



MAGICAL

紧跟新教材，紧随新课标，紧扣新考纲，适合高中高考学生使用

红魔数学

红魔数学

Magical Mathematics Tutor for Examination Secondary

备考宝典

高中版

主编：涂立奇

国防科技大学出版社

紧跟新教材，紧随新课标，紧扣新考纲，
适合高中高考学生使用

MAGICAL 红魔教辅

主 编：涂立奇

编者：石顺祥 欧远志 李 坤 苏 晖

吴昌义 杨亚堡 王先志 伍泳波



数学 备考宝典 (资料包) 高中版

国防科技大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

红魔数学备考宝典(资料包·高中版)/涂立奇 主编. -长沙:国防科技大学出版社, 2006.12

ISBN 7-81099-265-1

I. 红... II. 涂... III. 数学课-高中-升学参考资料

IV. G634.913

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2006) 第 076829 号

红魔数学备考宝典(资料包·高中版)

总 策 划: 周艺文

主 编: 涂立奇

责任编辑: 徐 飞

责任校对: 肖 滨

技 对: 熊 灿

版式设计: 彭 娟 李小清

全案策划: 红魔教育事业部

电话: (0731)2801360 邮政编码: 410005

E-mail: zhoyiwen@vip.163.com

出 版: 国防科技大学出版社

电话: (0731)4572640 邮政编码: 410073

E-mail: gfkdebs@public.cs.hn.cn

新华书店

经 销: 湖南书香万卷文化实业有限公司

电话: (0731)2849636 2849637

网 址: <http://www.redmagical.com>

印 装: 湖南东方速印科技股份有限公司

电话: (0731)8807850

开 本: 880×660 1/20

印 张: 29.7

字 数: 750 千字

版 次: 2006 年 12 月第 1 版

印 次: 2006 年 12 月第 1 次印刷

书 号: ISBN 7-81099-265-1/G·42

定 价: 24.80 元

如有印刷质量问题,影响阅读,请与印刷厂联系调换

★有知识的地方就有红魔★

红魔教辅高中
备考宝典（资料包）
系列

《红魔高中地理备考宝典》

《红魔高中政治备考宝典》

《红魔高中语文备考宝典》

《红魔高中历史备考宝典》

《红魔高中生物备考宝典》

《红魔高中化学备考宝典》

《红魔高中数学备考宝典》

《红魔高中物理备考宝典》

WJ100.com
万卷网

www.wj100.com

MT
MIDU

www.mtdu.com

封面设计：李小清

前 言

伴随着全球经济一体化和世界信息化的历史进程,未来的世界将会越来越平坦,耸立在这个平坦的世界上的将是一批具有创新思维、创新能力的高素质新型综合人才。

这样的人才,只能来自于创新的教和学,来自于自主的、独立的学习,而一部高品质、高效率的教辅,则是这种学习的有力保证和前提。本着全面提高学生素质、重视知识积累、提高思维品质、发展创新能力的精神,红魔教育事业部,倾力打造了一套《高中备考宝典(资料包)》,涵盖语文、历史、地理、政治、数学、物理、化学、生物等,以满足广大高中高考学生的需要。

这套丛书具有科学性、系统性、实用性等特点:

科学性:丛书遵循教育理论,贯彻教改精神,确立以创新为导向、素质为核心、能力为表征的设计思想,抓《纲》扣“本”,兼容并蓄,集知识系统、网络构建、考点分析、试题精讲、思维拓展、能力提升于一炉,具有学习、巩固、创新的功能,适合不同层次、不同学科学生的学习和应试需求。

系统性:丛书以人教版教材为主,结合教纲、考纲、课标,以“夯实基础”“知识结构”“知识精讲”等栏目,将教材内容全面梳理,全面系统化,用简洁凝炼的语言和直观明快图表,突出和联结各科知识的基本点、重点、难点和疑点,并总结各科的常用资料和背景材料,便于学生把握和记忆,便于学生学习和复习。

