21世纪高等学校精品教材

高等数学

GAO DENG SHU XUE

GAO
DENG
SHU
XUE

下

湖南师范大学
数学与计算机科学学院组编
主　审　杨向群
主编　彭富连

湖南师范大学出版社

21世纪高等学校精品教材

高等数学

GAO DENG SHU XUE

GAO
DENG
SHU
XUE

下

湖南师范大学
数学与计算机科学学院组编

主　审　杨向群
主　编　彭富连
副主编　郭瑞芝　刘迪芬
编　者　彭富连　郭瑞芝
　　　　刘迪芬　昌国良
　　　　汤自凯　李珍珠

湖南师范大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

高等数学（下）/湖南师范大学数学与计算机科学学院组编．—长沙：湖南师范大学出版社，2007.2
ISBN 978-7-81081-626-7
Ⅰ．高…　Ⅱ．湖…　Ⅲ．高等数学—高等学校—教材　Ⅳ．013
中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 008417 号

高等数学（下）
湖南师范大学数学与计算机科学学院组编

◇策划组稿：周玉波　莫　华
◇责任编辑：颜李朝
◇责任校对：胡晓军
◇出版发行：湖南师范大学出版社
地址/长沙市岳麓山　邮编/410081
电话/0731.8853867　8872751　传真/0731.8872636
◇经销：湖南省新华书店
◇印刷：长沙瑞和印务有限公司

◇开本：787×1092　1/16
◇印张：18
◇字数：427 千字
◇版次：2007 年 2 月第 1 版　2007 年 2 月第 1 次印刷
◇印数：1—3000
◇书号：ISBN 978-7-81081-626-7
◇定价：30.00 元

前　言

高等数学在各个学科领域中的重要性是有目共睹的.近年来高等数学课程被许多部委和省市列为教学的重点评估课程之一，在全国硕士学位研究生入学统一考试中，高等数学作为基础课被教育部指定为全国统考科目.但现在一个越来越突出的矛盾却摆在我们面前：一方面是各学科后继专业课及考研对高等数学的要求越来越高，涉及的内容越来越广；另一方面，由于近几年的扩招，学生的程度参差不齐，且学生课内、课外用于学习数学的时间又在减少.如何有效地解决“内容多，学时少”这一矛盾，能否编写一本合适的高等数学教材以适应新形势发展的需要？这本书的风格是什么？主线是什么？这是编者经常在一起讨论和思考的问题，这一问题同时也得到了湖南师范大学数学与计算机科学学院的高度重视.为了较好地解决上述矛盾，在罗治国副院长的亲自组织下，结合我们多年从事高等数学教学与研究及考研培训的实践，我们精心编写了这套教材.

在编写内容上我们力求做到“承前启后、宽编选用”.“承前”就是与“高中数学新大纲”和新教材相衔接.为了节省课时，本书把高中阶段已讲得较多的集合与函数等内容作了精简，同时根据需要对中学已学过的知识进行了深化.“启后”就是与专业课的需要及“全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲”相对接.本书在知识点的取舍上，我们充分考虑到了全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲对知识的要求；“宽编选用”即在保证“高等数学”课程教学基本要求的前提下，选材具有一定的深度和宽度，这样能给教师教学留有余地，有利于教师在教学中根据不同专业的要求对内容进行取舍和根据学生的差异进行分层次教学和辅导；能给学生学习提供充分的资料和空间，有利于学生个性的发展，有利于学生自学，有利于优秀学生的脱颖而出.

