教研教改实验教材

mathematics

数学 上

mathematics

黄 莉 主编
陈洪星 主审

Hunan Science & Technology Press

湖南科学技术出版社

● 教研教改实验教材

mathematics

数学 上

黄　莉 主编　　陈洪星 主审

Hunan
Science
&
Technology
Press

湖南科学技术出版社

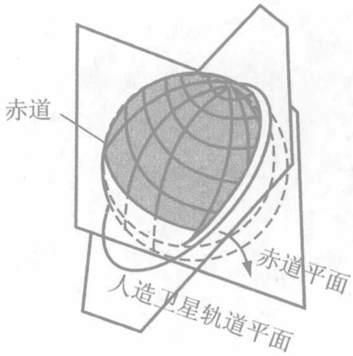
图书在版编目（CIP）数据

数学/黄莉主编. 一长沙：湖南科学技术出版社，
2007.8
教研教改实验教材
ISBN 978-7-5357-5032-7

Ⅰ. 数... Ⅱ. 黄... Ⅲ. 高等数学一高等学校：技术学校一
Ⅳ. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 133671 号

教研教改实验教材
数　学 上册
主　　编：黄　莉
主　　审：陈洪星
责任编辑：吴新霞
出版发行：湖南科学技术出版社
社　　址：长沙市湘雅路 276 号
http://www.hnstp.com
印　　刷：长沙瑞和印务有限公司
（印装质量问题请直接与本厂联系）
厂　　址：长沙市井湾路 4 号
邮　　编：410004
出版日期：2007 年 8 月第 1 版第 1 次
开　　本：787mm×1092mm　1/16
印　　张：7.5
字　　数：179000
书　　号：ISBN 978-7-5357-5032-7
上下册套价：33.00 元



前言

本套数学教材是为中等职业技术学校机电类专业学生编写的．和以往教材不同的是，本教材根据国家中等职业技术学校人才培养的新要求，针对中等职业学校学生技术的特点，突出对学生的技能培养．通过作者多年来职业技术教育教学实践的总结，针对学生的兴趣和学习能力，在教材的编排和内容上进行了改革和创新．

职业教育进入了一个快速发展的关键时期．职业院校传统的以自我为中心、“闭门造车”式的教学模式与现代企业的发展渐行渐远．如何从满足企业需求和生源市场需求出发，以岗位能力需求确定学生知识结构体系，以学生知识结构体系完整决定课程内容的取舍，是职业教育急需解决的问题，也是本套教材编审人员的初衷．

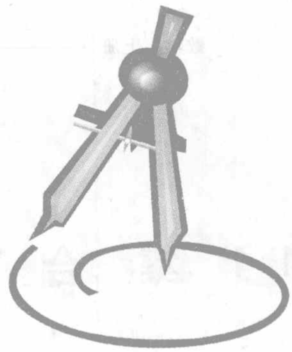
本教材一共 8 章．上册包括集合与函数、指数函数与对数函数、三角函数、复数 4 章；下册包括解析几何、立体几何、数列、排列组合和概率 4 章．两册内容涵盖了机电专业必备的数学知识，可以满足当前中职学生知识结构体系完整的要求，其中增列的“知识扩展”和加“*”号的部分还可以为学生今后继续学习打下基础．因机、电专业对数学知识需求不尽相同，在施教过程中，教师可根据实际对不同章节各有侧重．

本书由株洲技术学院黄莉主编，陈洪星主审．在教材编写过程中，得到了众多同行的指点和相关专业课教师的帮助，在此一并表示感谢．由于成书仓促，不足之处在所难免，欢迎专家和广大教师批评指正，以便进一步充实、完善．

2007 年 6 月

目录

4 复数



1

集合与函数

◎集合

◎函数的概念

◎函数的性质

◎反函数

◎不等式的解法

某学院先举行了一次计算机基础知识竞赛，某班有 5 名同学参加；又举行了一次数控技能竞赛，这个班有 8 名同学参加，那么两次活动共有多少名同学参赛？如果回答有 13 名同学，对吗？

世间万物，千变万化. 人们为了了解各种自然现象和社会现象，必须研究其变化规律. 而现实世界中许多量之间存在着依赖关系，一个量变化时，另一个量也随着变化. 你能举出实际的例子吗？

描述、解决上述问题，涉及我们将要学习的集合与函数的知识.

