

研 · 究 · 生 · 教 · 材

国防科技大学研究生教材专项经费资助出版

季家镛 编著

# 高等光学教程

## ——光学的基本电磁理论



科学出版社

[www.sciencep.com](http://www.sciencep.com)

## 内 容 简 介

本书以光的电磁理论为基础,系统地介绍了光学的基本概念和基本知识,其内容涉及干涉和衍射的基本原理、光学薄膜、光的相干性理论、傅里叶光学和晶体光学。

本书理论分析深刻,内容涉及面广,可供需要深入学习经典和近代光学知识的研究生作为教材使用,也可供高年级本科生选用,对需要系统学习光学理论的工程技术人员也具有参考价值。

### 图书在版编目(CIP)数据

高等光学教程:光学的基本电磁理论/季家镛 编著. —北京:科学出版社, 2007

ISBN 978-7-03-019846-4

I. 高… II. 季… III. 光学-研究生-教材 IV. O43

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 135114 号

责任编辑:马长芳 杨 然/责任校对:张 琪  
责任印制:张克忠/封面设计:耕者设计工作室

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码: 100717

<http://www.sciencep.com>

双青印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

\*

2007 年 10 月第 一 版 开本: B5(720×1000)

2007 年 10 月第一次印刷 印张: 34

印数: 1—3 000 字数: 649 000

定价: 54.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换〈双青〉)

## 前 言

1960年第一台激光器的问世给光学领域带来了革命性的变化,人们经过40多年的努力,使光学这一古老学科得到迅速发展。它现在已经成为具有多个学科、多个研究方向的领域,科研成果的推广应用形成了国民经济中的一个重要产业,对现代社会的进步有重大的影响。从事光学研究和工程应用的人与日俱增,希望深入学习和掌握光学知识的人也越来越多。

马科斯·玻恩和埃米尔·沃耳夫所著的《光学原理》是举世公认的关于经典光学原理的权威著作,该书使一代又一代的人受益。该书第七版的中译本已在国内出版发行,上册中有相当一部分内容已编入本科生的光学教材。激光器诞生以后,在经典光学的基础上发展而形成了近代光学理论,这两个方面的知识对于光学工作者来说都是必不可少的。社会对光学人才的需求在不断增长,更多的人正在进入到这一领域,为了系统、深入地学习光学知识,希望出现多种版本的既包括经典光学原理,又涉及近代光学理论的基础教材,供不同背景的读者选用。

《高等光学教程》一书是根据编者在国防科技大学讲授高等光学课程的讲稿整理、编辑而成。在编写过程中参考了国内外近年来出版的有关著作,主要使用对象是光学工程专业方向刚入学的硕士生。每年入学的新生中有相当一部分本科生不是光学专业的,他们中的许多人是因为交叉学科的需要选修该门课程,因此在本书的第1章光的基本电磁理论中保留了基本知识部分作为过渡,只要学过工科大学物理的读者即可由此入门。从第2章开始以本科生光学教材为起点进一步介绍了干涉理论(第2章)、标量衍射理论(第4章),在此基础上编入了近代光学的基本原理,其内容涉及光学薄膜(第3章)、部分相干光理论(第5章)、傅里叶光学(第6章)、晶体光学(第7、8章)。书后附有各章习题供读者复习巩固之用。习题最好是独立完成,对于确有困难的读者,可访问国防科技大学研究生院的教学网站,上面有编者提供习题的答案或提示。

作者衷心感谢南开大学现代光学研究所博士生导师翟宏琛教授,翟教授在百忙之中审阅了本书的初稿,并提出了宝贵的修改意见。

《高等光学教程》为国防科技大学研究生院“十一五”期间重点建设的精品课程之一,本书的编写和出版得到了国防科技大学研究生院和光电科学与工程学院的大力支持。在《高等光学教程》出版之时,作者衷心感谢中国工程院高伯龙院士多年来对编者科研和教学工作的鼓励和支持。作者同时也感谢多年来选修这门课程的学生,在教学过程中是他们经常提出一些看似简单实际上是很深刻的问题,促使

