北京市高等学校教育
教学改革试点项目

大学数学(二)

陈薇 主编

科学出版社

北京市高等学校教育教学改革试点项

大学数学（二）

主　编　陈　薇

编写者　沈晓南　苏时光

审稿者　张嘉林

科学出版社

内　容　简　介

本书是中国农业大学教学改革后的数学教材之一. 内容包括向量分析，多元微积分的应用，曲线积分与曲面积分，无穷级数和傅里叶级数. 书末附有习题答案与提示.

本书叙述清晰、通俗浅显. 既体现了“叠加式”教学改革模式，又相对独立自成体系. 可作为农科类各专业本科生的教材或参考书.

图书在版编目(CIP)数据

大学数学(二)/陈薇主编. －北京：科学出版社，2000.4

ISBN 7-03-008318-0

Ⅰ. 大…　Ⅱ. 陈…　Ⅲ. 高等数学－高等学校－教材　Ⅳ. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 03892 号

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

新蕾印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

2000 年 4 月第　一　版　　开本：787×960　1/16

2000 年 4 月第一次印刷　　印张：10 1/2

印数：1—5 000　　字数：183 000

定价：　16.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换〈环伟〉）

序

我国的高等教育正在进入一个迅速发展的时期,我们要在扩大办学规模,提高办学效益的同时,加快教育教学改革的步伐,培养高质量的人才.

近年来,我校坚持以研究促教改,通过采取立项研究的方式,调动了广大教师投身教学改革的积极性,将转变教师的教育思想观念与教学内容、教学方法改革紧密结合起来,取得了实效.这次推出的农科主要基础课系列教材,就是基础课教师长期钻研课程体系和教学内容的重要成果.他们从转变教育思想入手,站在面向21世纪科技、社会发展趋势的高度,对农科主要基础课的教学内容进行“精选”、“重组”和“拓宽”,将现代科学理论的观点和方法引入基础课,强调学生思维能力等综合素质的培养.

与我校过去编写的基础课教材相比,这套教材以“整体优化”和“内容更新”为出发点,强化了基础课在传授基础知识、培养基本能力和提高综合素质方面的作用,它的出版,将对提高农科主要基础课的教学质量做出贡献.

在科学出版社的大力支持下,我校组织编写了农科类大学生适用的《大学基础物理》、《大学数学(一)》、《大学数学(二)》、《应用概率统计》、《基础化学Ⅰ》、《基础化学Ⅱ》、《基础化学Ⅰ实验》、《生物化学》、《植物生物学》、《动物生物学》、《植物生理学》、《微生物生物学》、《动物生理学》、《普通遗传学》等14种教材.建设农科主要基础课系列教材的设想也得到了北京市教委的重视和支持,列入了北京市教育教学改革试点项目.

当前,以“统编教材”或“规划教材”为核心的教材建设机制面临转变,这套教材是我校加强自身教材建设的一次尝试,目的是以教材建设来推动学校基础课教学内容和课程体系的整体改革.

江树人

前　言

数学是各科自然科学的基础，从而也是国民经济的基础.高等农业院校必须重视数学教学改革.建国以来，我国高等农业院校已经历了两次数学教育内容改革.第一次是在50年代末，在农科类各专业中，普遍开设90学时的高等数学课，当时所用的教材内容与50年代莫斯科大学地理系所用的高等数学相近.第二次是在80年代初，由北京农业大学主持，制定了农科类各专业高等数学、线性代数、概率论与数理统计的共计180学时的教学大纲.大多数高等农业院校的农科类各专业都参照大纲开设了这三门基础数学课，开展了教学方法和教学手段的研究.这些内容基本上承袭了前苏联在20世纪50年代形成的体系，具有系统性和推理性太强，应用背景弱，与计算机的联系太少等缺点.