本章我们将学习集合用语，并用它准确理解和简洁表达数学的内容. 然后介绍函数的概念、表示方法及其性质，另外还要介绍一些常用的不等式的解法.

1.1 集 合

什么是“整体”？什么是“个体”？

生活中经常用到“整体”的概念：

(1) 由 1,2,3,4,5 这 5 个自然数组成一个整体；

(2) 所有的直角三角形组成一个整体；

(3) 王红同学和他的父母组成一个家庭；

(4) 一个班级的全体学生组成一个班集体.

这些都是一些对象的全体，即整体；这些对象分别具有某种特定的属性(如一些数、一些图形等)，即个体.

集合的概念

提示：由数构成的集合称为数集；由点构成的集合称为点集；由解构成的集合称为解集.

我们知道：世界上的一切事物都有一定的性质.按特性可将事物划分成不同的类，这种类就是所谓的集合.

集合：具有特定性质的一些事物的整体.构成集合的成员称为**元素**(个体).

如全体自然数构成一个集合.

直线 $y=2x$ 上的所有点构成一个集合.

在上述第(1)，第(3)例子中，集合是什么？元素是什么？

提示：一般用大写字母表示集合，小写字母表示元素.

集合与元素的关系

李华是我们班的同学，我们会说：李华是属于我们班的；而刘强不是我们班的同学，我们会说：刘强不属于我们班.

这里李华、刘强是个体(元素)，而我们班是整体(集合).

一般地，对于给定的集合 A，若 e 是集合 A 中的元素，就说 e 属于 A，记作 $e\in A$，“$\in$”读作“属于”.

若 e 不是集合 A 中的元素，就说 e 不属于 A，记作 $e\notin A$，“$\notin$”读作

“不属于”.

集合的表示

地球上有四大洋,你能表示由这些大洋组成的集合吗?

{太平洋,大西洋,印度洋,北冰洋}

一般地,对于有的集合,我们可以把它的元素一一写出来,彼此用逗号分开,并且放在一个大括号内,这种表示集合的方法称为**列举法**.

提示:加大括号的理由是,集合是一个整体.

如 1,2,3,4,5 这 5 个数组成的集合为$\{1,2,3,4,5\}$.

全体正偶数组成的集合为$\{2,4,6,8,\cdots\}$.

方程 $x^2-3x+2=0$ 的解组成的集合为$\{1,2\}$.

比-2大的实数组成的集合如何表示?用列举法行吗?如果不行,怎么办?

因为比-2大的实数有无穷多个,而且无法一一列出来,因此不能用列举法表示.克服困难的办法是,抓住这个集合的元素具有的特征:它们是实数,并且大于-2,于是我们可以把这个集合表示成:

$\{x \mid x>-2, x\in \mathbf{R}\}$.

其中大括号内竖线左边的 x 是这个集合的代表元素,竖线右边写的是这个集合的元素的特征性质.

指出集合的特征来表示集合,这种表示集合的方法称为**描述法**.记作$\{a \mid a$ 所具有的性质$\}$.

如不大于 5 的自然数构成的集合 $\{n \mid n\leqslant 5$ 且 $n\in \mathbf{N}\}$;

提示:可把集合中元素的公共属性直接写在大括号内.

方程 $x^2-3x+2=0$ 的解构成的集合:

$\{x \mid x^2-3x+2=0\}$或$\{$方程 $x^2-3x+2=0$ 的解$\}$;

直线 $y=2x$ 上所有点构成的集合:

$\{(x,y) \mid y=2x\}$或$\{$直线 $y=2x$ 上的点$\}$.

集合的特点

◆**无序性** 在集合中不考虑元素的排列顺序.

如$\{1,2,3,4,5\}$与$\{5,4,3,2,1\}$是同一个集合.

◆ **互异性** 一个元素在一个集合中不能重复出现.

如$\{1,2,3\}$不能写成$\{1,2,3,3\}$.

◆ **确定性** 组成集合的元素都是确定的.

任何一个元素或者是某一集合的元素，或者不是它的元素，都能准确判定. 如大个子的全体不构成集合.