编者进行更深层次的思考,同时也丰富了本书的内容。作者感谢国防科技大学博士研究生宁禹和王艺敏同学,由于她们的努力,顺利地完成了与本书相配套的网上教学课件的制作。

光学是一个仍在不断发展中的学科,知识需要不断更新才能跟得上时代的步伐。由于编者水平有限,错误和不足之处在所难免,敬请广大读者批评指正。

编者

2007年5月

# 目 录

## 前言

<b>第 1 章 光的基本电磁理论</b> .....	1
1.1 电磁场基本方程 .....	1
1.1.1 麦克斯韦方程组和物质方程 .....	1
1.1.2 电磁场的能量定律和坡印亭矢量 .....	3
1.1.3 波动方程和光速 .....	5
1.2 标量波 .....	8
1.2.1 一般平面波 .....	9
1.2.2 球面波 .....	10
1.2.3 简谐波、相速度 .....	11
1.2.4 基模高斯光波 .....	14
1.2.5 波包和群速度 .....	19
1.3 矢量波及其偏振态的表示 .....	24
1.3.1 一般的平面电磁波 .....	24
1.3.2 简谐平面波及其偏振态的电矢量分量表示法 .....	28
1.3.3 光波偏振的琼斯计算方法 .....	32
1.3.4 光波偏振态表示的斯托克斯参量方法和庞加莱球方法 .....	43
1.4 准单色光的偏振特性 .....	45
1.4.1 准单色光偏振态表示的琼斯矩阵方法 .....	45
1.4.2 准单色平面波的相干矩阵 .....	46
1.4.3 准单色光波偏振度的表示 .....	49
1.4.4 准单色光的斯托克斯参量及其对部分偏振光的描述 .....	51
1.4.5 密勒矩阵 .....	54
1.5 光波场的空间傅里叶分析 .....	55
1.5.1 单色平面波的空间周期和空间频率 .....	55
1.5.2 单色光波的空间频谱和角谱 .....	57
1.5.3 角谱的传播 .....	58
1.5.4 衍射孔径对角谱的效应 .....	60
1.6 两种电介质的界面上光波的反射和折射 .....	61
1.6.1 反射定律和折射定律 .....	61

1.6.2	菲涅耳公式	62
1.6.3	全反射和倏逝波	74
1.6.4	全反射条件下反射光的相移	75
1.6.5	全反射条件下透射光波场的坡印亭矢量	77
1.6.6	古斯-汉欣(Goos-Hanchen)位移	79
1.7	光波在金属中的传播	83
1.7.1	金属中的电磁场方程	84
1.7.2	单色平面波在电介质-金属界面上的折射	86
1.7.3	线偏振光在电介质-金属界面上反射以后偏振态的变化	89
1.7.4	金属的光学常数和金属表面反射光的偏振态	91
1.7.5	金属表面的强度反射率	94
<b>第2章</b>	<b>干涉理论基础和干涉仪</b>	<b>97</b>
2.1	时间相干性	97
2.1.1	等幅光振动的频谱分析	97
2.1.2	时间相干性的描述	99
2.2	单色光波的干涉	101
2.2.1	一般单色光波的干涉	101
2.2.2	单色平面波的干涉	102
2.2.3	单色球面波的干涉	107
2.3	准单色光的干涉	111
2.3.1	光谱分布为矩形函数的准单色光的干涉	111
2.3.2	具有一般线型光谱分布的准单色光的干涉	112
2.4	多色光的干涉	115
2.5	空间相干性	117
2.5.1	使用强度均匀分布扩展光源的杨氏双缝实验	117
2.5.2	使用强度非均匀分布扩展光源的杨氏双缝实验	121
2.6	干涉条纹的定域	123
2.6.1	非定域条纹	123
2.6.2	光源线度扩展对干涉条纹可见度的影响	124
2.6.3	扩展光源在平面劈上方产生的定域条纹的位置	128
2.6.4	光源允许角半径的考虑	130
<b>第3章</b>	<b>光学薄膜的基本知识</b>	<b>132</b>
3.1	单层介质膜	132
3.1.1	求特征矩阵的数学处理方法	132
3.1.2	单层均匀介质膜的特性研究	135