我们将进入21世纪，高等教育面临着世界范围的科学技术革命和社会主义市场经济体制建立所带来的巨大冲击与挑战.我们只有冲破传统的教育观念，建立新的培养模式，培养一大批具有开拓精神和创造能力的复合型人才，才能迎接各种冲击与挑战.在这跨越世纪的教育改革浪潮中，作为教学改革研究成果，我们编写了这套农业院校《大学数学系列教材》.本套教材以启迪数学思维，增强几何想象，丰富数学方法为主，减弱了数学解题技巧的训练，淡化和省略了某些理论的推导过程.整套教材无论从体系结构上，还是内容处理上，都与传统教材有不同程度的改变.

《大学数学(二)》作为这套农科类大学数学教学改革系列教材之一，是在“叠加式”教学改革模式的新思路下编写的.在教材体系上一改过去传统的编写结构，从向量分析出发，用向量及向量的微分与积分去描述空间几何形体，简化了平面或空间曲线与曲面积分的概念和计算，更便于多元函数在 n 维空间上的推广.这种“重组”和“拓宽”的处理方式，能促进数学理论与实际问题很好地衔接，使多元微分、积分的概念与应用在向量空间上得以充分体现.在无穷级数、傅里叶级数的编写过程中，坚持了淡化原理、注重实用的原则，尤其是将函数与其构成傅里叶级数的和函数之间在几何上加以比较的处理方法，可使读者回避复杂的理论推导，在几何图形上对二者关系一目了然.本教材内容建议讲授45～50学时.

本教材中第一章和第三章由陈薇编写；第二章由苏时光编写；第四、五章由沈晓南编写.张嘉林教授审阅了全部书稿，并提出了不少宝贵意见，对此我们深表感谢.由于水平所限，时间仓促，书中不妥和错漏之处恳请读者批评指正.

编　者

2000年元月

目　录

第一章　向量分析

在高等数学中,许多问题的提出和概念的引用都与物理学、力学和工程技术方面的问题有密切的关系.而在这些问题中,用向量形式来表示或定义某些概念往往更为方便、合理.为此,有必要概括地介绍一下向量函数及其微分和积分.若无特别申明,本章所讲的向量均为空间直角坐标系下的几何向量.

第一节　向量的数量积、向量积和混合积

一、两向量的数量积与投影

如果质点受常力 $\boldsymbol{F}$ 的作用,产生位移 $\boldsymbol{S}$.由物理学知,力 $\boldsymbol{F}$ 所作的功为

$$W = |\boldsymbol{F}||\boldsymbol{S}|\cos(\boldsymbol{F}\widehat{,}\boldsymbol{S})$$

即功的大小等于力的大小与位移的大小及它们之间夹角的余弦之积.

显然功是一个数量,力和位移都是向量.据此,将力 $\boldsymbol{F}$ 与位移 $\boldsymbol{S}$ 两个向量所决定的数量,即 $|\boldsymbol{F}||\boldsymbol{S}|\cos(\boldsymbol{F}\widehat{,}\boldsymbol{S})$ 叫做向量 $\boldsymbol{F}$ 与 $\boldsymbol{S}$ 的数量积.抽去物理意义,一般有如下定义.

定义　设两个向量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,称实数 c

$$c = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\boldsymbol{a}\widehat{,}\boldsymbol{b}) \tag{1.1.1}$$

为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的数量积(或称内积,点乘),记 $c = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$(或$[\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}]$).

特别地,当 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$ 时,有 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2$,简记 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}^2$.

这里注意到,(1.1.1)式中

$$|\boldsymbol{a}|\cos(\boldsymbol{a}\widehat{,}\boldsymbol{b})$$

又给出了另一重要概念,其几何意义如图 1-1 所示.