在编写风格上，我们力求做到：整体结构严谨简明，章节尽量做到相对完整独立；引进概念力求自然，尽量从实际问题引出抽象的概念，使读者知道概念的实际背景；基本理论、基本知识解说详细，语言确切，深入浅出，通俗易懂；基本方法突出思路，步步深化，便于应用；对一些重要定理或公式在证明的同时，注意推证思路的分析，尽量设法借助几何直观，使读者易于接受；例题、习题来源广泛，既有几何、物理、化学方面的，也有经济管理及日常生活方面的；例题选取力求形式简单、但内容力求丰富，更具典型性、代表性和启发性；习题配置不搞题海战术，我们精选每道习题，既配置了一定量的基础练习题，用以帮助学生巩固和掌握基本理论和基本方法，同时配置了用于帮助学生搞清概念的思考题、用于培养学生应用所学知识解决实际问题的应用题和带有一定综合性的考研真题；为了鼓励学生学习高等数学的积极性，提高学习兴趣，在一些章节配合教材内容，有选择地介绍一些有代表性的数学史料、一些名人传记；为了使所编教材包含的内容能适应要求不完全相同的读者的需要，我们在书中写进了一些供选学或便于自学的内容，这些内容均用 * 号标出.

本书主要特点在于重点突出，难点处理巧妙. 高等数学的核心是微积分，因此微积分理所当然地成了我们教材的主线. 微积分的重点又在极限、一元函数导数、不定积分和微元法. 极限之所以重要是因为它是我们研究高等数学的手段，极限的思想在高等数学中贯彻始终. 一元函数导数之所以重要，是因为多元函数求偏导数用的公式及运算法则与一元函数导数类似. 不定积分的重要性在于为定积分的计算提供了一种有效、简便的方法，又因为重积分、曲线积分与曲面积分的计算最终都要化为定积分来计算，所以它是为定积分的计算、曲线积分与曲面积分的计算、微分方程求解服务的. 微元法为我们解某些应用问题提供了一种有效的方法. 读者在学习高等数学时，务必搞清这些重点，定能起到事半功倍的效果.

根据我们的教学经验，学生学习高等数学的难点在极限、多元函数积分学以及应用高等数学知识解决实际问题. 求极限难在技巧性强，方法多. 我们的解决办法是尽可能地将所求变量的极限进行归类，题型配方法(即"先定型，后定法")，精选、精解例题，强化题型训练，并注重"一题多解，一题多变". 多元函数积分学难在将重积分化为累次积分时，如何选择积分次序及如何确定积分限，曲线积分如何化为定积分，曲面积分如何化为二重积分. 我们的解决办法是将其变换方法全部用"口诀"的形式进行表达，简单明了，使学生便于记、便于用. 应用数学解决实际问题难在如何将实际问题抽象成数学问题(即建模的问题)，读者必须掌握建模的基本方法. 例如对用定积分求总量的问题以及要列微分方程解应用问题，关键是要真正掌握好"微元法"这一方法，在我们的教材中对这一方法从理论到应用都给予了足够的重视.

本套教材分上、下两册出版，上册共四章，分为函数、极限与连续；一元函数微分学；一元函数积分学及常微分方程. 下册共四章，分为无穷级数；空间解析几何；多元函数微分学及多元函数积分学. 为了培养学生的自学能力与学习主动性，丰富教学内容系统，我们将同时编写并出版与教材配套的"学习指导及习题解答"辅助教材.

本套书可作为理学类、工学类、经济类等专业本科生及大专类相关专业学生的教材，也可作为准备参加硕士研究生入学数学考试的考生复习用书.

本书由湖南师范大学数学与计算机科学学院组编. 编写分工为：第五章，郭瑞芝(湖南师范大学)；第六章，郭瑞芝、吕国良(湖南师范大学)；第七章，刘迪芬、汤自凯(湖南师范大学)；第八章，彭富连(湖南师范大学)、李珍珠(湖南科技学院). 最后由彭富连统稿定稿.

本书成书过程中得到湖南师范大学数学与计算机科学学院的大力支持，罗治国副院长参加了从策划到成书的整个过程，国家有突出贡献专家、博士生导师杨向群教授在百忙中认真审定了书稿，并提出了许多宝贵意见；各兄弟院校的领导和同行对本书的编写给予了大力支持，并提出了宝贵意见. 本书的编写和出版同时得到湖南师范大学出版社的大力支持，周玉波社长与责任编辑莫华女士多次参与我们的编写讨论工作，在编辑出版过程中，莫华女士和颜李朝编辑做了大量的细致工作. 在此向他们表示衷心的感谢.