3.2 周期性多层膜 .....	142
3.2.1 周期性多层膜的特征矩阵 .....	142
3.2.2 多层介质高反射膜 .....	144
3.2.3 干涉滤光片 .....	148
3.2.4 增透膜 .....	152
3.3 金属膜的理论 .....	155
3.3.1 透明衬底上的吸收膜 .....	155
3.3.2 吸收衬底上的透明膜 .....	160
<b>第4章 标量衍射理论基础</b> .....	<b>162</b>
4.1 惠更斯-菲涅耳原理和衍射现象的标量处理 .....	162
4.1.1 惠更斯-菲涅耳原理 .....	162
4.1.2 衍射现象的标量处理 .....	164
4.2 基尔霍夫衍射理论 .....	164
4.2.1 格林定理 .....	164
4.2.2 基尔霍夫积分定理 .....	165
4.2.3 平面屏幕衍射的基尔霍夫理论 .....	167
4.3 瑞利-索末菲衍射理论 .....	171
4.3.1 索末菲选取格林函数的方法 .....	171
4.3.2 瑞利-索末菲衍射公式 .....	173
4.4 衍射理论的讨论 .....	174
4.4.1 基尔霍夫衍射理论和瑞利-索末菲衍射理论的比较 .....	174
4.4.2 衍射理论推广到非单色波的情形 .....	176
4.4.3 描述惠更斯-菲涅耳原理公式中物理量意义的合理解释 .....	177
4.5 线性系统和传递函数简介 .....	178
4.5.1 系统的算符表示 .....	178
4.5.2 线性系统 .....	179
4.5.3 不变线性系统 .....	180
4.6 完全波集及其对衍射现象的描述 .....	184
4.6.1 平面波衍射理论 .....	185
4.6.2 球面波衍射理论 .....	186
4.6.3 柱面波衍射理论(YMR理论) .....	187
4.7 标量衍射理论公式的近似 .....	188
4.7.1 直角坐标系中惠更斯-菲涅耳原理的数学表达式 .....	188
4.7.2 菲涅耳近似 .....	189
4.7.3 夫琅禾费近似 .....	193

4.8	夫琅禾费衍射	194
4.8.1	矩形孔径的夫琅禾费衍射	194
4.8.2	圆形孔径的夫琅禾费衍射	197
4.8.3	光栅的夫琅禾费衍射	198
4.9	菲涅耳衍射	206
4.9.1	菲涅耳积分	207
4.9.2	稳相法	211
4.9.3	矩孔的菲涅耳衍射	212
4.9.4	圆孔和圆屏的菲涅耳衍射、巴比涅原理	220
4.9.5	塔尔博特效应	224
4.9.6	衍射屏被会聚球面波照明时的菲涅耳衍射	227
4.10	焦点附近的三维光场分布	228
4.10.1	用洛默尔函数计算德拜积分	228
4.10.2	焦点及其附近的光强分布	232
4.10.3	积分强度	235
4.10.4	相位特性	237
4.11	边界衍射波	239
<b>第5章</b>	<b>部分相干光理论</b>	<b>244</b>
5.1	光场的复数表示	244
5.1.1	单色光的复数表示	244
5.1.2	非单色光的解析信号表示	245
5.1.3	准单色光的解析信号表示	248
5.2	光束的互相干函数	249
5.2.1	互相干函数	249
5.2.2	复相干度及用复相干度来表示的干涉光强公式	252
5.3	干涉条纹可见度和光波场相干性的一般描述	253
5.3.1	多色扩展光源条件下杨氏干涉实验的进一步讨论	253
5.3.2	使用多色光源的迈克耳孙干涉仪	256
5.3.3	准单色条件下的杨氏干涉实验	258
5.3.4	小结	260
5.4	光场的功率谱和互谱	261
5.4.1	用实函数表示的光场的谱密度函数和 Wiener-Khinchin 定理	261
5.4.2	用解析函数 $u(t)$ 表示的光场谱密度函数和 Wiener-Khinchin 定理	265
5.4.3	互谱密度函数及其与互相干函数的关系	266
5.5	干涉图与光源功率谱密度的关系——应用举例	267