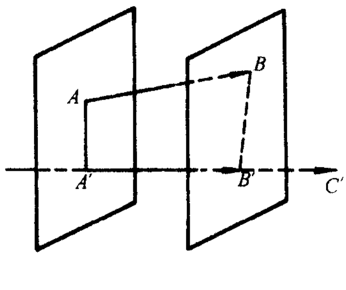

图 1-1

设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{A'C'}=\boldsymbol{b}$,过点 A 和 B 分别作向量 $\boldsymbol{b}$ 的垂直平面,则此二平面与向量 $\boldsymbol{b}$ 的

交点 A' 和 B'，叫做点 A 和点 B 在向量 $\boldsymbol{b}$ 上的投影. 而 $\overrightarrow{A'B'}$ 叫做向量 $\boldsymbol{a}$ 在向量 $\boldsymbol{b}$ 上的投影向量，$|\overrightarrow{A'B'}|$ 叫做向量 $\boldsymbol{a}$ 在向量 $\boldsymbol{b}$ 上的投影，记作 $\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}$. 即

$$\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}|\cos(\boldsymbol{a} \hat{,} \boldsymbol{b})$$

同理有

$$\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{b}|\cos(\boldsymbol{a} \hat{,} \boldsymbol{b}) \tag{1.1.2}$$

一般地，我们定义向量 $\boldsymbol{a}$ 在数轴 u 上的投影为

$$\mathrm{Prj}_{u}\boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}|\cos\varphi$$

φ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 u 轴的夹角.

综上，数量积公式(1.1.1)又可写成

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{b}|\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}|\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b} \tag{1.1.3}$$

即两个向量的数量积等于其中一个向量的模与另一个向量在这向量的方向上投影的乘积.

此时，质点受常力 $\boldsymbol{F}$ 作用产生位移 $\boldsymbol{S}$ 后，力 $\boldsymbol{F}$ 所作的功又可利用投影公式表示为

$$W = |\boldsymbol{S}|\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{S}}\boldsymbol{F}$$

由向量的加法运算及投影的概念，易知 $\mathrm{Prj}_{c}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \mathrm{Prj}_{c}\boldsymbol{a} + \mathrm{Prj}_{c}\boldsymbol{b}$. 此结论可以推广至有限个向量的情况.

数量积具有如下性质.

性质 1　$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$

证　由定义

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\boldsymbol{a} \hat{,} \boldsymbol{b})$$

$$\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a} = |\boldsymbol{b}||\boldsymbol{a}|\cos(\boldsymbol{b} \hat{,} \boldsymbol{a})$$

而

$$\cos(\boldsymbol{a} \hat{,} \boldsymbol{b}) = \cos(\boldsymbol{b} \hat{,} \boldsymbol{a}) \text{ 和 } |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{b}||\boldsymbol{a}|$$

所以

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}$$

性质 2　$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$ 的充要条件是 $\boldsymbol{a}=0$ 或 $\boldsymbol{b}=0$ 或 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 正交(垂直)，记作，$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$.

证　由(1.1.1)式，若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，则

$$|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=0$$

即 $\boldsymbol{a}=0$ 或 $\boldsymbol{b}=0$ 或 $\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=0$，$(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\frac{\pi}{2}$，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 正交. 反之，易证.

特别地，在空间直角坐标系中，分别取 x 轴，y 轴和 z 轴上的单位向量 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$ 和 $\boldsymbol{k}$，则三维空间中的任一向量 $\overrightarrow{OM}$ 可由 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 来线性表示. 设 $\overrightarrow{OM}$ 的起点为原点，终点的坐标为 (x, y, z)，则 $\overrightarrow{OM}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$. 而 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 的数量积为

$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}=1,\ \boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}=0$$

性质 3　$\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b})=(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}$

证　已知

$$\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=\lambda|\boldsymbol{a}|\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}=\lambda|\boldsymbol{b}|\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}$$

而

$$\lambda\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}=\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}(\lambda\boldsymbol{b}),\qquad \lambda\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}=\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}(\lambda\boldsymbol{a})$$

所以

$$\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=|\boldsymbol{a}|\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}(\lambda\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b})$$

$$\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=|\boldsymbol{b}|\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}(\lambda\boldsymbol{a})=\boldsymbol{b}\cdot(\lambda\boldsymbol{a})=(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}$$

性质 4　$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$

证　
$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}&=|\boldsymbol{c}|\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{c}}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\\&=|\boldsymbol{c}|(\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{c}}\boldsymbol{a}+\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{c}}\boldsymbol{b})\\&=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}\end{aligned}$$

性质 5　如果 $\boldsymbol{a}=x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k}$，则

$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$

证

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}&=(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k})\cdot(x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k})\\&=x_1x_2\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}+x_1y_2\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}+x_1z_2\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k}+y_1x_2\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i}+y_1y_2\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}+\\&\quad y_1z_2\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}+z_1x_2\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}+z_1y_2\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{j}+z_1z_2\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}\\&=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2\end{aligned}$$

进一步，有

$$\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}}$$

或

$$\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}} \tag{1.1.4}$$

例 1　已知三点 $A(1,1,1)$, $B(2,2,1)$, $C(2,1,2)$, 求 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 之间的夹角.