由于编者水平有限，书中难免有一些疏漏，恳请读者批评指正.

编　者

2006 年 11 日 8 日

目 录

第五章　无穷级数

无穷级数是高等数学的一个重要组成部分，是逼近理论中的重要内容之一，它是研究函数的性质，表示函数以及进行数值计算的非常有用的数学工具.

无穷级数的核心内容就是探讨其敛散性. 本章从三个方面研究无穷级数：常数项级数，幂级数和泰勒级数，傅立叶级数. 其中幂级数和泰勒级数，傅立叶级数都是函数项级数. 第一节引进常数项级数，讨论常数项级数的性质和敛散性判别. 有了第一节作为基础，第二节先介绍函数项级数的收敛、收敛域以及和函数的概念，研究幂级数的性质，着重研究将一个函数展开为泰勒级数的条件和方法. 最后介绍傅立叶级数、傅立叶系数，研究将一个函数展开为傅立叶级数的条件和方法，如何求函数的傅立叶级数的和函数.

§5.1　常数项级数

5.1.1　级数的收敛性

首先让我们考虑这样一个实际问题：

例 1　一慢性病人需每天服用某种药物，按医嘱每天服用 0.05 mg，设体内的药物每天有 20% 通过各种渠道排泄掉，问长期服药后体内药量维持在怎样的水平？

解　服药第一天，病人体内的药量为0.05 mg；服药第二天，病人体内的药量为 $0.05(1-20\%)+0.05=0.05(1+\frac{4}{5})$mg；服药第三天，病人体内的药量为$[0.05(1-20\%)+0.05](1-20\%)+0.05=0.05\left[1+\frac{4}{5}+(\frac{4}{5})^2\right]$mg；…… 按此推下去，长期服药后，病人体内的药量近似为

$$0.05\left[1+\frac{4}{5}+(\frac{4}{5})^2+(\frac{4}{5})^3+\cdots\right]\text{mg}.$$

这样就出现了无穷多个数的“和”的问题，这就是无穷级数的问题. 一般地有

定义 1　设 $u_1,u_2,\cdots,u_n,\cdots$ 是一个给定的数列，我们称它们的“和”式

$$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots \tag{1}$$

为数项级数(简称级数)，记为$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$，其中 u_n 称为级数的通项或一般项.

上述级数的定义只是一个形式上的加法式子，并无法直接对无穷多个实数逐一地进行

加法运算,所以必须对上述的级数求和给出合理的定义.

数项级数(1) 的前 n 项和记为

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = u_1 + u_2 + \cdots + u_n \tag{2}$$

称之为数项级数(1) 的第 n 个部分和,简称为部分和.

定义 2 若级数(1) 的部分和数列 $\{S_n\}$ 收敛于 S(即 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$),则称级数(1) 收敛,称 S 为级数(1) 的和,记作

$$S = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots \text{ 或 } S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

且称

$$r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k = u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots = S - S_n$$

为级数(1) 的余和数列,简称余和. 若级数(1) 的部分和数列 $\{S_n\}$ 发散,则称级数(1) 发散.

由上述定义可知,只有当级数收敛时,无穷多个实数的加法才有意义,并且它们的和就是级数的部分和数列的极限. 所以,级数的收敛与部分和数列的收敛本质上是一回事.

例 2 讨论下列级数的敛散性并指出收敛级数的和:

(1) 几何级数(或称为等比级数)

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} + \cdots,$$

其中 q 为公比;

(2) 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} + \cdots;$$

(3) 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} = 1 + (-1) + 1 + (-1) + \cdots + (-1)^{n-1} + \cdots.$$

解 (1) 当 $q \neq 1$ 时,级数的部分和数列为

$$S_n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} = \frac{a(1-q^n)}{1-q},$$

显然,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \begin{cases} \dfrac{a}{1-q}, & |q| < 1, \\ \infty, & |q| > 1, \\ \text{不存在}, & q = -1. \end{cases}$$

当 $q = 1$ 时,级数的部分和数列为 $S_n = n$,显然,$\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ 不存在. 因此几何级数当 $|q| < 1$ 时收敛且其和为 $\dfrac{a}{1-q}$,当 $|q| \geqslant 1$ 时发散.