集合的种类

你能表示由大于3的负整数组成的集合吗？

◆ **有限集** 构成集合的元素是有限的. 如$\{0,1,2,3,4\}$.

◆ **无限集** 构成集合的元素是无限的. 如{偶数}.

◆ **空集** 不含任何元素的集合，用$\varnothing$或$\{\ \}$表示.

如{大于3的负数}$=\varnothing$，$\{x|x^2+2x+3=0\}=\varnothing$.

另外，一些常用的数集都有特定的记号. 如

$\mathbf{N}$={自然数}，$\mathbf{Z}$={整数}，$\mathbf{Q}$={有理数}，$\mathbf{R}$={实数}.

提示：$\mathbf{N}^*$表示正整数；"$3\in\mathbf{N}$"表示3是自然数.

示例

【例】 用适当的方法表示下列集合：

(1) 所有5的整数倍的数；

(2) 大于0且不超过6的全体偶数；

(3) 某商场所有的彩色电视机；

(4) 直角坐标平面上第一象限内所有的点；

(5) 绝对值等于3的全体实数；

(6) 所有的矩形.

解 (1) 用描述法表示：$\{x|x=5n,n\in\mathbf{Z}\}$；

(2) 用列举法表示为：$\{2,4,6\}$；

(3) 用描述法表示为：{某商场的彩色电视机}；

(4) 用描述法表示为：$\{(x,y)|x>0$ 且 $y>0,x,y\in\mathbf{R}\}$；

(5) 用列举法表示为：$\{-3,3\}$；

(6) 用描述法表示为：{矩形}.

练一练

1. 用符号$\in$或$\notin$填空：

1 ____ $\mathbf{N}$， -2 ____ $\mathbf{N}$， -3 ____ $\mathbf{R}$， 0 ____ $\mathbf{Z}$，

-4 ____ $\mathbf{Z}$， π ____ $\mathbf{R}$， 1 ____ $\mathbf{Q}$， $\frac{1}{2}$ ____ $\mathbf{Q}$.

2.用适当方法表示下列集合，并指出它是有限集还是无限集.

(1) 一年中有 31 天的月份的集合；

(2) 方程 $x^2+3x-4=0$ 的解的集合；

(3) 大于 3 且小于 15 的所有 3 的倍数的数的集合；

(4) 正偶数的集合；

(5) 不等式 $x-1>2$ 的所有整数解的集合.

集合与集合的关系

下列两个集合有什么关系？

(1) $A=\{$某校所有的学生$\}$；

(2) $B=\{$该校钳工专业的学生$\}$.

显然，某校钳工专业的学生都是该校的学生. 即若 $x\in B$ 则 $x\in A$.

子集

一般地，如果集合 B 的每一个元素都是集合 A 的元素，那么 B 叫做 A 的一个**子集**，记作 $B\subseteq A$（或者 $A\supseteq B$).

读作"B 包含于 A"(或者"A 包含 B")，

即 $A\supseteq B$(若 $x\in B$ 则 $x\in A$).

B 不是 A 的子集，记作 $B\not\subseteq A$(存在 $x\in B$ 且 $x\notin A$)，读作"A 不包含 B".

> **提示：** 区分 $\in$ 和 $\subseteq$ 的不同含义. "$\in$"用在元素和集合之间，表示从属关系；"$\subseteq$"用在两集合之间，表示包含关系.

练一练

1.设 $A=\{2,3,4,6\}$，$B=\{3,6\}$，则____是____的子集，

记作____$\subseteq$____.

2.$A=\{6$ 的倍数$\}$，$B=\{2n\mid n\in\mathbf{N}\}$，则____是____的子集，

记作____$\subseteq$____.

3.用符号$\subseteq$或$\supseteq$填空：

$\mathbf{N}$ ____ $\mathbf{Q}$， $\mathbf{Z}$ ____ $\mathbf{N}$， $\mathbf{Q}$ ____ $\mathbf{R}$， $\mathbf{Z}^+$ ____ $\mathbf{N}$.

设 A 是任意一个集合，A 是 A 的子集吗？为什么？空集 $\varnothing$ 是 A 的子集吗？

对于任何一个集合 A，因为它的任何一个元素都属于集合本身，所以 $A \supseteq A$，即集合本身是自己的子集.

