教育科学"十五"国家规划课题研究成果

高等学校经济管理学科数学基础系列辅导书

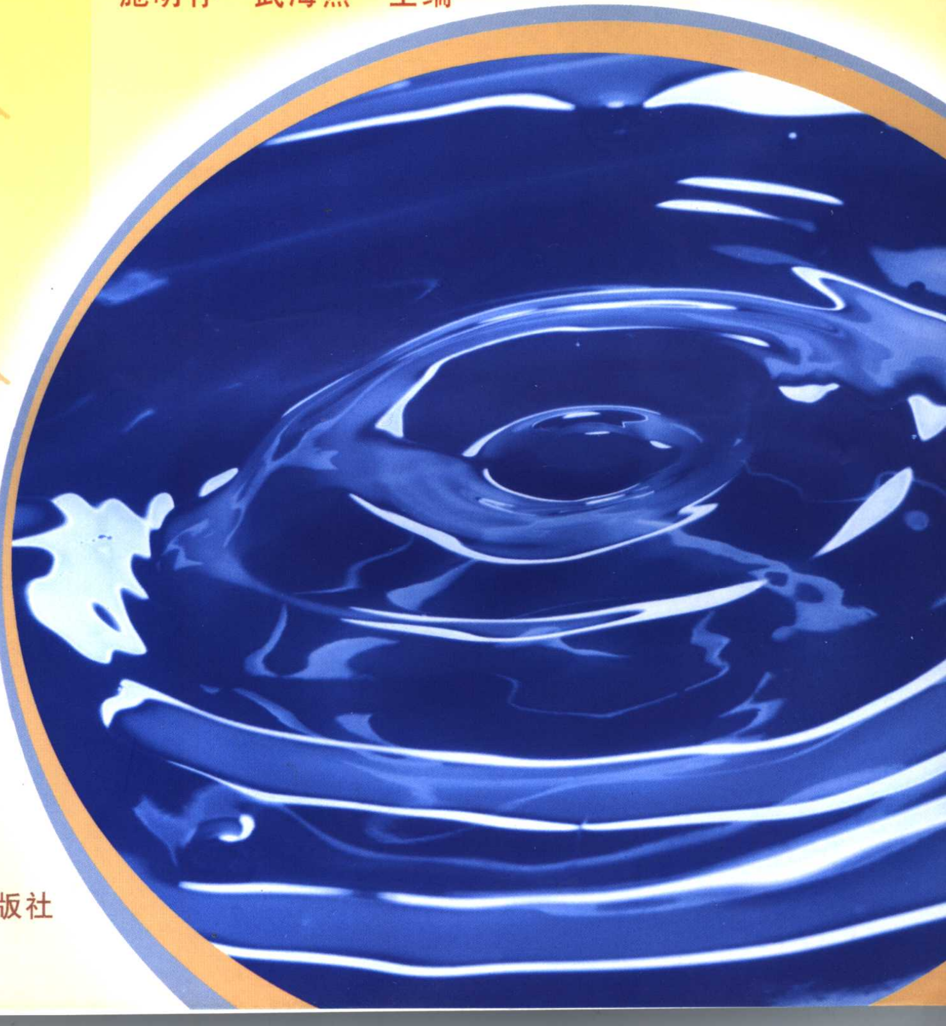
●总主编 陈文灯 杜之韩

微积分

Calculus

同步辅导

施明存　武海燕　主编



高等教育出版社

教育科学"十五"国家规划课题研究成果

高等学校经济管理学科数学基础系列辅导书

总主编　陈文灯　杜之韩

微积分同步辅导

施明存　武海燕　主编

高等教育出版社

内容提要

本书是与陈文灯、杜之韩总主编的高等学校经济管理学科数学基础系列教材《微积分》(上、下册)(教育科学“十五”国家规划课题研究成果)相配套的教学参考书。与主教材章节一致，共有九章内容：函数、极限与连续，一元函数的导数与微分，微分中值定理与导数的应用，不定积分，定积分，多元函数微积分学，微分方程与差分方程，无穷级数，微积分在经济中的应用。每章内容包括重要概念、定理及公式，典型题型讲解与训练和考研试题精选三部分，紧扣研究生入学考试大纲，使学生在掌握基础知识的同时，提高应用能力。

