# 实用数学

上

SHIYONG SHUXUE

主　编／张淑玲
副主编／曹国梅

重庆大学出版社
http://www.cqup.com.cn

# 实用数学

# 实用数学(上)

主　编　张淑玲
副主编　曹国梅

重庆大学出版社

内容提要

本套教材共分上、下两册，其中上册共有五章内容，分别是：第一章数式与方程，第二章集合，第三章函数，第四章三角函数，第五章数列；下册共有五章内容，分别是：第六章向量，第七章解析几何，第八章立体几何，第九章排列、组合与二项式定理，第十章概率。由于本教材编写时注重教材的实用性和内容的层次性，所以既适合于普通职业中专数学课的教学，又适合于五年制中专的数学教学。根据职业学校文化课时的安排，本套教材的整体教学任务应控制在两学年完成。

**图书在版编目（CIP）数据**

实用数学．上/张淑玲主编．—重庆：重庆大学出版社，2007．8
ISBN 978-7-5624-4210-3

Ⅰ．实…　Ⅱ．张…　Ⅲ．数学—高等学校：技术学校—教材　Ⅳ．01

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 105806 号

**实用数学（上）**
主　编　张淑玲
副主编　曹国梅
责任编辑：朱开波　彭　宁　　版式设计：朱开波
责任校对：文　鹏　　　　　　责任印制：张　策
*
重庆大学出版社出版发行
出版人：张鸽盛
社址：重庆市沙坪坝正街 174 号重庆大学（A 区）内
邮编：400030
电话：（023）65102378　65105781
传真：（023）65103686　65105565
网址：http://www.cqup.com.cn
邮箱：fxk@cqup.com.cn（市场营销部）
全国新华书店经销
重庆铜梁正兴印务有限公司印刷
*
开本：787×960　1/16　印张：8.25　字数：157 千
2007 年 8 月第 1 版　2007 年 8 月第 1 次印刷
印数：1—4 000
ISBN 978-7-5624-4210-3　定价：12.00元

# 前言

为了贯彻《国务院大力推进教育改革与发展的决定》精神，体现“以服务为宗旨，以就业为导向”的职业教育办学指导思想，我们组织有关人员编写了这套中等职业学校文化基础课教材《实用数学》。

本教材的编写体现了以下指导思想：

1. 注重基础性。体现“以学生为本”的教育理念，以“够用、实用、适用”为原则，以职业教育培养目标为依据，结合目前职业学校学生的实际情况，选取基础性、经典性的内容，注重基础性与专业性的结合。考虑到中专生基础薄弱、入学水平较低的情况，教材在第一章增加了初中阶段的重要数学知识，实现了与初中教学内容的衔接，为学生后继学习提供了必要的基础知识。通过本教材的学习，使学生获得中等职业教育数学课的基本知识与技能，为进一步学习专业知识提供保证，这些内容也提供了使学生作为一个公民应具备的基本数学素养。

2. 体现层次性。正确把握数学课在中等职业技术学校教学中的地位，坚持因材施教、分层教学的原则，既重视对基础知识的掌握，又增加了教材的弹性，兼顾了学生数学思维能力的培养，使不同学习水平、不同专业学生都有一定的发展空间。教材根据学生水平参差不齐的情况，在编排练习时做到与教学内容相匹配，习题难度分出不同层次，首先注重每节课后 A 组题中基础知识和基本技能的掌握，同时又考虑到部分学生今后的进一步发展，适当精选了一些有层次的 B 组题和带 * 号的内容和练习，可满足不同专业学生的需求，同时也能满足学生个性化的需求。其中带 * 号部分的内容是针对那些学有余力和准备继续升学的学生编写的，教师可根据学生的实际水平及教学的需求酌情讲解。