解　$\overrightarrow{AB} = (2-1,\ 2-1,\ 1-1) = (1,\ 1,\ 0)$

$\overrightarrow{AC} = (2-1,\ 1-1,\ 2-1) = (1,\ 0,\ 1)$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 1$, $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{2}$, $|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{2}$

所以　$\cos(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) = \dfrac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|} = \dfrac{1}{2}$, 即 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 的夹角 $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})$ 为 $\dfrac{\pi}{3}$.

例 2　求证半圆的内接角(图 1-2)为直角.

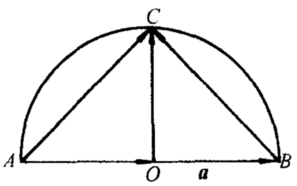

图 1-2

证　如图 1-2 所设, O 为圆心.

$$\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OB} = \boldsymbol{a},\ \overrightarrow{OC} = \boldsymbol{c}$$

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{c}$$

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = \boldsymbol{c} - \boldsymbol{a}$$

所以

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{c}) \cdot (\boldsymbol{c} - \boldsymbol{a}) = \boldsymbol{c}^2 - \boldsymbol{a}^2$$

而 $|\boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{c}|$, $\boldsymbol{c}^2 - \boldsymbol{a}^2 = 0$, 即 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$, $\overrightarrow{AC}$ 与 $\overrightarrow{BC}$ 正交. 从而半圆的内接角为直角得证.

二、两向量的向量积

两向量的向量积是从力学问题中抽象出来的, 力矩向量 $\boldsymbol{M}$ 完全由力 $\boldsymbol{F}$ 与向径 $\overrightarrow{OA}$ 所决定(如图 1-3).

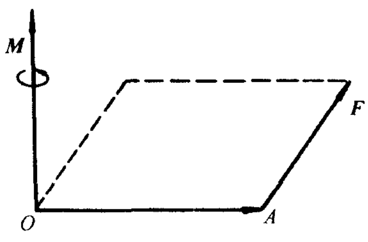

图 1-3

$\boldsymbol{M}$ 的大小为 $\overrightarrow{OA}$ 与 $\boldsymbol{F}$ 所在边的平行四边

形面积,即 $|\overrightarrow{OA}||\boldsymbol{F}|\sin(\widehat{\overrightarrow{OA},\boldsymbol{F}})$. $\boldsymbol{M}$ 的方向符合右手螺旋法则.

像力矩这样,由两个向量确定另一个向量的情况,在其它物理现象中也常遇到.一般地,有如下定义.

定义　两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的向量积(外积、叉乘)是一个向量,记作 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$.它的大小($\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 的模)为以 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形面积,即 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$;它的方向符合右手螺旋法则,即垂直于 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 所决定的平面(图1-4).

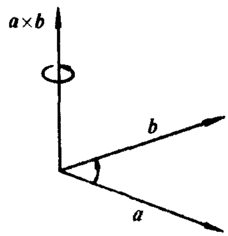

图 1-4

事实上,由定义可知,若向量 $\boldsymbol{a}=0$ 或 $\boldsymbol{b}=0$ 或 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$ ($\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行),都有

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=0$$

反之亦然.

特别地,有 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}=0$.

向量积具有如下运算性质

性质 1　$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})$

证　若 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$,则 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=0$, $-(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})=0$,结论成立.若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不平行,则由定义知,$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$ 具有相同的大小,但方向相反,故有 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})$.