本书可作为高等学校经济管理类专业教学辅导书，也是有志考研学生的一本非常好的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

微积分同步辅导/施明存，武海燕主编．—北京：高等教育出版社，2007.7

ISBN 978-7-04-021932-6

Ⅰ.微…　Ⅱ.①施…②武…　Ⅲ.微积分-高等学校-教学参考资料　Ⅳ.O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 088567 号

策划编辑 马　丽　**责任编辑** 李华英　**封面设计** 张申申　**责任绘图** 尹文军
版式设计 王艳红　**责任校对** 杨凤玲　**责任印制** 陈伟光

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	涿州市京南印刷厂	畅想教育	http://www.widedu.com
开　　本	787×960　1/16	版　　次	2007 年 7 月第 1 版
印　　张	20.25	印　　次	2007 年 7 月第 1 次印刷
字　　数	370 000	定　　价	21.40 元

物料号　21932-00

前　　言

本书是与陈文灯、杜之韩总主编的高等学校经济管理学科数学基础系列教材《微积分》(上、下册)(教育科学“十五”国家规划课题研究成果)相配套的教学参考书。同学们在学习微积分时往往由于没有深入地理解相关概念、定理的内涵和外延，所以对基本概念和基本理论理解得不是那么深透，且因为学时和教材的篇幅的限制，不能那么详尽地进行讲解，例题也偏少，所以就更加深了同学们把理论应用于实际的困难。为此，我们在多年一线教学经验和考研辅导培训的基础上，编写了这本教学辅导书，帮助同学们学好、学透、学深微积分。

本书紧扣《微积分》教材，按教材章节顺序编排，共分九章，特点如下：

一、对基本概念、基本理论进行剖析，并通过例题对重要概念、定理和公式加以强化讲解，使同学们吃透其中的精髓。

二、列举了很多比较新颖的例子来说明解题的方法和技巧，以打开同学们的思路和眼界。

三、在每个章节之后，编排了具有启发意义的综合题，帮助同学们把各个知识点串联起来，使知识学得更活、更扎实。

四、我们在练习题中选录了与考研相关的试题，可以使学生在刚接触微积分时，就对考研数学有所了解，一方面培养他们对数学的兴趣，另一方面又可以激励他们的创造性。

五、每个题型之后，编排了“活学活用”栏目，可以通过练习对所学方法及时消化吸收，巩固所学。

本书适用于本科阶段同步学习和考研备考学生的复习。

本书成书仓促，错误和疏漏之处在所难免，恳请数学同仁和读者予以指正。

编者

2007年3月

目　　录

第一章

函数、极限与连续

§1.1 重要概念、定理及公式

一、函数的定义

设 x 和 y 是两个变量，D 是实数集 $\mathbf{R}$ 的非空子集. 若对任意的 $x\in D$，变量 y 按照对应法则 f 总有唯一确定的实数值 $f(x)$ 和它对应，则称对应法则 f 为定义在 D 上的一个函数. 通常记作

$$y=f(x),\quad x\in D,$$

其中 x 为自变量，y 为因变量，D 称为函数的定义域. 全体函数值的集合 $Z=\{y\mid y=f(x),x\in D\}$ 称为函数的值域.

函数概念的两个要素

（1）定义域：自变量 x 的取值范围（若函数是用解析式表示的，则定义域是自变量所能取的使解析式有意义的一切实数的集合）.

（2）对应法则：给定 x 值，求 y 值的方法.

【注】 当且仅当其定义域和对应法则完全相同时，两个函数才表示同一个函数（或称两个函数等价），否则表示两个不同的函数.

【例 1.1】 在下列各组函数中，找出两个函数等价的一组：

（1）$y=x^0$ 与 $y=1$； （2）$y=(\sqrt{x})^2$ 与 $y=\sqrt{x^2}$；

（3）$y=\dfrac{\sqrt[3]{x-1}}{x}$与 $y=\sqrt[3]{\dfrac{x-1}{x^3}}$； （4）$y=\dfrac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x-2}}$与 $y=\sqrt{\dfrac{x-3}{x-2}}$.