(2) 级数的部分和数列为

$$S_n=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}$$
$$=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$
$$=1-\frac{1}{n+1},$$

显然，$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=1$，因此原级数收敛且和为 1.

(3) 级数的部分和数列为

$$S_n=\begin{cases}1,\text{当 } n \text{ 为奇数时},\\ 0,\text{当 } n \text{ 为偶数时}.\end{cases}$$

则 $\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n-1}=1$，$\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n}=0$，原级数的部分和数列有两个极限不相等的子列，所以部分和数列发散. 因此原级数发散.

从以上三个例子可以看出，利用级数的定义判断级数的敛散性的必要条件是能求出级数的部分和数列及其极限，否则无法判断，然而这两个步骤一般都是困难的，因此，必须寻求其他的判断办法. 为此，下面先介绍级数的基本性质.

5.1.2　级数的基本性质

性质 1(级数收敛的必要条件)　若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则其一般项趋于零，即

$$\lim_{n\to\infty}u_n=0.$$

证　设级数的和为 S，则

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}S_{n-1}=S,$$

又因为级数的部分和数列与一般项之间有关系 $u_n=S_n-S_{n-1}$，$(n>1)$，所以

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}(S_n-S_{n-1})=\lim_{n\to\infty}S_n-\lim_{n\to\infty}S_{n-1}=0.$$

值得一提的是一般项趋于零只是级数收敛的必要条件，而非充分条件，因此，性质 1 只能用来证明级数发散而不能用来证明级数收敛.

例如：级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 的一般项满足 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$，但该级数发散. 这是因为

$$S_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n},$$

满足

$$\frac{1}{2}<\int_1^2\frac{1}{x}\mathrm{d}x<1,$$
$$\frac{1}{3}<\int_2^3\frac{1}{x}\mathrm{d}x<\frac{1}{2},$$
$$\vdots$$

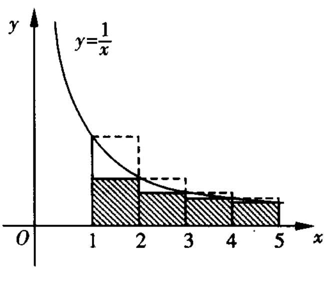

图 5-1

$$\frac{1}{n+1} < \int_n^{n+1} \frac{1}{x}\mathrm{d}x < \frac{1}{n},$$

以上各式相加得

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n+1} < \int_1^{n+1} \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln(n+1) < 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n},$$

则

$$\ln(n+1) < 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n} < 1+\ln n,$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ 不存在,因此级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散.

性质 2(线性性质)　若两级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 均收敛,且它们的和分别为 A, B, λ, μ 是两个常数,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\lambda u_n+\mu v_n)$ 收敛,且

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda u_n+\mu v_n) = \lambda A+\mu B.$$

证　两级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 的部分和数列分别记为 $\{S_n^{(1)}\}$, $\{S_n^{(2)}\}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\lambda u_n+\mu v_n)$ 的部分和数列记为 $\{S_n\}$,则

$$S_n = \lambda S_n^{(1)}+\mu S_n^{(2)},$$

于是

$$\lim_{n\to\infty}S_n = \lambda\lim_{n\to\infty}S_n^{(1)}+\mu\lim_{n\to\infty}S_n^{(2)} = \lambda A+\mu B.$$

性质 2 表示对收敛级数可以进行加法和数乘运算.

例 3　求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4^{n+1}-3\cdot 2^n}{5^n}$ 的和.

解　因为几何级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^n$ 都收敛,所以有

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^{n+1}-3\cdot 2^n}{5^n} &= 4\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^n-3\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^n \\ &= 4\cdot\frac{\frac{4}{5}}{1-\frac{4}{5}}-3\cdot\frac{\frac{2}{5}}{1-\frac{2}{5}} = 14.\end{aligned}$$

性质 3　若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛,则在它的求和表达式中任意添加括号后所得的新级数仍然收敛,且其和不变.