5.5.1	由光源的功率谱密度确定干涉图的形式	268
5.5.2	傅里叶变换光谱学	270
5.6	交叉光谱纯	272
5.6.1	叠加光场的功率谱	272
5.6.2	交叉谱纯的条件	273
5.6.3	研究交叉光谱纯的例子:激光被运动漫射体散射	277
5.7	互相干性的传播	278
5.7.1	互相干性和互强度的传播定律	278
5.7.2	互相干性传播的波动方程	280
5.7.3	互谱密度 $G_{12}(\nu)$ 的传播	281
5.8	范西泰特-策尼克(Van Cittert-Zernike)定理	282
5.8.1	范西泰特-策尼克定理	282
5.8.2	霍普金斯公式	285
5.8.3	相干面积的定义	286
5.8.4	准单色非相干圆形光源光场的相干性	286
5.8.5	汤姆孙-沃尔夫衍射计	289
5.9	部分相干光照明孔径的衍射——Schell 定理	293
5.9.1	Schell 定理	293
5.9.2	由 Schell 定理所得结果的讨论	295
<b>第 6 章</b>	<b>光学成像系统特性分析的傅里叶光学方法</b>	<b>297</b>
6.1	相干光学系统中薄透镜的变换和成像性质	297
6.1.1	薄透镜对人射光波的相位变换作用	297
6.1.2	单个薄透镜对光波变换作用的一般分析	299
6.1.3	透镜的傅里叶变换性质	301
6.1.4	单个薄透镜的成像性质	304
6.2	光学系统成像的一般分析	307
6.2.1	光学成像系统的黑箱模型	307
6.2.2	阿贝成像理论	308
6.2.3	瑞利关于成像系统衍射效应的观点	311
6.2.4	相干和非相干情形中的叠加积分	313
6.3	衍射受限的相干成像系统的频率响应	314
6.3.1	振幅传递函数(amplitude transfer function)	314
6.3.2	衍射受限系统振幅传递函数的计算	316
6.4	衍射受限非相干成像系统的频率响应	318
6.4.1	光学传递函数的定义和它与振幅传递函数的关系	318

6.4.2	光学传递函数的一般性质和意义	320
6.4.3	无像差光学系统光学传递函数的计算方法	322
6.4.4	衍射受限系统光学传递函数的计算举例	323
6.5	有像差存在时的光学系统频谱分析	325
6.5.1	有像差存在的光学系统中波面畸变的数学模拟——广义光瞳函数	325
6.5.2	有像差存在的相干光学系统中的振幅传递函数	326
6.5.3	有像差存在时非相干光学系统中的 OTF	326
6.5.4	聚焦误差对频率响应的影响	327
6.6	相干与非相干成像系统的比较	329
6.6.1	像强度的频谱与可见度	329
6.6.2	在相干和非相干光学系统中两点间分辨率的比较	331
6.7	抽样理论和空间带宽积	333
6.7.1	Whittaker-Shannon 抽样定理	333
6.7.2	空间带宽积	336
6.8	经典光学信息处理介绍	338
6.8.1	全息像的记录和再现	339
6.8.2	相干空间滤波	341
<b>第 7 章</b>	<b>晶体光学的基本知识</b>	<b>355</b>
7.1	各向异性介质的介电张量	355
7.1.1	各向异性介质的极化和介电张量	355
7.1.2	晶体中介电张量的对称性	357
7.1.3	折射率椭球	358
7.2	各向异性介质中单色平面波的传播	360
7.2.1	描述晶体中电磁场的物理量之间的关系	360
7.2.2	光在晶体中传播的非涅耳公式	364
7.2.3	已知波矢 $s(s_x, s_y, s_z)$ 和晶体的主折射率, 用解析方法确定 $t(t_x, t_y, t_z)$	368
7.2.4	法线面和光线面	369
7.3	晶体光学中的几何作图法	372
7.3.1	给定波法线 $s$ 的方向, 确定电位移矢量 $D$	372
7.3.2	给定光线速度方向 $t$ , 确定电场强度的方向 $E$	375
7.3.3	由折射率椭球确定晶体的光轴	376
7.3.4	给定波法线 $s$ 及波法线光轴 $N_1$ 和 $N_2$ 的方向, 求 $D$ 的振动方向	377
7.3.5	已知 $s$ 和 $D$ 的方向, 求 $E$ 和 $t$ 的方向	378
7.4	单轴晶体和双轴晶体的光学性质	379
7.4.1	晶体的光学分类	379

