单元间以结点相连接，结点的位移便是决定结构体系中全部质点位置的独立坐标。

在采用有限单元法离散时，不在整个梁的范围内取有限个函数项的和作为全梁某时刻的挠曲线，而是在各个单元范围内假设两结点之间的挠曲线，该挠曲线称为位移函数或者插值函数，其确定了单元位移的形状，它的表达式包含若干个参数。位移函数在单元内部保持光滑连续，并且在单元两端满足支承和变形连续条件。根据这些条件，可以将位移函数中的参数通过结点位移来表达。因此，整个结构系统便转化为以结点位移为未知数的有限自由度系统了。

例如，对一个连续梁，可分为 N 个单元（梁段），相邻单元的交点称为结点，取结点位移参数（线位移 u 和转角 θ）为广义坐标。在图 1.6 中，$N=3$，即采用三个有限单元离散化的情形。图 1.6 给出的有限元模型共有六个广义坐标（位移参数）：$u_1,\theta_1,u_2,\theta_2,u_3,\theta_3$，相应的形函数为 $\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,\varphi_4,\varphi_5,\varphi_6$。

对于采用 N 个单元离散化的悬臂梁模型，共有 $2N$ 个广义坐标，梁的位移可以用 $2N$ 个广义坐标及其形函数表示如下

$$u(x)=u_1\varphi_1(x)+\theta_1\varphi_2(x)+\cdots+u_N\varphi_{2N-1}(x)+\theta_N\varphi_{2N}(x) \tag{1.4}$$

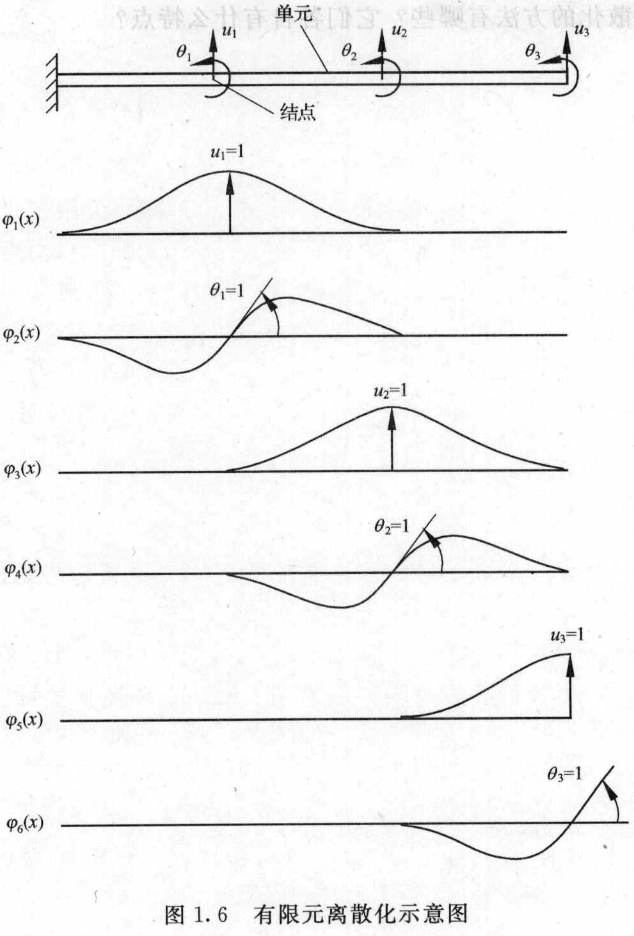


图 1.6　有限元离散化示意图