【解】 （1）$y=x^0$ 的定义域为 $\{x\mid x\neq 0\}$；$y=1$ 的定义域为实数集 $\mathbf{R}$，故该组的两个函数不等价.

（2）$y=(\sqrt{x})^2$ 的定义域为 $\{x\mid x\geqslant 0\}$；$y=\sqrt{x^2}$的定义域为实数集 $\mathbf{R}$，故该组的两个函数不等价.

（3）两个函数的定义域均为 $\{x\mid x\neq 0\}$，且对应法则相同，故该组的两个

函数等价.

（4）要使 $y=\dfrac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x-2}}$ 有意义，则要求 $\begin{cases}x-3\geqslant 0\\x-2>0\end{cases}$，即定义域为 $\{x\mid x\geqslant 3\}$；要使 $y=\sqrt{\dfrac{x-3}{x-2}}$ 有意义，则要求 $\begin{cases}\dfrac{x-3}{x-2}\geqslant 0\\x-2\neq 0\end{cases}$，即定义域为 $\{x\mid x\geqslant 3 \text{ 或 } x<2\}$，故该组的两个函数不等价.

【注】　由函数概念的两个要素，我们还容易看出，函数的表示法只与定义域和对应法则有关，而与用什么字母表示变量无关，这被称为**函数表示法的"无关特性"**. 据此，可得出由 $f(g(x))$ 的表达式求解 $f(x)$ 表达式的有效方法.

【例 1.2】　设 $f(x)+f\left(\dfrac{x-1}{x}\right)=2x$，其中 $x\neq 0$ 且 $x\neq 1$，求 $f(x)$.

【解】　利用函数表示法的"无关特性"，令 $t=\dfrac{x-1}{x}$，即 $x=\dfrac{1}{1-t}$，代入原方程得

$$f\left(\frac{1}{1-t}\right)+f(t)=\frac{2}{1-t},\text{ 即 } f\left(\frac{1}{1-x}\right)+f(x)=\frac{2}{1-x}, \qquad ①$$

再令 $\dfrac{1}{1-x}=\dfrac{u-1}{u}$，即 $x=\dfrac{1}{1-u}$，代入上式，得

$$f\left(\frac{u-1}{u}\right)+f\left(\frac{1}{1-u}\right)=\frac{2(u-1)}{u},\text{ 即 } f\left(\frac{x-1}{x}\right)+f\left(\frac{1}{1-x}\right)=\frac{2(x-1)}{x}, \qquad ②$$

将原方程与方程①、②联立，解此方程组，得

$$f(x)=x+\frac{1}{x}+\frac{1}{1-x}-1.$$

二、函数的几何特性

1. 奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，若对任意 $x\in D$，有

$$f(-x)=f(x)\ (\text{或 } f(-x)=-f(x)),$$

则称函数 $f(x)$ 为关于自变量 x 的偶函数（或奇函数）.

偶函数 $f(x)$ 的图像关于 y 轴对称；奇函数 $f(x)$ 的图像关于原点对称.

奇偶函数的运算性质

（1）奇函数的代数和仍为奇函数；偶函数的代数和仍为偶函数.

（2）偶数个奇（或任意多个偶）函数之积为偶函数；奇数个奇函数之积为奇函数.

（3）一个奇函数与一个偶函数之积为奇函数.

常见的偶函数： $|x|$，$\cos x$，x^{2n}（n 为正整数），e^{x^2}，$\cdots$.

常见的奇函数：$\sin x$，$\tan x$，$\dfrac{1}{x}$，x^{2n+1}（n 为正整数），$\arcsin x$，$\arctan x$，$\cdots$.

2. 周期性

设函数 $f(x)$ 的定义域为数集 D，若存在一个与 x 无关的正数 T，使得对任意 $x\in D$，$x+T\in D$，恒有

$$f(x+T)=f(x),$$

则称 $f(x)$ 是以 T 为周期的周期函数，满足上式的最小正数 T 称为函数 $f(x)$ 的最小正周期，简称周期.

周期函数的运算性质

(1) 若 T 是 $f(x)$ 的周期，则 $f(ax+b)$ 的周期为 $\dfrac{T}{|a|}$.