实用性:丛书遵循“以人为本”的原则,紧贴学生学习和应试实际,既有高考命题各种题型的总结,又有对未来命题趋势的分析,既有对知识的宏观概括,又有对经典试题微观分析,使课外自主学习与应试技巧、方法点拨、思维拓展相互交织,有机结合,具有很强的实用性。

总之,丛书努力追求卓越,注重创新、注重能力提升,编写时力求学习目标明确,知识系统准确,释题解难简明,训练设题精当,考标分析合理,充分体现科学精神和创新意识,但因能力有限,在理念、知识和排版上难免会出现疏漏和失误,敬请广大师生斧正并宽谅!

 CONTENTS
目 录

第一章 集合与简易逻辑	2
第 1 节 集合的概念	3
第 2 节 集合的运算	10
第 3 节 不等式的解法	18
第 4 节 简易逻辑	29
第二章 函数	38
第 1 节 函数及函数的表示	38
第 2 节 函数的单调性	44
第 3 节 反函数	51
第 4 节 指数与指数函数	56
第 5 节 对数与对数函数	61
第 6 节 函数的运用举例	66
第三章 数列	72
第 1 节 数列的概念	73
第 2 节 等差数列	80
第 3 节 等比数列	87
第 4 节 数列求和	94
第四章 三角函数	102
第 1 节 角的概念的推广	102
第 2 节 弧度制	107
第 3 节 任意角的三角函数	111
第 4 节 同角三角函数基本关系式	115
第 5 节 正弦、余弦的诱导公式	120
第 6 节 两角和与差的正弦、余弦、正切	124

第 7 节	二倍角的正弦、余弦、正切	131
第 8 节	正弦函数、余弦函数的图像与性质	138
第 9 节	函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图像	144
第 10 节	正切函数的图像和性质	150
第 11 节	已知三角函数值求角	154
第五章	平面向量	159
第 1 节	向量	159
第 2 节	向量的加法与减法	163
第 3 节	实数与向量积	168
第 4 节	向量的坐标运算	174
第 5 节	线段的定比分点	179
第 6 节	平面向量数量积及运算律	185
第 7 节	平面向量数量积的坐标表示	191
第 8 节	平移	197
第 9 节	正弦定理、余弦定理	201
第 10 节	解斜三角形应用举例	207
第六章	不等式	213
第 1 节	不等式的性质	213
第 2 节	算术平均数与几何平均数	219
第 3 节	不等式的证明	226
第 4 节	不等式的解法举例	233
第 5 节	含有绝对值的不等式	240
第七章	直线和圆的方程	246
第 1 节	直线的倾斜角和斜率	246
第 2 节	直线的方程	253
第 3 节	两条直线的位置关系	260
第 4 节	简单的线性规划	266
第 5 节	曲线与方程	272
第 6 节	圆的方程	279
第八章	圆锥曲线和方程	288
第 1 节	椭圆	288

第 2 节	双曲线	297
第 3 节	抛物线	307
第 4 节	直线与圆锥曲线的位置关系	317
第 5 节	轨迹探求	326
第九章	直线、平面、简单几何体	334
第 1 节	平面的基本性质	335
第 2 节	空间直线	342
第 3 节	直线与平面平行、平面与平面平行	351
第 4 节	直线与平面垂直	361
第 5 节	二面角与两平面垂直	373
第 6 节	空间向量及其运算	386
第 7 节	空间向量的坐标运算及应用	396
第 8 节	空间的角	404
第 9 节	空间的距离	414
第 10 节	棱柱和棱锥	423
第 11 节	欧拉公式与球	431
第十章	排列、组合和概率	439
第 1 节	分类计数原理与分步计数原理	439
第 2 节	排列	443
第 3 节	组合	447
第 4 节	二项式定理	452
第 5 节	随机事件的概率	457
第 6 节	互斥事件有一个发生的概率	462
第 7 节	相互独立事件同时发生的概率	467
第十一章	概率与统计	474
第 1 节	离散型随机变量的分布列	475
第 2 节	离散型随机变量的期望与方差	482
第 3 节	抽样方法、总体分布的估计	490
第 4 节	正态分布与线性回归	497
第十二章	极限	505
第 1 节	数学归纳法及其应用举例	505