7.4.2	单轴晶体的法线面和光线面	382
7.4.3	单轴晶体的折射率面	384
7.4.4	用解析法讨论单轴晶体中 o 光和 e 光的性质	386
7.4.5	光在双轴晶体中的传播	389
7.5	单色平面波在晶体表面上的反射和折射	393
7.5.1	真空和晶体界面处的双折射	393
7.5.2	用惠更斯作图法确定单轴晶体中折射光线的方向	397
7.5.3	单轴晶体双折射举例	398
<b>第 8 章</b>	<b>晶体的光学效应</b>	<b>402</b>
8.1	晶体的电光效应	402
8.1.1	电光效应概述	402
8.1.2	线性电光效应(泡克尔斯效应)	405
8.1.3	电光振幅调制	417
8.1.4	电光相位调制	422
8.1.5	二次电光效应(克尔电光效应)	424
8.1.6	高频电光调制	430
8.2	介质的弹光效应	433
8.2.1	应变场作用下介质的折射率椭球方程	433
8.2.2	应变场引起的介质极化强度的改变	436
8.3	晶体的声光效应	437
8.3.1	声波场引起的介质折射率的变化	437
8.3.2	介质中的布拉格衍射	440
8.3.3	布拉格声光衍射的耦合模理论分析	446
8.3.4	拉曼-奈斯(Raman-Nath)声光衍射	457
8.4	晶体的旋光性	461
8.5	法拉第效应	469
8.5.1	磁光介质	469
8.5.2	法拉第旋转	472
8.5.3	磁光器件介绍	474
	习题	476
	参考文献	503
	附录 A 傅里叶光学中常用函数和定理	505
	附录 B 德拜积分的计算	514
	附录 C 常用函数的傅里叶变换表	517
	附录 D 偏振椭圆中参量关系式推导	518

---

附录 E 晶系的对称操作数和点群符号的意义 .....	519
附录 F 应变光学系数 .....	521
索引 .....	523

# 第 1 章 光的基本电磁理论

本章从经典的电磁场理论出发介绍光学中重要的基本概念和公式。以麦克斯韦方程组和物质方程为依据导出了标量波动方程;介绍了矢量波及其偏振态的表示方法;用傅里叶分析方法分析光波在空间中的传播;利用电磁场的边界条件讨论了光波在电介质-电介质界面及电介质-金属界面上的反射特性和折射特性。

## 1.1 电磁场基本方程<sup>[1A,2~4]</sup>

### 1.1.1 麦克斯韦方程组和物质方程

光同无线电波、X 射线、 $\gamma$  射线一样都是电磁波。可见光的波长在  $0.40 \sim 0.76 \mu\text{m}$ , 仅占电磁波谱中很小的一部分。在光学中所讨论的光波主要是指可见光和近红外波段的电磁波, 有时将近紫外波段也包括进来。

电磁波是随时间变化的交变电磁场, 通常用以下四个场矢量来描述它: 电场强度  $\mathbf{E}(\text{V/m})$ 、电位移矢量  $\mathbf{D}(\text{C/m}^2)$ 、磁场强度  $\mathbf{H}(\text{A/m})$  和磁感应强度  $\mathbf{B}(\text{Wb/m}^2)$ , 它们服从麦克斯韦方程组。麦克斯韦方程组的微分形式如下:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1-1a)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (1-1b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (1-1c)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1-1d)$$