规定空集是任何集合的子集.

即对于任何一个集合 A，都有 $\varnothing \subseteq A$.

两集合相等：如果 $A \supseteq B$ 且 $B \supseteq A$，那么 $A=B$.

即 A 与 B 是由完全相同的元素组成，则称 $A=B$.

如 $A=\{0,1\}$，$B=\{x \mid x^2-x=0\}$，则 $A=B$.

设 $A=\{a,b\}$，你能写出 A 的所有子集吗？

请按照下列线索试写：

(1) $\varnothing$ 是 A 的子集吗？

(2) 含一个元素的子集有哪些？

(3) 含两个元素的子集有哪些？

(4) A 有含三个元素的子集吗？

解 $\varnothing$，$\{a\}$，$\{b\}$，$\{a,b\}$ 都是 A 的子集.

上例解中，对于前三个子集的每一个，A 至少有一个元素不属于它，如 $a \notin \{b\}$.

提示：集合 B 是集合 A 的真子集，可用图1-1形象地说明.

真子集

一般地，若 $B \subseteq A$，又 A 中至少有一元素 $e \notin B$，则 B 叫做 A 的**真子集**. 记作 $B \subset A$（或者 $A \supset B$）.

即 $B \subseteq A$ 且 $B \neq A$.

集合 $\{a,b\}$ 的真子集有：$\varnothing$，$\{a\}$，$\{b\}$.

很明显，空集是任何非空子集的真子集.

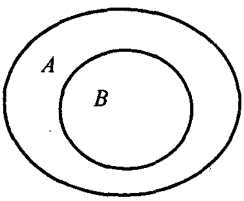


图 1-1

知识扩展——证明集合相等

【例】 设 $A=\{2,3\}$，$B=\{x \mid x^2-5x+6=0\}$，求证 $A=B$.

解 因为 A 中的元素 2 和 3 都是方程 $x^2-5x+6=0$ 的解，所以 $A \subseteq B$；又方程 $x^2-5x+6=0$ 的任意一个解都是集合 A 中的元素，则 $B \subseteq A$.

故由集合相等可知 $A=B$.

练一练

选用适当的符号($\in,\notin,\subset,\supset,=$)填入空格:

(1) $\{3,4,5\}$____$\{1,2,3,4,5,6\}$;

(2) $\{x\mid x-6=0\}$____$\{6\}$;

(3) $\{x\mid |x|=6\}$____$\{6\}$;

(4) $\{0,2,4,6,8,\cdots\}$____$\{2m\mid m\in \mathbf{Z}\}$;

(5) $\{x\mid x^2=4\}$____$\{x\mid |x|=2\}$;

(6) -3 ____$\{x\mid x+3=0\}$;

(7) 3 ____$\{x\mid x+3=0\}$;

(8) $\{x\mid x^2=4\}$____$\varnothing$;

(9) $\{x\mid |x|=-2\}$ ____$\varnothing$.

集合的运算

观察集合 $A=\{3,5,6,8\}$, $B=\{5,7,8,10\}$, $C=\{5,8\}$有什么关系?

$C=\{5,8\}$是由 $A=\{3,5,6,8\}$与 $B=\{5,7,8,10\}$的所有公共元素构成的集合,称为 A 与 B 的交集.

提示: A 与 B 的交集 $A\cap B$ 用图 1-2 表示为:

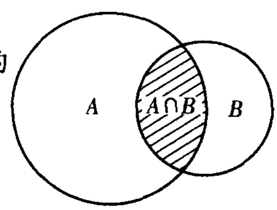


图 1-2

交集

一般地,A,B 是两个集合,由同时属于 A 与 B 的一切元素组成的集合,叫做 A 与 B 的**交集**.

记作 $A\cap B$, 读作"A 交 B".

集合 A 与集合 B 的交集 $A\cap B$ 用描述法表示为:

$A\cap B=\{x\mid x\in A$ 且 $x\in B\}$.

由交集的定义容易得出

$A\cap A=A$, $A\cap\varnothing=\varnothing$, $A\cap B=B\cap A$, $A\cap B\subseteq A$, $A\cap B\subseteq B$.