3. 加强实用性。教材遵从中等职业学校学生的认知规律，以学生“乐学、能学”为目标，注重与学生专业相结合，内容涉及学生日常生活、工农业生产等方面的信息，富有时代气息。教材根据职业学校的培养目标及学生的特点，对部分章节的内容作了适当的删减，如弱化了定理、公式的推导过程，删减了逻辑用语、指数与对数的证明等，突出了实际应用能力的培养。在结构安排上，强调由浅入深、循序渐进，注重理论与实际相联系，通过引用生产、生活中的案例，将抽象的理论知识具体化，使学生比较深刻地体会数学的内容。

4. 教材的可读性。在教材的编写中，我们以科学的教育理论为依据，紧密结合职业教育的实际情况，尽量使教材内容简明、浅显易懂，以符合学生的认知水平。此外，教材在每章后都附有“阅读资料”，以拓宽学生的视野，提高学生的文化修养，激励他们主动学习的热情。

本教材第 1 ~3 章由张淑玲编写，第 4 章由曹国梅编写，第 5 章由李晓燕编写，第 7 章由叶金云编写，第 8 章由王娜编写，第 9 ~ 10 章由田金毓编写；张淑玲任主编，曹国梅任副主编。

本教材的修订工作得到了有关旅游职业院校及部分职业学校专家老师的指导和大力支持，对此我们表示衷心的感谢！

由于编写时间仓促和编写水平有限，对教材不妥之处，欢迎从事职业教育的老师、专家和读者批评指正。

编 者

2007 年 7 月

请按此裁下寄回我社或在网上下载此表格填好后E-mail发回

# 教师信息反馈表

为了更好地为教师服务，提高教学质量，我社将为您的教学提供电子和网络支持。请您填好以下表格并经系主任签字盖章后寄回，我社将免费向您提供相关的电子教案、网络交流平台或网络化课程资源。

| | | | |
|---|---|---|---|
| 书名： | | 版次 | |
| 书号： | | | |
| 所需要的教学资料： | | | |
| 您的姓名： | | | |
| 您所在的校(院)、系： | 校(院) 系 | | |
| 您所讲授的课程名称： | | | |
| 学生人数： | ______人 ______年级 | 学时： | |
| 您的联系地址： | | | |
| 邮政编码： | | 联系电话 | (家)<br>(手机) |
| E-mail：(必填) | | | |
| 您对本书的建议： | | 系主任签字<br><br>盖章 | |

**请寄：重庆市沙坪坝正街174号重庆大学(A区)**
**重庆大学出版社市场部**

邮编：400030
电话：023-65111124
传真：023-65103686
网址：http://www.cqup.com.cn
E-mail：fxk@cqup.com.cn

# 目录

# 第一章 数式与方程

## 第一节　数式的运算

### 一、数的基础知识

初中时学习过数的分类，现在来回顾一下：

**有理数**　整数和分数统称为有理数.

**无理数**　无限不循环小数叫做无理数，例如：

$\sqrt{2}$、$\sqrt{3}$、$\sqrt{5}$、$\pi\cdots$

**实数**　有理数和无理数统称为实数.

**数轴**　规定了原点、正方向和单位长度的直线.

**倒数**　乘积是 1 的两个数为倒数，例如：

$3$ 和 $\frac{1}{3}$，$\frac{4}{15}$ 和 $\frac{15}{4}$，$\frac{100}{3}$ 和 $\frac{3}{100}$，…

**1 的倒数是 1.**

**相反数**　只有符号不同的两个数互为相反数，例如：

$-1$ 和 $1$，$-3.5$ 和 $3.5$，$-101$ 和 $101$，…

**零的相反数是零.**

**绝对值**　几何定义：一个数 $a$ 的绝对值就是数轴上表示 $a$ 的点与原点的距离，数的绝对值记作 $|a|$.

代数定义：①一个正数的绝对值是它本身；

②一个负数的绝对值是它的相反数；

③零的绝对值等于零.

$$|a|=\begin{cases}a & (a>0)\\0 & (a=0)\\-a & (a<0)\end{cases}$$

**例1** 求下列数的绝对值:

(1)4.5; (2) $-\frac{7}{5}$.