(2) 若 $f(x)$，$g(x)$ 均是以 T 为周期的周期函数，则 $f(x)\pm g(x)$ 也是以 T 为周期的周期函数.

(3) 若 $f(x)$，$g(x)$ 分别是以 $T_1, T_2\ (T_1\neq T_2)$ 为周期的周期函数，则 $f(x)\pm g(x)$ 是以 T_1，T_2 的最小公倍数为周期的周期函数.

常见的周期函数：$\sin x$，$\cos x$，其周期 $T=2\pi$；

$\tan x$，$\cot x$，$|\sin x|$，$|\cos x|$，其周期 $T=\pi$.

【例 1.3】 求 $f(x)=x-[x]$ 的最小正周期.

【解】 设 $x=n+r$，m 为正整数，则

$$\begin{aligned}f(x+m)&=f(m+n+r)=m+n+r-[m+n+r]\\&=m+n+r-m-[n+r]=n+r-[n+r]=f(x),\end{aligned}$$

故一切正整数 m 都是 $f(x)$ 的周期，而最小正周期为 1.

【注】 周期函数并不一定有最小正周期，如狄利克雷函数，任意正有理数都是该函数的周期，所以它不存在最小正周期.

3. 有界性

设函数 $f(x)$ 在数集 D 上有定义，若存在 $M>0$，使得对任意 $x\in D$，恒有

$$|f(x)|\leqslant M,$$

则称 $f(x)$ 在 D 上有界，数 M 称为 $f(x)$ 的一个界；若不存在这样的正数 M，则称 $f(x)$ 在 D 上无界.

若存在 $M_1>0$，对任意 $x\in D$，恒有 $f(x)\leqslant M_1$，则称函数 $f(x)$ 在 D 上有上界，而 M_1 称为函数 $f(x)$ 在 D 上的一个上界；

若存在 $M_2>0$，对任意 $x\in D$，恒有 $f(x)\geqslant M_2$，则称函数 $f(x)$ 在 D 上有下界，而 M_2 称为函数 $f(x)$ 在 D 上的一个下界.

【注】 函数 $f(x)$ 是否有界是相对于某个区间而言的，是局部概念.

六个常见的有界函数

$$|\sin x| \leqslant 1,\quad |\cos x| \leqslant 1,\quad x \in (-\infty, +\infty);$$
$$|\arcsin x| \leqslant \pi/2,\quad |\arccos x| \leqslant \pi,\quad x \in [-1, 1];$$
$$|\arctan x| < \pi/2,\quad |\operatorname{arccot} x| < \pi,\quad x \in (-\infty, +\infty).$$

【例 1.4】 函数$f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$在定义域内 ( ).

(A) 有上界无下界 (B) 有下界无上界

(C) 有界，且$|f(x)| \leqslant \dfrac{1}{2}$ (D) 有界，且$|f(x)| \leqslant 2$

【解】 $|f(x)|=\dfrac{|x|}{1+x^2} \leqslant \dfrac{|x|}{2|x|}=\dfrac{1}{2}$（因为$1+x^2 \geqslant 2|x|$），故选(C).

4. 单调性

设函数$f(x)$在区间X上有定义，若对任意x_1，$x_2 \in X$，当$x_1<x_2$时，恒有

$$f(x_1)<f(x_2)\ (\text{或} f(x_1)>f(x_2)),$$

则称函数$f(x)$在区间X上是单调增加(或单调减少)的.

【例 1.5】 设$f(x)$在区间$(0,+\infty)$上有定义，$x_1>0$，$x_2>0$，求证：

(1) 若$\dfrac{f(x)}{x}$单调减少，则$f(x_1+x_2) \leqslant f(x_1)+f(x_2)$；

(2) 若$\dfrac{f(x)}{x}$单调上升，则$f(x_1+x_2) \geqslant f(x_1)+f(x_2)$.