第一章

集合与简易逻辑

-红魔教辅-

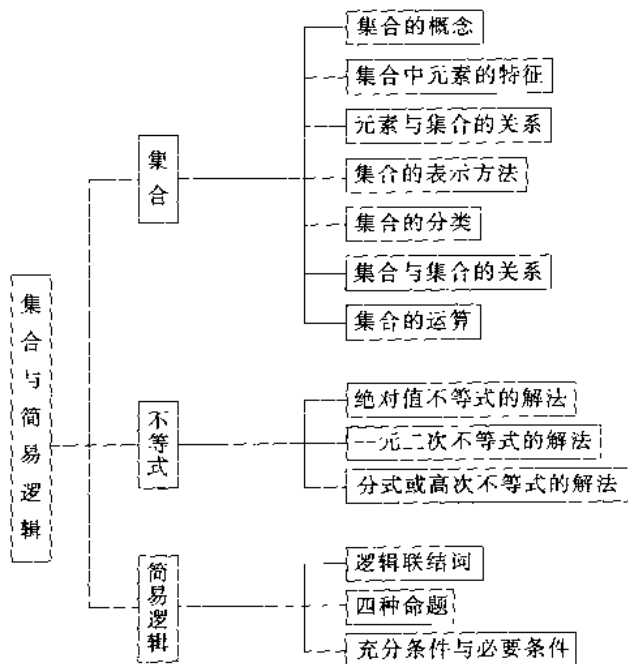


第一章 集合与简易逻辑



Set & Simple Logic

网络构建



第1节 集合的概念

知识篇

知识目标

1. 理解集合、子集的概念.
2. 了解空集和全集的定义和“属于”、“包含”、“相等”的意义.
3. 掌握有关术语和符号,会用它们表示一些简单的集合.

知识再现

1. 集合的概念.
2. 集合中元素的基本特征:确定性、互异性与无序性.
3. 元素与集合的关系:属于($\in$)与不属于($\notin$)的关系.
4. 集合的表示方法:列举法、描述法和图示法.
5. 集合的分类:有限集与无限集.
6. 子集:若集合 A 中任何一个元素都是集合 B 的元素,就说集合 A 包含于集合 B (或 B 包含 A),记作 $A \subseteq B$ (或 $B \supseteq A$).
7. 相等集合与真子集:若 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$,则 $A=B$;若 $A \subseteq B$ 且 $A \neq B$,则 A 是 B 的真子集,记作 $A \subset B$ (或 $B \supset A$).

疑难辨析

1. 集合语言的转译特别是对描述法表示的集合的理解是本节的重点,也是难点.

描述法表示集合的一般形式是 $\{x|x \in P(x)\}$, x 表示集合的代表元素, $P(x)$ 表示元素的公共属性,转译描述法表示的集合,首先要明确元素是什么?是数、点或其情况,再考察元素所满足的公共属性 $P(x)$,两者缺一不可.

如集合 $A=\{x|y=\sqrt{1-x^2}\}$, $B=\{y|y=\sqrt{1-x^2}\}$, $C=\{(x,y)|y=\sqrt{1-x^2}\}$, 很多学生混为一谈,无法区分它们的差异,究其原因就是对描述法表示的集合缺乏理解,很难进行集合语言的转译.实际上 $A=\{x|y=\sqrt{1-x^2}\}$ 的代表元素是 x 即函数的自变量,故集合 A 表示函数的定义域,集合 $B=\{y|y=\sqrt{1-x^2}\}$ 中的代表元素是 y , 是其函数值,而集合 $C=\{(x,y)|y=\sqrt{1-x^2}\}$ 的代表元素是 (x,y) , 表示直角坐标平面内的点, 故集合 C 表示函数 $y=\sqrt{1-x^2}$ 图像上的点.