**解** (1)因为 $4.5>0$,所以 $|4.5|=4.5$;

(2)因为 $-\frac{7}{5}<0$,所以 $\left|-\frac{7}{5}\right|=-\left(-\frac{7}{5}\right)=\frac{7}{5}$.

**例2** 若 $a$、$b$ 是两个已知数,且 $c=|a-b|-|b-a|$,求 $c$.

**解** 若 $a>b$,则 $a-b>0,b-a<0$,

所以 $c=|a-b|-|b-a|=(a-b)-(a-b)=0$.

若 $a<b$,则 $a-b<0,b-a>0$,

所以 $c=|a-b|-|b-a|=(b-a)-(b-a)=0$,

若 $a=b$,则 $a-b=0,b-a=0$,

所以 $c=|a-b|-|b-a|=0$.

综上所述,$c=0$.

**练习**

1. $-3$、$\frac{4}{5}$、$\sqrt{3}$、$\pi$、$\frac{\sqrt{5}}{2}$ 这些数中,整数有__________,分数有__________,有理数有__________,无理数有__________.

2. $-\frac{4}{5}$ 的相反数为______,倒数为______,0 的相反数为______,0 有倒数吗?

3. 求下列各式中 $x$ 的值:

(1) $x<0,|x|=\frac{3}{7}$; (2) $x>0,|x|=0.5$;

(3) $|x|=\sqrt{5}$; (4)已知 $a\neq 0,x=\frac{a}{|a|}$,求 $x$.

## 二、整式的运算

幂的运算法则($a$、$b\neq 0$,$m$,$n$ 是整数):

$$a^n\cdot a^m=a^{n+m},\quad (a^m)^n=a^{m\cdot n}.$$

$$(a\cdot b)^n=a^n\cdot b^n,\quad \frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}.$$

常用乘法公式:

$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$;

$(a+b)^2=a^2+2a\cdot b+b^2$;

$(a-b)^2=a^2-2a\cdot b+b^2$.

**因式分解** 多项式的因式分解就是把一个多项式化为几个整式的积,多项式的因式分解和整式的乘法是相反方向的变换,

即 $x^2+ax+bx+a\cdot b \underset{\text{乘法法则}}{\overset{\text{因式分解}}{\rightleftharpoons}} (x+a)(x+b)$.

**例 1** 计算下列各式:

(1) $(2a+1)(3a+b)$; (2) $(2x^2-1)(2x^2-x)$.

**解** (1) $(2a+1)(3a+b)=2a\times 3a+2a\times b+1\times 3a+1\times b$

$=6a^2+2ab+3a+b$.

(2) $(2x^2-1)(2x^2-x)=2x^2\times 2x^2-2x^2\times x-1\times 2x^2+1\times x$

$=4x^4-2x^3-2x^2+x$.

**例 2** 把下列各式因式分解:

(1) $x^2+7x+10$; (2) $6y^2-11y+5$.

**解** (1) $x^2+7x+10=(x+2)(x+5)$;

$$\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{array}$$

(2) $6y^2-11y+5=(6y-5)(y-1)$.

$$\begin{array}{cc} 6 & -5 \\ 1 & -1 \end{array}$$

## 练习

1. 计算 $(3ab-a^2b^2-9)(3+ab)$.
2. 计算 $(a+b+c+d)(a+b-c-d)$.
3. 把下列各式因式分解:

(1) $6a^2-11ab+3b^2$;

(2) $(x-y)^2-(x-y)-6$.

## 三、分式的运算

分式 $A$、$B$ 表示两个整式,$A\div B$ 就可以表示成 $\frac{A}{B}$ 的形式,如果 $B$ 中含有字母,式子 $\frac{A}{B}$ 就可以叫做分式,其中 $A$ 叫做分式的分子,$B$ 叫做分式的分母.

分式的基本性质:分式的分子和分母都乘以(或除以)同一个不等于零的整式,

分式的值不变,这个性质叫做分式的基本性质.

即 $\frac{A}{B}=\frac{A\times M}{B\times M},\frac{A}{B}=\frac{A\div M}{B\div M}$($M$ 为不等于零的整式).