练一练

在空格上填写适当的集合：

(1) $\{1,2,3,4,5\}\cap\{1,3,5,7,9\}=$______；

(2) $\{a,b,c,d\}\cap\{b,d,f,g\}=$______；

(3) {实数}∩{有理数}=______；

(4) {矩形}∩{菱形}=______.

示例

【例 1】 设 $A=\{x\mid x\geqslant 0\}$，$B=\{x\mid x<3\}$，求 $A\cap B$.

解 $A\cap B=\{x\mid x\geqslant 0$ 且 $x<3\}=\{x\mid 0\leqslant x<3\}$.

提示：此题的几何意义是：两直线的交点.

【例 2】 设 $A=\{(x,y)\mid 3x+2y=1\}$，$B=\{(x,y)\mid x-y=2\}$，求 $A\cap B$.

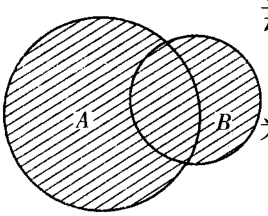
解 $A\cap B=\{(x,y)\mid 3x+2y=1$ 且 $x-y=2\}$

$$=\left\{(x,y)\,\middle|\,\begin{cases}3x+2y=1\\x-y=2\end{cases}\right\}=\{(x,y)\mid x=1,y=-1\}.$$

集合 $A=\{3,5,6,8\}$，$B=\{5,7,8,10\}$，$C=\{3,5,6,8,4,7\}$，有什么关系？

$C=\{3,5,6,8,4,7\}$ 是由 $A=\{3,5,6,8\}$ 与 $B=\{5,7,8,10\}$ 的元素合并在一起（相同的只取一个）构成的集合，称 A 与 B 的并集.

并集



$A\cup B$

图 1－3

一般地，集合 A 的元素和集合 B 的元素并在一起构成的集合，称为集合 A 与 B 的**并集**，如图 1－3 所示.

记作 $A\cup B$，读作"A 并 B".

集合 A 与集合 B 构成的 $A\cup B$ 用描述法表示为：

$A\cup B=\{x\mid x\in A$ 或 $x\in B\}$.

由并集的定义可知：

$A\cup A=A$，$A\cup\varnothing=A$，$A\cup B=B\cup A$，

$A\cup B\supseteq A$，$A\cup B\supseteq B$，$A\cup B\supseteq A\cap B$.

练一练

在空格上填写适当的集合：

(1) $\{1,2,3,4,5\}\cup\{1,3,5,7,9\}=$ ________；

(2) $\{a,b,c,d\}\cup\{b,d,f,g\}=$ ________；

(3) {实数} ∪ {有理数} = ________；

(4) {矩形} ∪ {菱形} = ________.

示例

*【例 3】 设 $A=\{x\mid -1<x<3\}$，$B=\{x\mid 0<x\leqslant 4\}$，求 $A\cup B$.

解 $A\cup B=\{x\mid -1<x<3$ 或 $0<x\leqslant 4\}=\{x\mid -1<x\leqslant 4\}$.

*【例 4】 设 $A=\{x\mid 2x^2+x+m=0\}$，$B=\{x\mid 2x^2+nx+2=0\}$，且 $A\cap B=\left\{\frac{1}{2}\right\}$，求 $A\cup B$.

解 1 由 $A\cap B=\left\{\frac{1}{2}\right\}$ 可知 $\frac{1}{2}\in A$，$\frac{1}{2}\in B$，

代入方程得 $m=-1$，$n=-5$.

所以 $A=\left\{\frac{1}{2},-1\right\}$，$B=\left\{\frac{1}{2},2\right\}$，则 $A\cup B=\left\{\frac{1}{2},-1,2\right\}$.

解 2 设 $A=\left\{\frac{1}{2},x_1\right\}$，$B=\left\{\frac{1}{2},x_2\right\}$，由韦达定理得：

$\frac{1}{2}+x_1=-\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2}x_2=1$，$x_1=-1$，$x_2=2$，

则 $A\cup B=\left\{\frac{1}{2},-1,2\right\}$.