又如集合 $D = \left\{ (x, y) \mid \frac{y-1}{x-2} = 0, x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R} \right\}$ 学生明白了其元素是点 (x, y) , 但对其属

性 $\frac{y-1}{x-2} = 0$, 不知所措, 实际上 $\frac{y-1}{x-2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y-1=0 \\ x-2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1 \\ x \neq 2 \end{cases}$ 故集合 D 表示直线 $y=1$ 上

删除掉点 $(2, 1)$ 的所有点.

2. 子集关系的掌握是本节的又一重点

理解子集概念关键要从三方面入手: ①子集的定义, ②子集的性质, 特别是“空集 $\emptyset$ 是所有集合的子集”即 $\emptyset \subseteq A$ 是很多学生容易忽视的盲点. ③ f 集的应用, 特别是韦恩图表示或应用数轴数形结合都是学生知识的缺乏点.

例 1 (2003 年上海高考题) 已知集合 $A = \{x \mid |x| \leq 2\}$, $B = \{x \mid x \geq a\}$, 且 $A \subseteq B$, 则实数 a 的取值范围是 _____.

解析 因为集合 A 与 B 是两个数集, 因此可以借助数轴数形结合.

$\because A = \{x \mid -2 \leq x \leq 2\}, B = \{x \mid x \geq a\}$, 如右图所示:

$A \subseteq B$, 所以 $a \leq -2$.

$\therefore$ 应填 $a \leq -2$.

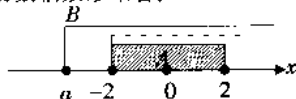


图 1-1-1

提醒 要特别注意 a 是否能取到端点 -2 的值, 端点的考察是学生的易错点.

技能篇

考点阐释

集合的概念, 集合间的关系等高考中偶尔以小题的形式予以考查, 且多与其他内容相结合, 实际上集合作为一种语言, 也同时作为一种思想和方法贯穿高中数学的始终, 读者应切实体会.

范例解析

例 1 已知 $M = \{x \mid x = a + b\sqrt{6}, a, b \in \mathbf{Z}\}$, $m = \sqrt{2-\sqrt{3}} + \sqrt{2+\sqrt{3}}$, 则 ()

A. $m \in M$

B. $m \notin M$

C. $m \subseteq M$

D. $|m| \notin M$

解析 本题是元素与集合的关系问题, 关键是将数 m 进行恒等变形, 再考察变形后的数是否形如 $a + b\sqrt{6}$, ($a, b \in \mathbf{Z}$)

解 $\because m = \sqrt{2-\sqrt{3}} + \sqrt{2+\sqrt{3}}$

$\therefore m^2 = 2 - \sqrt{3} + 2\sqrt{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})} + 2 + \sqrt{3} = 6$

即 $m = \sqrt{6} = 0 + 1 \times \sqrt{6}$ 其中 $a=0, b=1$

$\therefore$ 应选答案 A.

例 2 判断一个元素是否为集合中的元素,关键要看这个元素是否具有集合中元素的特征,其中恒等变形是难点.

例 3 已知集合 $A=\{1, a, b\}$, $B=\{a, a^2, ab\}$ 若 $A=B$, 求 $a^{2006}+b^{2006}$ 的值.

分析 根据集合中元素的确定性和互异性建立关于 a, b 的方程组, 求出 a, b 的值即可.

解 $\because A=B$ 即集合 A, B 的元素完全相同

$$\therefore \begin{cases} a^2=1 \\ ab=b \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} a^2=b \\ ab=1 \end{cases}$$

$$\text{解得 } \begin{cases} a=1 \\ b \in \mathbf{R} \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} a=-1 \\ b=0 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases}$$

由集合中元素的互异性 $a \neq 1$ 且 $a \neq b$

$\therefore a=-1, b=0$ 故 $a^{2006}+b^{2006}=1$.

例 4 ①注意解题后的反思, 防范陷阱. ②方程思想是中学数学中重要的思想, 在高考和解决数学问题中占有很重要的地位, 要注意体会和掌握它.