证　设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 添加括号后所得的新级数表示为

$$(u_1+u_2+\cdots+u_{n_1})+(u_{n_1+1}+u_{n_1+2}+\cdots+u_{n_2})+\cdots+$$
$$(u_{n_{k-1}+1}+u_{n_{k-1}+2}\cdots+u_{n_k})+\cdots,$$

令

$$v_1=u_1+u_2+\cdots+u_{n_1},$$
$$v_2=u_{n_1+1}+u_{n_1+2}+\cdots+u_{n_2},$$
$$\cdots\cdots$$
$$v_k=u_{n_{k-1}+1}+u_{n_{k-1}+2}+\cdots+u_{n_k},$$
$$\cdots\cdots$$

则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 按上面的方式添加括号后所得新级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$. 令 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 的部分和数列分别为 $\{S'_n\}$ 与 $\{S_n\}$，则 $S_k=S'_{n_k}$，即新级数的部分和数列是原级数部分和数列的子列，于是由 $\{S'_n\}$ 的收敛性即得 $\{S_n\}$ 的收敛性，且极限相同.

在极限论中我们知道，一个数列的某个子列收敛并不能保证数列本身收敛. 因此，对级数添加了括号以后所得的级数收敛不能保证原来的级数收敛.

例如：级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}=1+(-1)+1+(-1)+\cdots+(-1)^{n-1}+\cdots$$

发散，但若在每两项之间加上括号，则有

$$(1-1)+(1-1)+\cdots+(1-1)+\cdots=0+0+\cdots+0+\cdots=0.$$

定理 1（级数的柯西(Cauchy)收敛原理）　级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛的充要条件是：$\forall\varepsilon>0$，$\exists N$，当 $n>N$ 时，有 $|u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+p}|<\varepsilon$，对任意的自然数 p 均成立.

证　由数列的柯西收敛原理（见上册 1.2.3 中的定理 5）即得定理结论.

例 4　当 $q\geqslant 2$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^q}$ 收敛.

证　因为对任意的自然数 p，

$$\begin{aligned}&\left|\frac{1}{(n+1)^q}+\frac{1}{(n+2)^q}+\cdots+\frac{1}{(n+p)^q}\right|\\&<\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\cdots+\frac{1}{(n+p-1)(n+p)}\\&=\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n+p-1}-\frac{1}{n+p}\right)\\&=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+p}<\frac{1}{n},\end{aligned}$$

所以，对任意给定的正数 ε，取自然数 $N\geqslant\dfrac{1}{\varepsilon}$，则当 $n>N$ 时，对任意自然数 p，有

$$|u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+p}|<\varepsilon,$$

由柯西收敛原理，当 $q\geqslant 2$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^q}$ 收敛.

由定理 1,我们立刻可以写出级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散的充要条件是：$\exists\varepsilon_0>0$，$\forall N$ 是正整数，总存在自然数 $n_0(>N)$ 和 p_0，有

$$|u_{n_0+1}+u_{n_0+2}+\cdots+u_{n_0+p_0}|\geqslant\varepsilon_0.$$

例 5　用柯西收敛原理证明级数

$$1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots$$

发散.

证　取 $n_0=3n,p_0=3n$，则

$$\begin{aligned}&\left|\frac{1}{3n+1}+\frac{1}{3n+2}-\frac{1}{3n+3}+\cdots+\frac{1}{3n+3n-2}+\frac{1}{3n+3n-1}-\frac{1}{3n+3n}\right|\\&=\frac{1}{3n+1}+\left(\frac{1}{3n+2}-\frac{1}{3n+3}\right)+\cdots+\frac{1}{3n+3n-2}+\left(\frac{1}{3n+3n-1}-\frac{1}{3n+3n}\right)\\&>\frac{1}{3n+1}+\cdots+\frac{1}{3n+3n-2}>\frac{1}{6n}+\cdots+\frac{1}{6n}\\&=\frac{1}{6}.\end{aligned}$$

由柯西收敛原理得原级数发散.