【证】 (1) 设$x_1>0$，$x_2>0$，且$x_1<x_2$，于是

$$\frac{f(x_1)}{x_1} \geqslant \frac{f(x_2)}{x_2} \quad \Rightarrow \quad x_1 f(x_2) \leqslant x_2 f(x_1),$$

$$\frac{f(x_1+x_2)}{x_1+x_2} \leqslant \frac{f(x_2)}{x_2} \quad \Rightarrow \quad x_2 f(x_1+x_2) \leqslant x_1 f(x_2)+x_2 f(x_2),$$

从而

$$x_2 f(x_1+x_2) \leqslant x_2 f(x_1)+x_2 f(x_2),$$

故

$$f(x_1+x_2) \leqslant f(x_1)+f(x_2).$$

(2) 同(1)，略.

三、分段函数

用解析法表示的函数，若在其定义域D的各个不相交的子集上，分别用不同的式子表示，则该函数称为分段函数.

常见的分段函数

(1) 符号函数

$$y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0.\\ -1, & x<0\end{cases}$$

（2）狄利克雷（Dirichlet）函数

$$y=f(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbf{Q}\\ 0, & x\in\mathbf{Q}^{c}.\end{cases}$$

【注】 一般地，分段函数不是初等函数.

【例 1.6】 将 $f(x)=|2x-3|-1$ 表示成分段函数.

【解】 根据绝对值的定义，当 $2x-3\geqslant 0$ 时，

$$f(x)=|2x-3|-1=2x-3-1=2x-4;$$

当 $2x-3<0$ 时，

$$f(x)=|2x-3|-1=3-2x-1=2-2x.$$

故

$$y=f(x)=\begin{cases}2x-4, & x\geqslant\dfrac{3}{2}\\ 2-2x, & x<\dfrac{3}{2}\end{cases}.$$

四、反函数与复合函数

1. 反函数

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，值域为 Z，若对任意 $y\in Z$，有唯一确定的 $x\in D$ 满足 $y=f(x)$，则称 x 是定义在 Z 上以 y 为自变量的函数，记为

$$x=f^{-1}(y)\quad(\text{或 } x=\varphi(y)),$$

并称 $x=f^{-1}(y)$ 是 $y=f(x)$ 的反函数，而 $y=f(x)$ 是 $x=f^{-1}(y)$ 的直接函数. 习惯上 $y=f(x)$ 的反函数记作 $y=f^{-1}(x)$，$x\in Z$.

【注】 ① $y=f(x)$ 的图像与其反函数 $x=f^{-1}(y)$ 的图像重合，而 $y=f(x)$ 的图像与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称；

② $y=f(x)$ 的定义域是其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的值域；

③ 只有自变量与因变量一一对应的函数才有反函数；

④ $y=f(f^{-1}(y))$，$x=f^{-1}(f(x))$.

2. 复合函数

设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_f，而函数 $u=\varphi(x)$ 的值域为 Z_φ，若 $D_f\cap Z_\varphi\neq\varnothing$，则称函数 $y=f(\varphi(x))$ 为由 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 复合而成的复合函数，其中 x 为自变量，u 为中间变量，y 为因变量.

【例 1.7】 已知 $f(x)=\mathrm{e}^{x^2}$，$f(\varphi(x))=x+1$，且 $\varphi(x)\geqslant 0$，求 $\varphi(x)$ 及其定义域.

【解】 $f(\varphi(x))=\mathrm{e}^{\varphi^2(x)}=x+1$，因 $\varphi(x)\geqslant 0$，所以 $\varphi(x)=\sqrt{\ln(x+1)}$.

由 $\ln(x+1)\geqslant 0$ 可知，$x+1\geqslant 1$，即 $x\geqslant 0$，所以 $\varphi(x)$ 的定义域为 $[0,+\infty)$.

五、初等函数

1. 基本初等函数

常数函数 $y=C$（C 为常数）；

幂函数 $y=x^{\mu}$（$\mu\in\mathbf{R}$ 是常数）；

指数函数 $y=a^{x}$（$a>0$ 且 $a\neq 1$）；

对数函数 $y=\log_a x$（$a>0$ 且 $a\neq 1$）；

三角函数 $y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$ 等；

反三角函数 $y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\arctan x$ 等.

以上六类函数统称为基本初等函数.

2. 初等函数

由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的复合步骤所构成并可用一个式子表示的函数称为初等函数.