式中,  $\rho$  为电荷密度;  $\mathbf{J}$  为电流密度矢量;  $\nabla$  为哈密顿算符。在直角坐标系中

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}$$

由(1-1)式所示的微分形式的麦克斯韦方程组可以得到如下积分形式的麦克斯韦方程组:

$$\int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\iint_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s} \quad (1-2a)$$

$$\int_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \iint_S \left( \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{s} \quad (1-2b)$$

$$\iint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = \iiint_V \rho dV \quad (1-2c)$$

$$\iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 0 \quad (1-2d)$$

方程(1-2a)是法拉第电磁感应定律的积分形式,它表示变化的磁场可以产生电场,电场不一定只由电荷产生。该方程右端的负号表明由变化磁场所产生的电场具有阻碍磁场变化的趋势,它是楞次定律的反映。方程(1-2b)表示全电流定律或安培环路定理,它说明了传导电流或随时间变化的电场要产生磁场,式中 $\partial \mathbf{D} / \partial t$ 是由麦克斯韦引入的位移电流项。方程(1-2c)就是电磁学中高斯定理的一般形式。方程(1-2d)也称为磁场高斯定理,它表明了空间无磁荷存在,磁力线没有头也没有尾,总是闭合的。

方程(1-1)所表示的麦克斯韦方程组的微分形式只是在介质的物理性质连续的区域成立。而方程(1-2)所表示的麦克斯韦方程组的积分形式则不仅可用于介质的物理性质连续的区域,也可以用于不连续的区域。特别是用它的积分形式能够得到在不连续的界面上描述电磁场的物理量所应满足的边界条件。

人们经常讨论均匀、各向同性、线性介质中的电磁场问题。一个介质是均匀的,是指它的性质如折射率分布不随空间坐标而变;各向同性是说由介质中的任意一点出发沿所有的方向物理性质都相同;介质是线性的,意味着介质在存在于它里面的宏观场 $\mathbf{E}$ 作用下产生的电极化强度 $\mathbf{P}$ 与 $\mathbf{E}$ 成线性关系,即

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi \mathbf{E} \quad (1-3)$$

式中, $\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \text{ F/m}$ ,是真空中介电常数; $\chi$ 为线性极化率,这时介质中的电位移矢量为

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \epsilon_0 (1 + \chi) \mathbf{E} = \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E} \quad (1-4)$$

式中, $\epsilon_r = 1 + \chi$ 为相对介电常数,若令介电常数 $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$ ,则有

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \quad (1-5)$$

上述方程和以下两个方程一起构成了电磁场的物质方程组:

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (1-6)$$

$$\mathbf{J}_c = \sigma \mathbf{E} \quad (1-7)$$

式中, $\mu$ 为磁导率; $\mathbf{J}_c$ 为传导电流密度; $\sigma$ 为电导率。磁导率

$$\mu = \mu_0 \mu_r$$

式中, $\mu_r$ 是相对磁导率,对一般的非铁磁性物质来说 $\mu_r = 1$ ; $\mu_0$ 是真空磁导率,即

$$\mu_0 = 1.257 \times 10^{-6} \text{ H/m}$$

在线性、均匀、各向同性介质中物质方程里的 $\epsilon$ 、 $\mu$ 、 $\sigma$ 均为标量常数。这时(1-5)式中的 $\mathbf{D}$ 与 $\mathbf{E}$ 的方向是一致的。然而,在各向异性介质中, $\epsilon$ 与晶体中的方向有关,通常称之为介电系数。这时, $\epsilon$ 用张量来表示,因而 $\mathbf{D}$ 与 $\mathbf{E}$ 的方向一般不再相同。当介质中的电场 $\mathbf{E}$ 大到可以和原子内部的场强相比较时(原子内部场强约为 $10^{10} \text{ V/m}$ 的数量级),(1-5)式所表示的 $\mathbf{D}$ 与 $\mathbf{E}$ 之间的线性关系不再成立,在

强电场的作用下会导致一系列非线性光学效应。若介电系数  $\epsilon$  和磁导率  $\mu$  与光波的频率有关, 即  $\epsilon = \epsilon(\omega)$ ,  $\mu = \mu(\omega)$ , 则还要考虑色散引起的效应。