特别地,对单位向量 $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ 的向量积,有 $\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}=0$, $\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k}=-\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j}=-\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i}=-\boldsymbol{k}$

性质 2　$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$　　(略证)

性质 3　$(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times(\lambda\boldsymbol{b})=\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$　　(λ 为数)　(略证)

性质 4　设 $\boldsymbol{a}=x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b}=x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k}$,则

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}$$

证

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}&=(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k})\times(x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k})\\&=x_1x_2\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}+x_1y_2\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}+x_1z_2\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k}+y_1x_2\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i}\\&\quad+y_1y_2\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}+y_1z_2\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}+z_1x_2\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}+z_1y_2\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j}+z_1z_2\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}\\&=(y_1z_2-z_1y_2)\boldsymbol{i}+(z_1x_2-x_1z_2)\boldsymbol{j}+(x_1y_2-y_1x_2)\boldsymbol{k}\\&=\begin{vmatrix}y_1 & z_1\\ y_2 & z_2\end{vmatrix}\boldsymbol{i}-\begin{vmatrix}x_1 & z_1\\ x_2 & z_2\end{vmatrix}\boldsymbol{j}+\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

$$= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

例 3 设 $\boldsymbol{a}=(1,\ 2,\ -3)$，$\boldsymbol{b}=(5,\ 1,\ 8)$，求 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$.

解 $$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 2 & -3 \\ 5 & 1 & 8 \end{vmatrix}=(16+3)\boldsymbol{i}+(-15-8)\boldsymbol{j}+(1-10)\boldsymbol{k}$$

$$=19\boldsymbol{i}-23\boldsymbol{j}-9\boldsymbol{k}$$

例 4 求由三点 $A(1,2,3)$，$B(2,-1,5)$，$C(3,2,-5)$所决定的三角形的面积.

解 已知三角形 ABC 的面积等于以$\overrightarrow{AB}$和$\overrightarrow{AC}$为邻边的平行四边形面积的一半.

$$\overrightarrow{AB}=(2-1,\ -1-2,\ 5-3)=(1,\ -3,2)$$

$$\overrightarrow{AC}=(3-1,\ 2-2,\ -5-3)=(2,\ 0,\ -8)$$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & 0 & -8 \end{vmatrix}=24\boldsymbol{i}+12\boldsymbol{j}+6\boldsymbol{k}$$

所以

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\mid\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\mid=\frac{1}{2}\sqrt{24^2+12^2+6^2}=3\sqrt{21}$$

三、三向量的混合积

对于三个向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$，下面的运算

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c},\quad \boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}),\quad (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}$$

都是有意义的. 可以看出$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$ 是一个确定的数量，而 $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$和$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}$ 运算的结果为向量.

这里，我们仅介绍第一种情况.

定义 称实数$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$ 为向量$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 的混合积，记作$[\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}]$.

从几何上看，若 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 均为非零向量，则混合积的绝对值$|(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}|$是以

$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 为三条棱的平行六面体的体积 V. 事实上,如图 1-5 所示,这平行六面体的底面积为 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$,高 $h=||c|\cos\theta|$,其中 θ 为向量 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$ 与 $\boldsymbol{c}$ 的夹角.

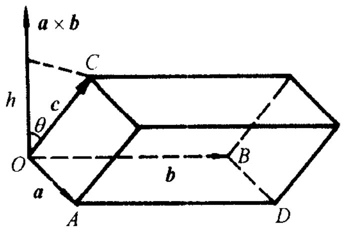

图 1-5

$$V=|(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}|=||\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}|\cos\theta|$$

$$=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}||\cos\theta|$$

混合积具有如下性质.

性质 1　$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$

$=\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})=\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$

或　$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{b}$

(略证)

性质 2　若 $\boldsymbol{a}=(x_1,\ y_1,\ z_1)$, $\boldsymbol{b}=(x_2,\ y_2,\ z_2)$, $\boldsymbol{c}=(x_3,\ y_3,\ z_3)$,则

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}$$

(略证)

显然,当 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 共面时,有 $[\boldsymbol{abc}]=0$. 而在性质 1 中的所有混合积的绝对值,都代表图 1-5 中平行六面体的体积.