若 $f(x)$，$g(x)$ 都是初等函数，则 $f(x)^{g(x)}$ 称为幂指函数. 幂指函数可以通过对数恒等式写成如下形式：

$$f(x)^{g(x)}=e^{g(x)\ln f(x)}.$$

【例 1.8】 将函数 $y=\arcsin^2\dfrac{2x}{1+x^2}$ 分解成由基本初等函数复合及四则运算而成的形式.

【解】 令 $u=\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}$，则 $y=u^2$. 令 $v=\dfrac{2x}{1+x^2}$，则 $u=\arcsin v$.

于是函数由下列各式构成：$y=u^2$，$u=\arcsin v$，$v=\dfrac{2x}{1+x^2}$.

六、极限与连续基本概念

1. 数列极限

$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a \Leftrightarrow$ 对于任意 $\varepsilon>0$，总存在 $N\in\mathbf{Z}^+$，使得当 $n>N$ 时，恒有 $|x_n-a|<\varepsilon$.

2. 函数极限

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A \Leftrightarrow$ 对于任意 $\varepsilon>0$，总存在 $\delta>0$，使得当 x 满足不等式 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 成立.

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A \Leftrightarrow$ 对于任意 $\varepsilon>0$，总存在正数 X，使得当 x 满足不等式 $|x|>X$ 时，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 成立.

3. 左、右极限

左极限：$f_-(x_0)=f(x_0-0)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A \Leftrightarrow$ 对于任意 $\varepsilon>0$，总存在 $\delta>0$，使得当 x 满足不等式 $0<x_0-x<\delta$ 时，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 成立.

右极限：$f_+(x_0)=f(x_0+0)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A \Leftrightarrow$ 对于任意 $\varepsilon>0$，总存在 $\delta>0$，使得当 x 满足不等式 $0<x-x_0<\delta$ 时，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 成立.

4. 无穷小量

以零为极限的变量称为无穷小量.

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0 \Leftrightarrow$ 对于任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，恒有 $|f(x)|<\varepsilon$.

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0 \Leftrightarrow$ 对于任意 $\varepsilon>0$，存在 $X>0$，当 $|x|>X$ 时，恒有 $|f(x)|<\varepsilon$.

5. 无穷大量（实际上是极限不存在的一种形式）

在自变量的某一变化过程中，若函数 $f(x)$ 的绝对值无限增大，则称函数 $f(x)$ 为这一变化过程中的无穷大量.

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty \Leftrightarrow$ 对于任意 $M>0$，存在 $\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，恒有 $|f(x)|>M$.

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty \Leftrightarrow$ 对于任意 $M>0$，存在 $X>0$，当 $|x|>X$ 时，恒有 $|f(x)|>M$.

无界变量和无穷大量的区别

无穷大量一定是无界变量，但无界变量不一定是无穷大量.

如数列 $\{a_n\}$：0，2，0，4，0，6，0，8，…是无界变量，但不是无穷大量.

又如 $f(x)=x\sin x$ 是无界变量，但不是无穷大量. 因为取 $x=x_n=2n\pi+\dfrac{\pi}{2}$ 时，$f(x_n)=2n\pi+\dfrac{\pi}{2}$，当 n 充分大时，$f(x_n)$ 可以大于一个预先给定的正数 M，由此可见 $f(x)$ 是无界变量；而取 $x=x_n=2n\pi$ 时，$f(x_n)=0$，由此可见，$f(x)$ 不是无穷大量.

6. 无穷小量的比较

设在自变量的同一变化趋势下，$\lim\alpha(x)=\lim\beta(x)=0$.

（1）若 $\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$，则称 $\alpha(x)$ 是比 $\beta(x)$ 高阶的无穷小，记为 $\alpha(x)=o(\beta(x))$.

（2）若 $\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\infty$，则称 $\alpha(x)$ 是比 $\beta(x)$ 低阶的无穷小.

（3）若 $\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=C(C\neq0)$，则称 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是同阶无穷小，记为 $\alpha(x)=O(\beta(x))$；当 $C=1$ 时，称 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是等价无穷小量，记为 $\alpha(x)\sim\beta(x)$.