由柯西收敛原理容易得到下面的性质.

性质 4　在级数的前面添上、去掉或改变有限多个项不改变级数的敛散性.

5.1.3　正项级数的敛散性判别

如果级数各项符号都相同，则称之为同号级数. 由于级数各项乘以一个非零常数不改变级数的敛散性，所以只须研究各项都为正数的级数，这样的级数称为正项级数. 不难看出正项级数的部分和数列 $\{S_n\}$ 是单调递增的，因此容易证得下面的定理.

定理 2(基本判别法)　正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛的充要条件是其部分和数列 $\{S_n\}$ 有界.

由定理 2 知，正项级数收敛的充要条件是其部分和数列有上界；发散的正项级数必发散到正无穷大.

定理 3(比较判别法)　设 $u_n\geqslant 0,v_n\geqslant 0$，且 $u_n\leqslant v_n$. 则当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛；当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 发散.

证　设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 的部分和数列分别为 $\{S'_n\}$ 与 $\{S_n\}$，则由已知得 $S'_n\leqslant S_n$，再由定理 2 知，当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛时，$\{S_n\}$ 有上界，于是 $\{S'_n\}$ 一定有上界，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散时，

$\{S'_n\}$ 无界，于是 $\{S_n\}$ 无界，即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散.

因为级数的每一项乘以一个非零常数以及改变级数前面的有限个项不影响级数的敛散性，所以容易得到下面的推论.

推论 1　设 $k>0$ 是一个常数，$u_n \geqslant 0, v_n \geqslant 0$，且存在自然数 N，使得当 $n \geqslant N$ 时，有

$$u_n \leqslant kv_n.$$

则当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛；当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散.

例 6　判断下列级数的敛散性：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n+3}{2n^3-n}$；(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\dfrac{\pi}{n}$.

解　(1) 容易看出当 $n>3$ 时，有

$$0<\frac{n+3}{2n^3-n}<\frac{1}{n^2},$$

又 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ 收敛，于是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n+3}{2n^3-n}$ 收敛.

(2) 当 $n \geqslant 2$ 时，$\dfrac{\pi}{n} \in \left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$，因为当 $x \in \left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$时有不等式

$$\frac{2}{\pi}x \leqslant \sin x \leqslant x,$$

所以有

$$\sin\frac{\pi}{n} \geqslant \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{n}=\frac{2}{n},$$

又 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2}{n}$ 发散，于是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\dfrac{\pi}{n}$ 发散.

推论 2(比较判别法的极限形式)　设 $u_n \geqslant 0, v_n \geqslant 0$，记 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{v_n}=l$，则

(1) 当 $0<l<+\infty$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 同时收敛或同时发散；

(2) 当 $l=0$ 时，由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛可得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛；

(3) 当 $l=+\infty$ 时，由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散可得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

证　(1) 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{v_n}=l$，取 $\varepsilon=\dfrac{l}{2}>0$，则存在自然数 N，当 $n>N$ 时有

$$\left|\frac{u_n}{v_n}-l\right|<\frac{l}{2},$$

即当 $n>N$ 时有

$$\frac{1}{2}lv_n < u_n < \frac{3}{2}lv_n,$$

由定理 3 即得所需结论.

(2) 和(3) 的证明类似可证.

推论 2 说明若两正项级数的一般项是同阶无穷小量，则两级数同时收敛，同时发散. 在例 6 中，$\frac{n+3}{2n^3-n}=o(\frac{1}{n^2})$，$\sin\frac{\pi}{n}=o(\frac{1}{n})$. 利用推论 2 立刻可得结论.

例 7 判断下列级数的敛散性：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n-n}$；(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot\sqrt[n]{n}}$；(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(e^{\frac{1}{n^2}}-\cos\frac{\pi}{n}\right)$.

解 (1) 因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2^n-n}}{\frac{1}{2^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{2^n-n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1-\frac{n}{2^n}}=1,$$

又 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ 收敛，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n-n}$ 收敛.