练一练

1. 设 $A=\{2,3,4,5\}$，$B=\{4,5,6,7\}$，求 $A\cap B$ 与 $A\cup B$.
2. 设 A 为奇数集，B 为偶数集，求 $A\cap \mathbf{Z}$ 与 $\mathbf{Z}\cup B$.
3. 设 $A=\{x\mid x<3\}$，$B=\{x\mid 0<x\leqslant 5\}$，求 $A\cap B$ 与 $A\cup B$.

综合训练 1.1

1. 用适当的符号($\in$，$\notin$)填入空格：

(1)$\frac{1}{3}$____$\mathbf{Z}$； (2)1.2 ____$\mathbf{Q}$； (3)-5 ____$\mathbf{N}$；

(4)$\sqrt{2}$____$\mathbf{Q}$； (5)π ____$\mathbf{R}$.

2. 用列举法表示下列集合：

(1)大于 2 且小于 7 的整数构成的集合；

(2)由绝对值等于 3 的数构成的集合.

3. 用描述法表示下列集合：

(1)小于 10 的所有自然数构成的集合；

(2)大于-2而小于 4 的实数构成的集合；

(3)所有正方形构成的集合.

4. 用适当的符号($\subset$，$\supset$，$=$)填入空格：

(1)$\{2,4,6\}$____$\{1,2,3,4,5,6\}$；

(2) $\{x|x^2=16\}$____$\{4,-4\}$；

(3) $\{b,c,d,e,f\}$____$\{b,d,e\}$.

5. 判断下列各题所表示的关系是否正确？并且纠正其中的错误：

(1)$5\in\{1,2,3,4,5,6\}$； (2)$0\notin\varnothing$；

(3)$\{x|x-6=0\}=6$； (4)$\{x|x<4\}\supset\{3\}$；

(5)$\{2,4,6\}\cup\{1,3,4,5\}=\{2,4,6,1,3,4,5\}$.

6. 设$A=\{1,2,3,4,5\}$，$B=\{4,5,6,7,8\}$，$C=\{4,7,9\}$，求$A\cap B$，$A\cup C$，$(A\cup C)\cap(B\cup C)$.

7. 写出集合$A=\{1,2,3\}$的全部子集和真子集.

8. 在下列各题中，求$A\cap B$和$A\cup B$.

(1)$A=\{x|x+3\leqslant 0\}$，$B=\{x|x-1>0\}$；

(2)$A=\{x|x^2=16\}$，$B=\{x|x+4=0\}$.

1.2 函数的概念

◆ 同学们进入教室上课，每一位同学对应教室里唯一的一个座位.

◆ 每一位住校生对应学生宿舍区里唯一的一间房间.

上述两个例子有什么共同的地方?

两个集合：$A=\{$一个班的学生$\}$，$B=\{$这个班教室里的座位$\}$.

一个对应法则，使得集合 A 的每一个元素，有集合 B 的唯一确定的元素与它对应.

两个集合：

$C=\{$一个学校的住校生$\}$，$D=\{$这个学校学生宿舍区的房间$\}$.

一个对应法则，使得集合 C 的每一个元素，有集合 D 的唯一确定的元素与它对应.

提示： 映射的实质就是一种特殊的对应（单值对应）. $A\to B$ 与 $B\to A$ 截然不同，映射中 A，B 有先后顺序.

映射

从上述这种类型的例子我们引出下述概念：

定义 设 A，B 是两个集合，如果存在一个法则 f，使得集合 A 中每一个元素 a，都有集合 B 中唯一确定的元素 b 与之对应，则称 f 是从 A 到 B 的**映射**. 记作 $f:A\to B$.

即映射 $f:A\to B$，A 中任一元素 a 对应的 B 中唯一元素 b. b 称为 a 的**像**，a 称为 b 的**原像**.

映射 $f:A\to B$，包括三个部分：

原像的集合 A，像的集合 B，从 A 到 B 的对应法则 f.

a 在 f 下的像用符号 $f(a)$ 表示，于是映射 f 也可记成 $f(a)=b$，$a\in A$.

(1)李明所在的学校有 120 名新生，编成三个专业班，设 $A=\{$这个学校的新生$\}$，$B=\{$数控班，模具班，电器班$\}$，把新生编班是不是集合 A