(4) 若 $\lim \dfrac{\alpha(x)}{\beta^k(x)} = C(C \neq 0)$，则称 $\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的 k 阶无穷小.

常见的等价无穷小量

当 $x \to 0$ 时，$\sin x \sim x \sim \tan x \sim \ln(1+x) \sim e^x - 1$，

$$1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2,\ (1+x)^m \sim 1 + \frac{1}{m}x.$$

7. 函数连续性的概念

定义 1 设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内有定义，给 x 在 x_0 处以增量 Δx，相应地得到函数增量 $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$，若极限 $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$，则称 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处连续.

定义 2 设函数 $f(x)$ 满足以下条件：

(1) 函数 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内有定义；

(2) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 存在；

(3) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

则称 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处连续.

【注】 ① 定义 1 和定义 2 等价；

② 初等函数在其定义域的区间内连续；

③ 函数若在某点连续，则函数在该点必有定义，反之不成立.

定义 3(左连续与右连续) 设函数 $f(x)$ 在 x_0 点的左侧(右侧)邻域内(含点 x_0)有定义，且 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$(或 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$)，则称函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处**左连续**(或**右连续**).

定义 4 若函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内任一点均连续，则称 $f(x)$ 在 (a,b) 内连续.

定义 5 若函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内连续，且在 $x = a$ 处右连续($\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$)，在 $x = b$ 处左连续($\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = f(b)$)，则称 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续.

8. 间断点

定义 6 若函数 $f(x)$ 在 x_0 处出现如下三种情形之一：

(1) 函数 $f(x)$ 在 x_0 无定义；

(2) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 不存在；

(3) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$.

则称 $x = x_0$ 为函数 $f(x)$ 的间断点.

间断点的类型

第一类间断点：$x = x_0$ 为函数 $f(x)$ 的间断点，且 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ 与 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ 均存在，则称 $x = x_0$ 为函数 $f(x)$ 的第一类间断点. 其中

(1) 跳跃型间断点：$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$.

(2) 可去型间断点：$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)\neq f(x_0)$.

第二类间断点：$x=x_0$ 为函数$f(x)$的间断点，且 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$与 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$之中至少有一个不存在，则称 $x=x_0$ 为函数$f(x)$的第二类间断点. 其中

(1) 无穷型间断点：$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$与 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$至少有一个为$\infty$.

(2) 振荡型间断点：$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$为振荡型，极限不存在.

【例 1.9】 求函数$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{n+2}-x^{-n}}{x^n+x^{-n-1}}$的间断点，并判断其类型.

【解】 显然，$x\neq0$，$x\neq-1$.

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{n+2}-x^{-n}}{x^n+x^{-n-1}}=\begin{cases}-x, & |x|<1\\ x^2, & |x|>1,\\ 0, & x=1\end{cases}$$

因为$f(0-0)=f(0+0)=0$；$f(1-0)=-1$，$f(1+0)=1$；$f(-1-0)=f(-1+0)$，但$f(-1)$不存在. 所以 $x=0$，$x=-1$ 是可去型间断点；$x=1$ 为跳跃型间断点.

【例 1.10】 求函数$f(x)=\lim\limits_{t\to x}\left(\dfrac{\sin t}{\sin x}\right)^{\frac{x}{\sin t-\sin x}}$的间断点并指出其类型.

【解】 因为$f(x)=\lim\limits_{t\to x}\left(\dfrac{\sin t}{\sin x}\right)^{\frac{x}{\sin t-\sin x}}=e^{\lim\limits_{t\to x}\frac{x}{\sin t-\sin x}\left(\frac{\sin t}{\sin x}-1\right)}=e^{\frac{x}{\sin x}}$,所以$f(x)$的间断点为 $x=0$ 及 $x=k\pi(k=\pm1,\pm2,\cdots)$.

由于 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}e^{\frac{x}{\sin x}}=e$，$\lim\limits_{x\to k\pi^-}f(x)$与 $\lim\limits_{x\to k\pi^+}f(x)$有一个为$\infty$（$k=\pm1,\pm2,\cdots$），所以$x=0$ 是$f(x)$的可去型间断点；$x=k\pi(k=\pm1,\pm2,\cdots)$是$f(x)$的无穷型间断点.