(2) 因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n\cdot\sqrt[n]{n}}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}=1,$$

又 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot\sqrt[n]{n}}$ 发散.

(3) 因为

$$\begin{aligned}e^{\frac{1}{n^2}}-\cos\frac{\pi}{n}&=\left[1+\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]-\left[1-\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{n}\right)^2+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]\\&=\left(1+\frac{\pi^2}{2}\right)\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right),\end{aligned}$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{n^2}}-\cos\frac{\pi}{n}}{\frac{1}{n^2}}=1+\frac{\pi^2}{2}.$$

又 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，于是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(e^{\frac{1}{n^2}}-\cos\frac{\pi}{n}\right)$ 收敛.

在用比较判别法判别一个级数是否收敛时，需要与另一个已知敛散性的级数进行比较，这个作为比较用的级数通常称为标准级数. 在使用比较判别法时我们常用几何级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}aq^{n-1}$（当 $|q|<1$ 时收敛，其余发散），p-级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$（当 $p>1$ 时收敛，当 $p\leqslant 1$ 时发散，

尚未完全证明，后面会有完全证明）. 下面用几何级数作为标准得到两个判别法 —— 比值判别法和根值判别法.

定理 4（比值判别法或称为达朗贝尔（D'Alembert）判别法）　设 $u_n \geqslant 0$，如果极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=l$$

存在或为 $+\infty$，则

（1）当 $l<1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛；

（2）当 $1<l\leqslant+\infty$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散；

（3）当 $l=1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 可能收敛亦可能发散，此时需要用别的方法进行判断.

证　（1）当 $l<1$ 时，因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=l$，取定适当小的正数 ε，使得 $l+\varepsilon<1$，存在正整数 N，当 $n\geqslant N$ 时有 $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}-l\right|<\varepsilon$，于是当 $n\geqslant N$ 时有

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}<l+\varepsilon，即\ u_{n+1}<(l+\varepsilon)u_n，$$

因为级数前面的有限个项不影响其敛散性，不妨设上面不等式从第一项开始就成立. 于是有

$$\begin{gathered}u_2<(l+\varepsilon)u_1,\\ u_3<(l+\varepsilon)u_2<(l+\varepsilon)^2u_1,\\ \vdots\\ u_n<(l+\varepsilon)^{n-1}u_1,\\ \vdots\end{gathered}$$

由于 $l+\varepsilon<1$，所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(l+\varepsilon)^{n-1}u_1$ 收敛，故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

（2）当 $1<l\leqslant+\infty$ 时，取定适当小的正数 ε，使得 $l-\varepsilon>1$，因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=l$，存在正整数 N，当 $n\geqslant N$ 时有 $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}-l\right|<\varepsilon$，于是当 $n\geqslant N$ 时有

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}>l-\varepsilon，即\quad u_{n+1}>(l-\varepsilon)u_n，$$

与（1）完全类似地可得

$$u_{n+1}>(l-\varepsilon)^{n-1}u_1，$$

由 $l-\varepsilon>1$，得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(l-\varepsilon)^{n-1}u_1$ 发散，故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散.

（3）级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，但对于这两个级数都有 $l=1$ 成立.

例 8　判断下列级数的敛散性：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2 \sin \frac{\pi}{2^n}$；　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+1}}{(n+1)!}$.

解　(1) 因为 $u_n = n^2 \sin \frac{\pi}{2^n} > 0$，所以

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2 \sin \frac{\pi}{2^{n+1}}}{n^2 \sin \frac{\pi}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{n^2} \frac{\frac{\pi}{2^{n+1}}}{\frac{\pi}{2^n}} = \frac{1}{2} < 1,$$

因此，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2 \sin \frac{\pi}{2^n}$ 收敛.

(2) 因为 $u_n = \frac{n^{n+1}}{(n+1)!} > 0$，所以

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+2}}{(n+2)!} \cdot \frac{(n+1)!}{n^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n+2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \mathrm{e} > 1,$$

因此，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+1}}{(n+1)!}$ 发散.