第二节　向量函数的极限与连续

一、向量函数的概念

定义 1　若对于数性变量 t 的每一个值,都有一个完全确定的向量 $\boldsymbol{A}$ 与之对应.则称向量 $\boldsymbol{A}$ 是数性变量 t 的向量函数,记作 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}(t)$.

这里,t 叫自变量,t 的变化范围叫向量函数的定义域.

我们知道,在空间直角坐标系中,向量函数 $\boldsymbol{A}(t)$ 可以表示为

$$\boldsymbol{A}(t)=A_x(t)\boldsymbol{i}+A_y(t)\boldsymbol{j}+A_z(t)\boldsymbol{k}$$

其中 $A_x(t)$、$A_y(t)$、$A_z(t)$ 分别是向量函数 $\boldsymbol{A}(t)$ 在 x 轴, y 轴和 z 轴上的投影,它们都是 t 的数量函数. 也就是说,给了一个向量函数,相当于给了三个数量函数. 这一点很重要,它使我们有可能将向量函数的研究转化为对数量函数的研究.

在几何上,将对应于自变量 t 的不同值的向量移到同一始点(如坐标原点),其端点画出的一条曲线 l,称为向端曲线. 共同的始点叫向端曲线的极点(图

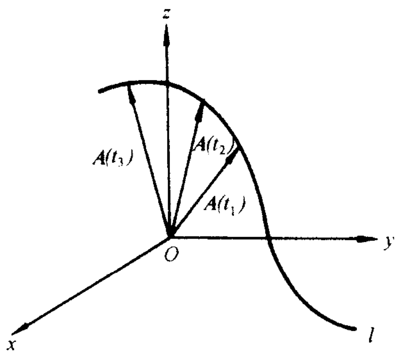

图 1-6

1-6). 而方向不变的向量函数,其向端曲线是半射线(图 1-7).

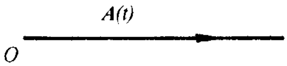

图 1-7

模不变的向量函数其向端曲线是以极点为球心模为半径的球面上的一条曲线(图 1-8).

二、向量函数的极限与连续

定义 2 设向量函数 $\mathbf{A}=\mathbf{A}(t)$ 在点 t_0 的某个邻域内有定义(在 t_0 可以没有定义),$\mathbf{A}_0$ 为一常向量. 若对于任意给定的小正数 ε,总存在正数 δ,使得适合不等式 $0<|t-t_0|<\delta$ 的一切 t,都有

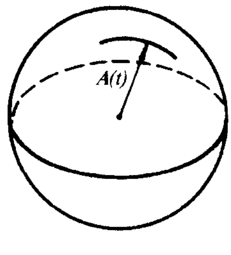

图 1-8

$$|\mathbf{A}(t)-\mathbf{A}_0|<\varepsilon$$

成立,则称常向量 $\mathbf{A}_0$ 为向量函数 $\mathbf{A}(t)$ 当 $t\to t_0$ 时的极限,记为

$$\lim_{t\to t_0}\mathbf{A}(t)=\mathbf{A}_0 \tag{1.2.1}$$

若令 $\mathbf{A}(t)=A_x(t)\boldsymbol{i}+A_y(t)\boldsymbol{j}+A_z(t)\boldsymbol{k}$, $\mathbf{A}_0=m\boldsymbol{i}+n\boldsymbol{j}+p\boldsymbol{k}$, m, n, p 为常数,那么 $|\mathbf{A}(t)-\mathbf{A}_0|<\varepsilon$ 的充分必要条件是

$$\sqrt{[A_x(t)-m]^2+[A_y(t)-n]^2+[A_z(t)-p]^2}<\varepsilon$$

即 $A_x(t)-m$, $A_y(t)-n$, $A_z(t)-p$ 均为 $t\to t_0$ 时的无穷小量.