### 1.1.2 电磁场的能量定律和坡印亭矢量

有一点电荷, 设它所带的电量为  $q_i$ , 运动速度为  $\mathbf{v}_i$ , 电荷所在处的电场强度为  $\mathbf{E}_i$ , 磁感应强度为  $\mathbf{B}_i$ , 则它所受的洛伦兹力为

$$\mathbf{F}_i = q_i(\mathbf{E}_i + \mathbf{v}_i \times \mathbf{B}_i) \quad (1-8)$$

又设在  $\delta t$  时间内该电荷的位移为  $\delta \mathbf{l}_i$ , 则洛伦兹力所做的总功为

$$\begin{aligned} \delta A_v &= \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{l}_i = \sum_i q_i (\mathbf{E}_i + \mathbf{v}_i \times \mathbf{B}_i) \cdot \delta \mathbf{l}_i \\ &= \sum_i q_i \mathbf{E}_i \cdot \delta \mathbf{l}_i = \sum_i q_i \mathbf{E}_i \cdot \mathbf{v}_i \delta t \end{aligned} \quad (1-9)$$

(1-8)式右边第二项所表示的磁场力垂直于  $\mathbf{v}_i$ , 它不对电荷做功。如果在所考虑的体积  $V$  内带电粒子数目很大, 则可以将粒子分布看成是连续的, 这时(1-9)式可化为

$$\delta A_v = \delta t \int \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{E} dV \quad (1-10)$$

式中,  $\rho \mathbf{v}$  就是由运动电荷所形成的电流密度, 简称为运流电流密度, 用  $\mathbf{J}_v$  表示, 即

$$\mathbf{J}_v = \rho \mathbf{v} \quad (1-11)$$

$$\delta A_v = \delta t \int \mathbf{J}_v \cdot \mathbf{E} dV \quad (1-12)$$

$\mathbf{J}_v$  与导体中的传导电流密度  $\mathbf{J}_c = \sigma \mathbf{E}$  一起构成了麦克斯韦方程(1-1b)中的电流密度  $\mathbf{J}$ , 即

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_c + \mathbf{J}_v \quad (1-13)$$

电场  $\mathbf{E}$  对导体中的电荷和形成运流电流的电荷做功的功率之和为

$$\int \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} dV = \int \mathbf{J}_c \cdot \mathbf{E} dV + \int \mathbf{J}_v \cdot \mathbf{E} dV = \int \sigma \mathbf{E}^2 dV + \int \mathbf{J}_v \cdot \mathbf{E} dV \quad (1-14)$$

用  $\mathbf{E}$  点乘方程(1-1b)的两边, 并移项得

$$\mathbf{J} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) - \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (1-15)$$

利用矢量恒等式  $\nabla \cdot (\mathbf{f} \times \mathbf{g}) = \mathbf{g} \cdot (\nabla \times \mathbf{f}) - \mathbf{f} \cdot (\nabla \times \mathbf{g})$  及方程(1-1a), 方程(1-15)化为

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = -\mathbf{J} \cdot \mathbf{E} \quad (1-16)$$

该式是直接由麦克斯韦方程组得到的结果, 代表了电磁场的能量定律, 是普遍适用的规律。

对于均匀、各向同性介质来说, 方程(1-16)有更简洁的形式, 现推导如下:

由物质方程(1-6)式和(1-7)式有

$$\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{E} \cdot \frac{\partial}{\partial t}(\epsilon \mathbf{E}) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t}(\epsilon \mathbf{E}^2) = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} \right) \quad (1-17)$$

$$\mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mathbf{H} \cdot \frac{\partial}{\partial t}(\mu \mathbf{H}) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t}(\mu \mathbf{H}^2) = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} \right) \quad (1-18)$$

令

$$\omega_e = \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}, \quad \omega_m = \frac{1}{2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} \quad (1-19)$$