定理 5(根值判别法或称为柯西判别法)　设 $u_n \geqslant 0$，如果极限

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = l$$

存在或为 $+\infty$，则

(1) 当 $l < 1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛；

(2) 当 $1 < l \leqslant +\infty$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散；

(3) 当 $l = 1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 可能收敛亦可能发散，此时需要用别的方法进行判断.

定理 5 的证明思路与定理 4 基本一致，请读者自己完成.

例 9　讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^p}(x > 0)$ 的敛散性.

解　由于

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{(\sqrt[n]{n})^p} = x,$$

故当 $x < 1$ 时，级数收敛；当 $x > 1$ 时，级数发散；当 $x = 1$ 时，级数为 p-级数，仅在 $p > 1$ 时，级数收敛.

定理 6*(积分判别法或称柯西积分判别法)　设 $f(x)$ 定义在 $[a, +\infty)$ 上，$f(x) \geqslant 0$，且 $f(x)$ 在任意有限区间 $[a, A]$ 上可积. 取一个单调递增趋于 $+\infty$ 的数列 $\{a_n\}$：

$$a = a_1 < a_2 < \cdots < a_n < \cdots$$

令

$$u_n = \int_{a_n}^{a_{n+1}} f(x)\mathrm{d}x.$$

则广义积分$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$与正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$同时收敛或同时发散到$+\infty$，且

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{a_n}^{a_{n+1}} f(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}u_n.$$

特别，当函数$f(x)$单调减少时，取$a_n=n$，则广义积分$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$与正项级数$\sum\limits_{n=N}^{\infty} f(n)$（$N=[a]+1$）同时收敛或同时发散.

证　设正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$的部分和数列为$\{S_n\}$，则对任意$A>a$，存在正整数$n$使得$a_n\leqslant A<a_{n+1}$，于是（如图5-2）$S_{n-1}\leqslant\int_a^A f(x)\mathrm{d}x\leqslant S_n$.

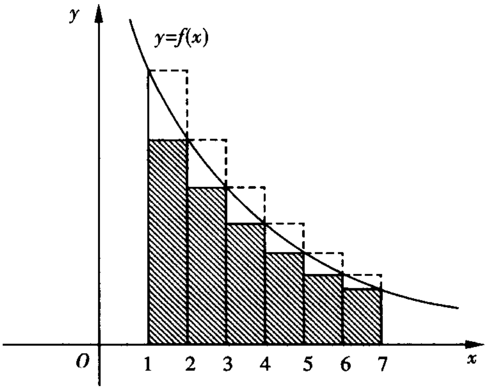

图5-2

当$\{S_n\}$有界，即$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$收敛时，则有$\lim\limits_{A\to\infty}\int_a^A f(x)\mathrm{d}x$收敛，且根据极限的夹逼定理知它们收敛于相同的极限；当$\{S_n\}$无界，即$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$发散到$+\infty$时，则同样有$\lim\limits_{A\to\infty}\int_a^A f(x)\mathrm{d}x=+\infty$. 因此有下述关系

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{a_n}^{a_{n+1}} f(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}u_n.$$

特别，当函数$f(x)$单调减少时，取$a_n=n$，则当$n\geqslant N=[a]+1$时，

$$f(n+1)\leqslant u_n\leqslant f(n),$$

由比较判别法知$\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$同时收敛或同时发散，从而与$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$同时收敛或同时发散.

例10　讨论p-级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^p}$的敛散性.

解　取$f(x)=\dfrac{1}{x^p}$，则$f(x)$在$[1,+\infty)$单调减少，且$\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^p}$，因为

$$\int_1^A f(x)\mathrm{d}x=\begin{cases}\dfrac{1}{1-p}(A^{-p+1}-1), & p\neq 1,\\ \ln A, & p=1.\end{cases}$$

令$A\to+\infty$，可知广义积分$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$在$p>1$时收敛，在$p\leqslant 1$时发散，因此$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^p}$在$p>1$时收敛，在$p\leqslant 1$时发散.

例11　级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\ln^q n}$在$q>1$时收敛，在$q\leqslant 1$时发散.