例 3 (2003 年上海高考题) 已知集合 $M=\{(x, y) | x+y=2\}$, $N=\{(x, y) | x-y=4\}$, 那么集合 $\{x | x \in M \text{ 且 } x \in N\}$ 为 ()

- A. $x=3, y=-1$ B. $(3, -1)$ C. $\{3, -1\}$ D. $\{(3, -1)\}$

分析 结论 $\{x | x \in M \text{ 且 } x \in N\}$ 中的元素看似为 x , 很容易误解为集合 M, N 中的数 x , 这也是学生对描述法表示的集合理解不透所致, 实际上, $\{x | x \in M \text{ 且 } x \in N\}$ 中的 x 表示集合 M, N 中的元素, 即点. 明白了这一点, 问题就容易解决了.

解 $\because$ 集合 $\{x | x \in M \text{ 且 } x \in N\}$ 中的元素是集合 M 和集合 N 中的公共元素,

$$\text{由 } \begin{cases} x+y=2 \\ x-y=4 \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} x=3 \\ y=-1 \end{cases}, \text{ 故选 D.}$$

例 5 本题由于对描述法表示的集合理解不透, 很容易错选 A 或 B. 实际上集合 M 和 N 中的元素是有序实数对 (x, y) , 所以集合 $\{x | x \in M \text{ 且 } x \in N\}$ 中的元素是 $(3, -1)$.

例 3 已知集合 $A=\{x | ax^2+2x+1=0, a \in \mathbf{R}\}$,

- (1) 若 A 中只有一个元素, 求 a 的值;
- (2) 若 A 中至多有一个元素, 求 a 的取值范围;
- (3) 若 A 中至少有一个元素, 求 a 的取值范围.

分析 本题是对集合 A 中元素个数的讨论, 实际上是讨论方程 $ax^2+2x+1=0$ 的实根的个数, 从而求出 a 的取值范围.

解 (1) 当 $a=0$ 时, 原方程变为 $2x+1=0$, 此时 $x=-\frac{1}{2}$, 符合题意;

当 $a \neq 0$ 时, 方程 $ax^2+2x+1=0$ 为一元二次方程, $\Delta=4-4a=0$, 即 $a=1$ 时, 原方程的解为 $x=-1$, 符合题意.

所以 $a=0$ 或 $a=1$ 时,原方程只有一个解,此时 A 中只有一个元素.

(2) A 中至多有一个元素,即 A 中有一个元素或 A 中没有元素.

①当 $\Delta=4-4a<0$,即 $a>1$ 时,原方程无实数解.

②由(1)知,当 $a=0$ 或 $a=1$ 时, A 中只有一个元素.

$\therefore$ 由①,②可知,当 $a=0$ 或 $a\geq 1$ 时,集合 A 中至多有一个元素.

(3) A 中至少有一个元素,即 A 中有一个或两个元素:

①由 $\Delta=4-4a>0$,即 $a<1$ 时,方程有两个不等实根,故集合 A 中有两个元素.②由

(1)知,当 $a=0$ 或 $a=1$ 时, A 中只有一个元素.

$\therefore$ 由①,②可知,当 $a\leq 1$ 时,集合 A 中至少有一个元素.

例 5 ①本题中“ $a=0$ ”这一条件易被忽视,对于方程 $ax^2+2x+1=0$ 有两种情况,当 $a=0$ 时变为一次方程,当 $a\neq 0$ 时,它才是二次方程.

②本题中渗透着分类讨论的数学思想,对二次项系数的讨论在中学数学中尤为重要.

高考链接

例 6 (2005 年北京高考题) 设全集 $U=\mathbf{R}$, 集合 $M=\{x|x>1\}$, $P=\{x|x^2>1\}$ 则下列关系中正确的是()

- A. $M=P$ B. $P\subsetneq M$ C. $M\subsetneq P$ D. $C_U M \cap P=\emptyset$

例 6 先化简集合 P , 再数形结合便可直观地得到答案.