七、极限与连续重要定理

定理 1 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$.

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$.

【例 1.11】 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$.

【解】 (1) 由 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}=\lim\limits_{x\to0^+}x\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}=0$；

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}=\lim_{x\to 0^-}x\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}=\frac{0}{1+0}=0$$

得 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}=0$.

(2) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}=-1$;

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\lim_{x\to +\infty}\frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}=1.$$

故 $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$不存在.

定理 2 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow f(x)=A+\alpha(x)$，其中 $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$.

【例 1.12】 设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{f(x)}{x}\right)}{e^x-1}=A$，求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}$.

【解】 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{f(x)}{x}\right)}{e^x-1}=A\Leftrightarrow\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{f(x)}{x}\right)}{e^x-1}=A+\alpha(x)$，且 $\lim\limits_{x\to 0}\alpha(x)=0$. 又因为 $e^x-1\sim x(x\to 0)$，所以

$$\ln\left(1+\frac{f(x)}{x}\right)\sim Ax+\alpha(x)x\quad(x\to 0).$$

所以$\dfrac{f(x)}{x}\sim Ax$. 故 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{Ax}{x}=A$.

定理 3(保号性定理) 如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，而且 $A>0$(或 $A<0$)，那么存在常数 $\delta>0$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $f(x)>0$(或 $f(x)<0$)；

如果 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$，而且 $A>0$(或 $A<0$)，那么存在常数 $X>0$，使得当 $|x|>X$ 时，有 $f(x)>0$(或 $f(x)<0$).

推论 如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，$f(x)>0$(或 $f(x)<0$)，则 $A\geqslant 0$(或 $A\leqslant 0$).

定理 4 初等函数在其定义域内的区间内连续，基本初等函数在其定义域内连续.

推论 设函数 $f(x)$ 在 x_0 处连续，则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(\lim\limits_{x\to x_0}x)=f(x_0)$. 若没有说明 $f(x)$ 在 x_0 处连续，则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq f(\lim\limits_{x\to x_0}x)$，即极限符号和函数符号不能交换顺序.

定理 5 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $|f(x)|$ 在 $[a,b]$ 上连续.

定理 6(单调有界准则) 单增有上界或单减有下界数列必有极限.

定理 7(夹逼准则) 设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a$，且有 $x_n\leqslant y_n\leqslant z_n(n=1,2,3,\cdots)$，

则数列$\{y_n\}$收敛，且$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$.

【例 1.13】 求$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+n+1}+\dfrac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n+n}\right)$.

【解】 记$I=\dfrac{1}{n^2+n+1}+\dfrac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n+n}$，则

$$\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+n}\leqslant I\leqslant\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+1},$$

即

$$\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+n+n}\leqslant I\leqslant\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+n+1},$$

而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+n+n}=\frac{1}{2},\quad \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+n+1}=\frac{1}{2},$$

故

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}\right)=\frac{1}{2}.$$

定理 8（夹逼定理） 如果$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=a$，且在$x_0$的邻域内恒有

$$f(x)\leqslant\varphi(x)\leqslant g(x),$$

则$\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=a$.

定理 9（无穷小量的运算性质）

（1）有界函数与无穷小的乘积是无穷小.

如：$\lim\limits_{n\to\infty}\sin\sqrt{n^2+1}\,\pi=\lim\limits_{n\to\infty}\sin[(\sqrt{n^2+1}-n)\pi+n\pi]$

$$=(-1)^n\lim_{n\to\infty}\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n},$$

显然，$\lim\limits_{n\to\infty}\sin\dfrac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}=0$，$|(-1)^n|\leqslant 1$，所以$\lim\limits_{n\to\infty}\sin\sqrt{n^2+1}\,\pi=0$.

（2）常数与无穷小的乘积是无穷小.

（3）有限个无穷小的和是无穷小.

（4）有限个无穷小的乘积是无穷小.

【例 1.14】 求$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-2x+5}{3x^5+2x+3}(2+\cos x-3\sin x)$.

【解】 因为$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-2x+5}{3x^5+2x+3}=0$，$|2+\cos x-3\sin x|<6$，所以