分式的运算:分式的加减运算是使用通分进行的,分式的乘除运算是使用约分进行的.

**例 1** 计算$\dfrac{1-\dfrac{1}{x+1}}{1+\dfrac{1}{x-1}}$.

**解** 原式 $=\left(1-\frac{1}{x+1}\right)\div\left(1+\frac{1}{x-1}\right)$

$$=\frac{x}{x+1}\div\frac{x}{x-1}$$

$$=\frac{x-1}{x+1}.$$

## 练习

1. $\left(\frac{-ab}{x^2y}\right)^2\cdot\left(\frac{-3y}{ab^3}\right)\div\left(\frac{y}{b^2}\right)^3$;

2. $\frac{2xy}{(x-y)(x-z)}+\frac{2yz}{(x-y)(z-x)}$.

## 四、数的乘方和开方运算

**正整数指数幂** $a^n$($n$ 是正整数)$=\underbrace{a\cdot a\cdot a\cdots a}_{n个a相乘}$.

**零指数幂** $a^0=1(a\neq0)$.

**负整数指数幂** $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$($a\neq0$,$n$ 是正整数).

**平方根** 若 $x^2=a(a\geqslant0)$,则称 $x$ 为 $a$ 的平方根(二次方根).

**立方根** 若 $x^n=a$,则称 $x$ 为 $a$ 的立方根(三次方根).

**$n$ 次方根** 若 $x^n=a$($a$ 是一个实数,$n$ 是大于 1 的正整数),则称 $x$ 为 $a$ 的一个 $n$ 次方根.

当 $n$ 为偶数时,对于每一个实数 $a$,它在实数集里有两个 $n$ 次方根,它们互为相反数,分别表示为$\sqrt[n]{a}$和 $-\sqrt[n]{a}$,而对于每一个负数 $a$,它的 $n$ 次方根是没有意义的,如 4 的 2 次方根为 2 和 $-2$;

当 $n$ 为奇数时,对于每一个实数 $a$,它在实数集里只一个 $n$ 次方根,表示为$\sqrt[n]{a}$. 当

$a>0$ 时，$\sqrt[n]{a}>0$；当 $a<0$ 时，$\sqrt[n]{a}<0$.

**0 的 $n$ 次方根是 0**，即 $\sqrt[n]{0}=0$.

我们把形如 $\sqrt[n]{a}$（有意义时）的式子称为 $n$ 次根式；其中 $n$ 称为根指数，$a$ 称为被开方数，正的 $n$ 次方根 $\sqrt[n]{a}$ 称为 $a$ 的 $n$ 次算术根，并且

$$(\sqrt[n]{a})^n=a(n>1,n\text{ 是正整数}).$$

**例 1**　计算：$(\sqrt{3})^0,\left(\frac{1}{2}\right)^{-3},\left(\frac{3}{2}\right)^{-3},(0.01)^{-3}$.

**解**　$(\sqrt{3})^0=1$；

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}=\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^3}=\frac{1}{\frac{1}{8}}=8;$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{-3}=\frac{1}{\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}\right]^3}=\left(\frac{2}{3}\right)^{-1(-3)}=\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{8}{27};$$

$$(0.01)^{-3}=(10^{-2})^{-3}=10^6.$$

**例 2**　求 $-27$ 的立方根，81 的四次方根.

**解**　$-27$ 的立方根为 $\sqrt[3]{-27}=-3$；

81 的四次方根为 $\pm\sqrt[4]{81}=\pm3$.

### 练习

1. 计算

$3^0,\left(-\frac{2}{3}\right)^{-3},(0.1)^{-3}$.

2. $\frac{4}{25}$ 的平方根为____，0 的平方根为____，27 的立方根为____，$\frac{16}{81}$ 的四次方根为____.

## 五、指数与对数的运算

### （一）指数的运算

前面已经复习了整数指数幂的意义及运算法则，并回顾了方根的概念，现在将上述进行推广.