这就是说,当 $t\to t_0$ 时,$\mathbf{A}(t)$ 有极限 $\mathbf{A}_0$ 的充分必要条件是,$A_x(t)$、$A_y(t)$、$A_z(t)$ 分别有极限 m、n、p. 于是,求向量函数的极限可以转化为求数量函数的极限.

定义 3 设向量函数 $\mathbf{A}=\mathbf{A}(t)$ 在点 t_0 及其邻域内是有定义的,当 $t\to t_0$ 时,$\mathbf{A}(t)$ 的极限存在且等于 $t=t_0$ 处的向量函数值 $\mathbf{A}(t_0)$,即 $\lim\limits_{t\to t_0}\mathbf{A}(t)=\mathbf{A}(t_0)$,则称向量函数 $\mathbf{A}(t)$ 在点 t_0 处是连续的.

若向量函数 $\mathbf{A}(t)$ 在某个区间内的每一点都连续,则称它在该区间内连续.

向量函数 $\mathbf{A}(t)(t\in I)$ 是连续的,也就是 $\mathbf{A}(t)$ 的向端曲线在 $t\in I$ 上是一条连续曲线.

令

$$\boldsymbol{A}(t)=A_x(t)\boldsymbol{i}+A_y(t)\boldsymbol{j}+A_z(t)\boldsymbol{k}$$

那么,$\boldsymbol{A}(t)$连续的充要条件是,$A_x(t)$、$A_y(t)$、$A_z(t)$都是 t 的连续函数.

据此,向量函数的主要极限运算法则有

1) $\lim\limits_{t\to t_0}u(t)\boldsymbol{A}(t)=\lim\limits_{t\to t_0}u(t)\cdot\lim\limits_{t\to t_0}\boldsymbol{A}(t)$

2) $\lim\limits_{t\to t_0}[\boldsymbol{A}(t)\pm\boldsymbol{B}(t)]=\lim\limits_{t\to t_0}\boldsymbol{A}(t)\pm\lim\limits_{t\to t_0}\boldsymbol{B}(t)$

3) $\lim\limits_{t\to t_0}[\boldsymbol{A}(t)\cdot\boldsymbol{B}(t)]=\lim\limits_{t\to t_0}\boldsymbol{A}(t)\cdot\lim\limits_{t\to t_0}\boldsymbol{B}(t)$

4) $\lim\limits_{t\to t_0}[\boldsymbol{A}(t)\times\boldsymbol{B}(t)]=\lim\limits_{t\to t_0}\boldsymbol{A}(t)\times\lim\limits_{t\to t_0}\boldsymbol{B}(t)$

其中 $u(t)$为数量函数,$\boldsymbol{A}(t)$, $\boldsymbol{B}(t)$为向量函数,且 $u(t)$,$\boldsymbol{A}(t)$, $\boldsymbol{B}(t)$在 $t\to t_0$ 时均存在极限.

若设　$\boldsymbol{A}(t)=A_x(t)\boldsymbol{i}+A_y(t)\boldsymbol{j}+A_z(t)\boldsymbol{k}$,则有

$$\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{A}(t)=\lim_{t\to t_0}A_x(t)\boldsymbol{i}+\lim_{t\to t_0}A_y(t)\boldsymbol{j}+\lim_{t\to t_0}A_z(t)\boldsymbol{k}\qquad(1.2.2)$$

第三节　向量函数的微分与积分

一、向量函数的导数

设有向量函数 $\boldsymbol{A}(t)=\overrightarrow{OM}$,当数性变量从 t 变到 $t+\Delta t(\Delta t\neq 0)$时,对应的向量函数为 $\boldsymbol{A}(t+\Delta t)=\overrightarrow{ON}$(图 1-9),则 $\boldsymbol{A}(t+\Delta t)-\boldsymbol{A}(t)=\overrightarrow{MN}$称为向量函数 $\boldsymbol{A}(t)$的**增量**,记作 $\Delta\boldsymbol{A}$. 可以看出,当 $\Delta t>0$ 时,$\dfrac{\Delta\boldsymbol{A}}{\Delta t}$是在割线$\overrightarrow{MN}$上指向与 $\Delta\boldsymbol{A}$ 一致(指向 t 增大的一方)的一个向量函数;而当 $\Delta t<0$ 时,$\dfrac{\Delta\boldsymbol{A}}{\Delta t}$是在割线