例 6 $\because P=\{x|x^2>1\}=\{x|x<-1 \text{ 或 } x>1\}$

又 $\because M=\{x|x>1\}$

$\therefore$ 由数轴上表示集合 M 、 P , 直观地得到答案是 C.

例 6 本小题考查简单不等式的解法和集合之间的关系, 属容易题.

例 6 (2005 年天津文) 集合 $A=\{x|0\leq x<3 \text{ 且 } x\in\mathbf{N}\}$ 的真子集的个数是()

- A. 16 B. 8 C. 7 D. 4

例 6 本题关键是把描述法表示的集合 A 转译为列举法表示, 再利用真子集性质可解.

例 6 $\because A=\{x|0\leq x<3 \text{ 且 } x\in\mathbf{N}\}=\{0,1,2\}$

$\therefore A$ 中的真子集个数为 $2^3-1=7$

故选择 C.

例 6 本题考查集合的表示法, 自然数的概念和真子集的概念, 属容易题.

例 8 (2005 年湖北理) 设 P 、 Q 为两个非空实数集合, 定义 $P+Q=\{a+b|a\in P, b\in Q\}$, 若 $P=\{0,2,5\}$, $Q=\{1,2,6\}$, 则 $P+Q$ 中元素的个数是()

- A. 9 B. 8 C. 7 D. 6

题解 本题是定义集合的新运算,主要考查学生应用集合知识对新运算的理解.

题解 $\because P+Q=\{a+b|a\in P, b\in Q\}$

$\therefore P+Q$ 的元素是 $a+b$, 且 a 是 P 中元素, b 是 Q 中的元素, 实际上即求在集合 P, Q 中各取一个元素的和所构成的集合的元素个数.

故 $P+Q=\{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 11\}$

$\therefore$ 应选 B.

评注 本题主要考查学生阅读理解能力和应变能力, 属考学生能力型试题, 充分体现了“突出考查能力与素质的导向”.

拓展篇

一、能力提升

例 9 设 $a, b \in \mathbb{Z}, E = \{(x, y) | (x-a)^2 + 3b \leq 6\}$, 点 $(2, 1) \in E$, 但点 $(1, 0) \notin E$, 点 $(3, 2) \notin E$, 求 a, b 的值.

题解 根据元素与集合的关系, 建立不等式组, 再结合 $a, b \in \mathbb{Z}$, 从而使问题获解.

题解 $\because$ 点 $(2, 1) \in E$, 点 $(1, 0) \notin E$, 点 $(3, 2) \notin E$

$$\therefore \begin{cases} (2-a)^2 + 3b \leq 6 & (1) \\ (1-a)^2 + 3b > 0 & (2) \\ (3-a)^2 + 3b > 12 & (3) \end{cases}$$

由 (1), (2) 得: $(2-a)^2 - (1-a)^2 < 6$, 解得 $a > -\frac{3}{2}$;

由 (1), (3) 得: $(2-a)^2 - (3-a)^2 < -6$, 解得 $a < -\frac{1}{2}$.

$$\therefore -\frac{3}{2} < a < -\frac{1}{2}.$$

又 $\because a \in \mathbb{Z}$, $\therefore a = -1$ 代入 (1), (2),

$$\text{得} \begin{cases} b \leq -1, \\ b > -\frac{4}{3}. \end{cases} \text{ 又 } b \in \mathbb{Z}, \therefore b = -1.$$

故 a, b 的值为 $a = -1, b = -1$.

题解 本题关键是由点 $(1, 0) \notin E$, 点 $(3, 2) \notin E$ 挖掘出不等式 $(1-a)^2 + 3b > 0$ 和 $(3-a)^2 + 3b > 12$.

例 10 已知集合 $A = \{x | 0 < ax + 1 \leq 5\}$, $B = \{x | -\frac{1}{2} < x \leq 2\}$

(1) 若 $A \subseteq B$, 求实数 a 的取值范围;