应用幂的运算法则可知：

$(a^{\frac{1}{3}})^3=a^{\frac{1}{3}\cdot3}=a$，　　$(a^{\frac{2}{3}})^3=a^{\frac{2}{3}\cdot3}=a^2$，

$(\sqrt[3]{a})^3=a$，　　$[(\sqrt[3]{a})^2]^3=[(\sqrt[3]{a})^3]^2=a^2$.

显然 $a^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{a}$；$a^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{a^2}$.

于是可定义 $a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$；$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$（$m$、$n\in\mathbf{N}_+$ 且 $\frac{m}{n}$ 为既约分数）.

负分数指数幂规定：$a>0$ 时，$a^{-\frac{m}{n}}=\frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}$（$m$、$n\in\mathbf{N}_+$ 且 $\frac{m}{n}$ 为既约分数）.

由此把整数幂推广到有理指数幂，有理指数幂还可推广到实数指数幂，即

(1) $a^{\alpha}\cdot a^{\beta}=a^{\alpha+\beta}$；

(2) $(a^{\alpha})^{\beta}=a^{\alpha\beta}$；

(3) $(ab)^{\alpha}=a^{\alpha}\cdot b^{\alpha}$.

**例 1** 用分数指数幂表示下列各式.

(1) $\sqrt[4]{(a+b)^3}$；　　(2) $\sqrt[3]{m^2+n^2}$.

**解** (1) $\sqrt[4]{(a+b)^3}=(a+b)^{\frac{3}{4}}$；

(2) $\sqrt[3]{m^2+n^2}=(m^2+n^2)^{\frac{1}{3}}$.

**例 2** 计算下列各式：

(1) $a^{\frac{1}{3}}\cdot a^{\frac{5}{6}}\div a^{-\frac{1}{2}}$；　　(2) $\sqrt[6]{\left(\frac{8a^3}{125b^3}\right)^4}$.

**解** (1) $a^{\frac{1}{3}}\cdot a^{\frac{5}{6}}\div a^{-\frac{1}{2}}=a^{\left[\frac{1}{3}+\frac{5}{6}-\left(-\frac{1}{2}\right)\right]}=a^{\frac{5}{3}}$；

(2) $\sqrt[6]{\left(\frac{8a^3}{125b^3}\right)^4}=\left(\frac{8a^3}{125b^3}\right)^{\frac{2}{3}}=\left[\frac{(2a)^3}{(5b)^3}\right]^{\frac{2}{3}}=\left(\frac{2a}{5b}\right)^2=\frac{4a^2}{25b^2}$.

**（二）对数的运算**

在指数式 $a^b=N$ 中 $a$、$b$、$N$ 三个量，若已知其中两个量，就可以求出第三个量，若已知 $a$、$N$ 如何求 $b$ 呢？如：已知 $3^x=27$，求 $x$. 因为 $3^3=27$，所以 $x=3$. 又如 $3^x=20$，如何求 $x$？要想解决这个问题，我们需要引入一个新知识——对数.

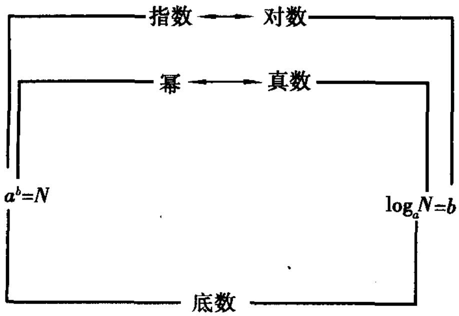

图 1.1

一般地，在指数式 $a^b=N$（$a>0$ 且 $a\neq1$）中，**称 $b$ 为以 $a$ 为底 $N$ 的对数，并且把 $b$ 记为 $\log_a N$**，即

$$\log_a N=b.$$

其中 $a$ 称为**对数的底数（简称底）**，$N$ 称为**真数**，如图 1.1 所示.

又如　$a^0=1$，$a^1=a$.