及

$$\omega = \omega_e + \omega_m \quad (1-20)$$

$\mathbf{E}$ (V/m)与 $\mathbf{H}$ (A/m)相乘之积的单位为 $\text{W}/\text{m}^2$ 。

定义坡印亭矢量

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \quad (1-21)$$

$\mathbf{S}$ 的方向由 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{H}$ 用右手螺旋法则来确定。

利用方程(1-17)~方程(1-21),方程(1-16)化为

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{S} = -\mathbf{J} \cdot \mathbf{E} \quad (1-22)$$

这是电磁场能量定律的微分形式。将(1-22)式对空间中任一体积 $V$ 积分,并利用高斯定理

$$\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{S} dV = \iint_S \mathbf{S} \cdot d\mathbf{s}$$

得到

$$\frac{dW}{dt} + \iint_S \mathbf{S} \cdot d\mathbf{s} = - \iiint_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} dV \quad (1-23)$$

(1-23)式右边表示的是场对体积 $V$ 内的源所做总功的负值。左边第二项表示的单位时间内通过该体积边界表面流出的能量。左边第一项也就是体积 $V$ 内所包含的总的电磁能 $W$ 的时间变化率。将方程(1-22)和(1-23)比较就发现, $\omega$ 表示的是总的电磁能密度,(1-19)式中的 $\omega_e$ 和 $\omega_m$ 分别为电能密度和磁能密度,而(1-21)式所定义的坡印亭矢量则表示单位时间内通过垂直于 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{H}$ 的方向上单位面积的能量,通常叫它为能流密度矢量。

对于不导电介质( $\sigma=0$ )和没有运流电流的情况( $\mathbf{J}_v=0$ ),方程(1-22)化为

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{S} = 0 \quad (1-24)$$

它与描述不可压缩流体的流体动力学连续方程具有相同的形式。

坡印亭矢量 $\mathbf{S}$ 是光学中的一个重要的物理量,它的方向代表光能量传播方向,即光线速度的方向,它的大小表示能流密度的瞬时值,它的时间平均值就是光学中重要的物理量平均光强



$$I = \langle S \rangle \quad (1-25)$$

式中,  $\langle \rangle$  表示取时间平均。

### 1.1.3 波动方程和光速

为了找到某一个场矢量如  $\mathbf{E}$  或  $\mathbf{H}$  随时间和空间变化的规律, 从麦克斯韦方程组出发, 通过消元的办法就能得到  $\mathbf{E}$  或  $\mathbf{H}$  单独所满足的关系式, 这就是下面将要导出的波动方程。

下面的推导中假设介质所在区域的电荷密度  $\rho$  和电流密度均为 0,  $\epsilon$  和  $\mu$  均不随时间变化, 但它们是空间坐标的函数。在上述假设下麦克斯韦方程组和物质方程组有如下形式:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1-26a)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (1-26b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0 \quad (1-26c)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1-26d)$$

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \quad (1-26e)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (1-26f)$$

$$\mathbf{J} = 0 \quad (1-26g)$$

先将(1-26f)式所表示的  $\mathbf{B}$  代入(1-26a)式, 再将两边同除以  $\mu$ , 最后对所得的方程两边取旋度, 就得到

$$\nabla \times \left( \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{E} \right) + \nabla \times \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = 0 \quad (1-27)$$

将(1-26e)式所表示的  $\mathbf{D}$  代入方程(1-26b), 然后对方程的两边取时间的微商, 得到

$$\nabla \times \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} - \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (1-28)$$

由以上两个方程消去  $\nabla \times \partial \mathbf{H} / \partial t$ , 得到

$$\nabla \times \left( \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{E} \right) + \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (1-29)$$

运用矢量恒等式

$$\nabla \times (\phi \mathbf{f}) = (\nabla \phi) \times \mathbf{f} + \phi \nabla \times \mathbf{f}$$

并令  $\phi = 1/\mu$ ,  $\mathbf{f} = \nabla \times \mathbf{E}$ , 方程(1-29)化为

$$\frac{1}{\mu} (\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}) + \left( \nabla \frac{1}{\mu} \right) \times (\nabla \times \mathbf{E}) + \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (1-30)$$

由矢量运算法则, (1-30)式第一项中的