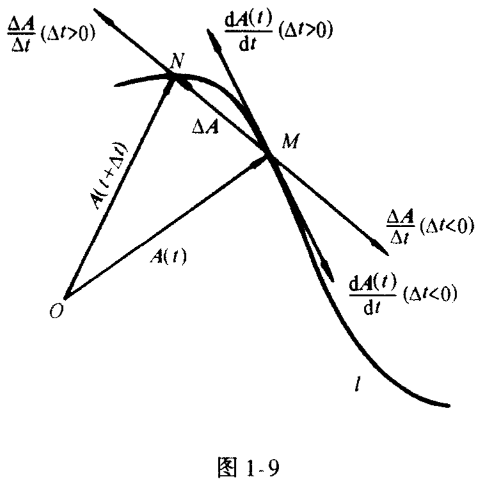

图 1-9

$\overrightarrow{MN}$上指向与 $\Delta\boldsymbol{A}$ 相反(仍指向 t 增大的一方)的一个向量函数. 总之,不管 $\Delta t>0$ 还是 $\Delta t<0$, $\dfrac{\Delta\boldsymbol{A}}{\Delta t}$始终指向 t 增大的一方.

综上所述,我们给出向量函数导数的定义.

定义　设向量函数 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}(t)$在 t_0 及其邻域内有定义,给 t_0 以增量 Δt,相应地,$\boldsymbol{A}(t)$有增量 $\Delta\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}(t_0+\Delta t)-\boldsymbol{A}(t_0)$,如果当 $\Delta t\to 0$ 时,极限

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{A}(t_0+\Delta t)-\boldsymbol{A}(t_0)}{\Delta t}$$

存在,则称此极限值为向量函数 $\boldsymbol{A}(t)$在 $t=t_0$ 处的导数,记为

$$\left.\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_0}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{A}(t_0+\Delta t)-\boldsymbol{A}(t_0)}{\Delta t} \tag{1.3.1}$$

或 $\boldsymbol{A}'(t_0)$.

同理,在任意点 t 向量函数$\boldsymbol{A}(t)$的导数记为$\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}(t)}{\mathrm{d}t}$或$\boldsymbol{A}'(t)$. 从图 1-9 可看出,$\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}(t)}{\mathrm{d}t}$位于切线(割线 MN 的极限位置)上,且永远指向 t 增大的一方. 显然,$\boldsymbol{A}(t)$的导数$\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}(t)}{\mathrm{d}t}$一般仍为 t 的向量函数.

若设 $\boldsymbol{A}(t)=A_x(t)\boldsymbol{i}+A_y(t)\boldsymbol{j}+A_z(t)\boldsymbol{k}$,则

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}(t)}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}_x(t)}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}_y(t)}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}_z(t)}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}$$

或

$$\boldsymbol{A}'(t)=A'_x(t)\boldsymbol{i}+A'_y(t)\boldsymbol{j}+A'_z(t)\boldsymbol{k} \tag{1.3.2}$$

而

$$|\boldsymbol{A}'(t)|=\sqrt{[A'_x(t)]^2+[A'_y(t)]^2+[A'_z(t)]^2} \tag{1.3.3}$$

如果向量函数$\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}(t)}{\mathrm{d}t}$对 t 的导数仍存在,称其为对 t 的二阶导数. 一般地,$\boldsymbol{A}(t)$的 $n-1$ 阶导数的导数,称为 $\boldsymbol{A}(t)$的 n 阶导数,记为

$$\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{A}(t)}{\mathrm{d}t^2},\ \frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{A}(t)}{\mathrm{d}t^3},\ \cdots,\frac{\mathrm{d}^n\boldsymbol{A}(t)}{\mathrm{d}t^n}$$

或

$$\boldsymbol{A}''(t),\ \boldsymbol{A}'''(t),\ \cdots,\boldsymbol{A}^{(n)}(t) \tag{1.3.4}$$