**即 1 的对数等于 0，底数的对数等于 1.**

由 $a^b>0$，**即零和负数没有对数.**

对数恒等式

$$a^{\log_a N}=N$$

**例 1**　求 $\log_2 2$、$\log_2 1$、$\log_2 \frac{1}{2}$、$\log_2 16$ 的值.

**解**　$\log_2 2=1$；$\log_2 1=0$；

由于 $2^{-1}=\frac{1}{2}$，因此 $\log_2 \frac{1}{2}=-1$.

由于 $2^4=16$，因此 $\log_2 16=4$.

**常用对数**

以 10 为底的对数称为常用对数，通常把 $\log_{10}N$ 简记为 $\lg N$.

**例 2**　求 $\lg 1$、$\lg \frac{1}{10}$、$\lg 0.001$、$\lg 10\ 000$的值.

**解**　由于 $\log_a 1=0$，

因此 $\lg 1=0$；

由于 $10^{-1}=\frac{1}{10}$，

因此 $\lg \frac{1}{10}=-1$；

由于 $10^{-3}=0.001$，

因此 $\lg 0.001=-3$；

由于 $10^4=10\ 000$，

因此 $\lg 10\ 000=4$.

## 练习

1. 计算

(1) $\left(\frac{1}{5}x\right)^2\cdot(5x)^2$；

(2) $2\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}$；

(3) $\sqrt[3]{\frac{3y}{x}}\cdot\sqrt{\frac{3x^2}{y}}$；

(4) $(x^{\frac{1}{2}}\cdot y^{-\frac{1}{3}})^6$；

(5) $27^{\frac{2}{3}}$.

2. 求 $\log_3 3\cdot\log_3 1\cdot\log_3 27\cdot\log_3 \frac{1}{3}$的值.

## 六、对数的运算法则

设 $a>0$ 且 $a\neq1$，$M$、$N$ 都是正实数，则有

1. $\log_a(M\cdot N)=\log_a M+\log_a N$.

正因数积的对数等于各因数对数的和.

2. $\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$.

两个正数商的对数等于被除数的对数减去除数的对数.

3. $\log_a M^p = p \cdot \log_a M$.

正数幂的对数等于幂的指数乘以幂底数的对数.

**例 1** 计算 $\lg \sqrt[5]{100}$ 及 $\log_2(4^7 \cdot 2^5)$ 的值.

**解** $\lg \sqrt[5]{100} = \frac{1}{5}\lg 100 = \frac{2}{5}$;

$\log_2(4^7 \cdot 2^5) = \log_2 4^7 + \log_2 2^5 = 14 + 5 = 19$.

**例 2** 计算下列各题:

(1)$2^{\log_2 5}$;(2)$2^{1+\log_2 5}$;(3)$2^{2-\log_2 5}$;(4)$2^{3\log_2 5}$.

**解** (1)$2^{\log_2 5} = 5$;

(2)$2^{1+\log_2 5} = 2 \cdot 2^{\log_2 5} = 2 \times 5 = 10$;

(3)$2^{2-\log_2 5} = \frac{2^2}{2^{\log_2 5}} = \frac{4}{5}$;

(4)$2^{3\log_2 5} = (2^{\log_2 5})^3 = 5^3 = 125$.

### 练习

1. 计算

(1)$\log_3(27 \cdot 9^2)$;　　(2)$\log_7 \sqrt[3]{49}$.

2. 计算下列各式

(1)$\log_2 6 - \log_2 3$;　　(2)$\log_3 5 - \log_3 15$;

(3)$\lg 5 + \lg 2$;　　(4)$\log_3 5 + \log_3 \frac{1}{5}$.

## 七、自然对数与换底公式

### 自然对数

以无理数 $e \approx 2.718\ 28$ 为底的对数称为自然对数,把 $\log_e N$ 简记为 $\ln N$.

### 换底公式

利用常用对数可以求得任意一个以正数为底的对数,现在来说明,如何根据对数的性质,由以 10 为底的对数求以其他正数 $a(a \neq 1)$ 为底的对数.

**例 1** 求 $\log_3 5$ 的值.

**解** 设 $\log_3 5 = x$,写成指数形式得

$$3^x = 5,$$